Глава 4

Задачи оптимального управления

В этой главе рассматриваются задачи оптимального управления. Приводится формулировка принципа максимума Понтрягина в общем случае, а также в частном случае для задачи со свободным концом и закрепленным временем. Решаются простейшая задача о быстродействии, аэродинамическая задача Ньютона и ряд других задач оптимального управления.

В пятидесятых годах многочисленные потребности прикладных дисциплин (техники, экономики и др.) стимулировали постановку и рассмотрение нового класса экстремальных задач, получивших название *задач оптимального управления*. Необходимое условие экстремума для задач этого класса — "Принцип максимума", — сформулированное Л. С. Понтрягиным в 1956 году, было доказано и развито впоследствии им, его учениками и сотрудниками. Важно отметить, что это условие имеет существенно иную форму в сравнении с классическими уравнениями Эйлера и Лагранжа: в качестве обязательного условия в решении задачи оптимального управления входит решение вспомогательной задачи на максимум (отсюда и название — "принцип максимума"). За разработку теории оптимального управления Понтрягину и его сотрудникам В. Г. Болтянскому, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко в 1962 году была присуждена Ленинская премия.

Понтрягин рассматривал задачу на максимум, мы же для единообразия с прошлым материалом будем рассматривать задачу на минимум, называя соответствующее условие *условием оптимальности*, и формулировать необходимые условия в лагранжевой форме.

В отличие от задачи Лагранжа в задаче оптимального управления вводится *управление* u и появляется дополнительное ограничение типа включения на управление: $u \in U$. Множество U определяет возможности человека влиять на происходящий процесс.

1 Принцип максимума Понтрягина в общем случае

1.1 Постановка задачи

Задачей оптимального управления (в понтрягинской форме) будем называть следующую задачу:

$$B_0(\xi) \to \min;\ B_i(\xi) \le 0,\ i = 1, \ldots, m',\ B_i(\xi) = 0,\ i = m'+1, \ldots, m, \tag{P}$$

$$\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0 \quad \forall\ t \in T, \tag{1}$$

$$u(t) \in U \quad \forall\ t \in \Delta, \tag{2}$$

где $\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$, $x \in PC^1(\Delta, \mathbb{R}^n)$, $u \in PC(\Delta, \mathbb{R}^r)$, $t_0, t_1 \in \Delta$, $t_0 < t_1$, Δ — заданный конечный отрезок, $U \subset \mathbb{R}^r$ — произвольное множество, $T \subset \Delta$ — множество точек непрерывности функции u,

$$B_i(\xi) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), u(t))\, dt + l_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),\ i = 0, 1, \ldots, m.$$

Здесь через $PC(\Delta, \mathbb{R}^r)$ обозначено пространство r-мерных кусочно-непрерывных на отрезке Δ вектор-функций, соответственно $PC^1(\Delta, \mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных n-мерных вектор-функций, имеющих кусочно-непрерывную производную.

Напомним, что *кусочно-непрерывной функцией* называется функция, имеющая не более конечного числа разрывов первого рода (в точках разрывов существуют конечные пределы слева и справа).

Вектор-функция $x = (x_1, \dots, x_n)$ называется *фазовой переменной*, вектор-функция $u = (u_1, \dots, u_r)$ называется *управлением.* Ограничение (1), являющееся дифференциальным уравнением, называется *дифференциальной связью.* Оно должно выполняться во всех точках непрерывности управления u. В отличии от задачи Лагранжа имеется ограничение (2) типа включения, которое должно выполняться во всех точках $t \in \Delta$, а фазовая переменная $x = (x_1, \dots, x_n)$ может иметь меньшую гладкость. Частным случаем задачи оптимального управления (P) является задача, в которой один из концов или даже оба закреплены.

Элемент ξ, для которого выполнены все указанные условия и ограничения задачи, называется *допустимым*, или еще говорят *допустимым управляемым процессом.*

Определение. Говорим, что допустимый управляемый процесс $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ доставляет *сильный локальный минимум* в задаче оптимального управления (P) (или иногда говорим, является *оптимальным в сильном смысле процессом*), и пишем $\hat{\xi} \in \operatorname{strlocmin} P$, если существует $\delta > 0$ такое, что $B_0(\xi) \geq B_0(\hat{\xi})$ для любого допустимого управляемого процесса $\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$, для которого $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C(\Delta)} < \delta$, $|t_0 - \hat{t}_0| < \delta$, $|t_1 - \hat{t}_1| < \delta$.

Отметим так же, что при определении близости двух элементов ξ и $\hat{\xi}$ не требуется близость управлений u и $\hat{u}$.

1.2 Формулировка теоремы

Теорема. *Пусть* $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ *— оптимальный (в сильном смысле) процесс в задаче оптимального управления* (P) $(\hat{\xi} \in strlocmin\,P)$*; функции* f_i*,* $i = 0, 1, \ldots, m$*,* φ *и их частные производные по* x *непрерывны в некоторой окрестности множества* $\{(t, \hat{x}(t)) \mid t \in \Delta\}$*, декартово умноженной на* U*, а функции* l_i*,* $i = 0, 1, \ldots, m$*, непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))$ (условие гладкости). *Тогда найдутся множители Лагранжа* $(\lambda, p) \in \mathbb{R}^{m+1} \times PC^1(\Delta, \mathbb{R}^n)$*,* $\lambda \neq 0$*, такие, что для функции Лагранжа* $\mathscr{L}(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) =$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(f(t, x, u) + p(t)(\dot{x} - \varphi(t, x, u)) \Big)\, dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

где $f(t, x, u) = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, u)$*,* $l = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i l_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$ *— терминант, выполнены условия:*

a) стационарность по x *— уравнение Эйлера для лагранжиана* $L(t, x, \dot{x}, u) = f(t, x, u) + p(\dot{x} - \varphi(t, x, u))$

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\, t \in T \quad \Big(\Leftrightarrow -\dot{p} + \hat{f}_x - p\hat{\varphi}_x = 0 \Big);$$

b) трансверсальность по x

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)} \quad \big(\Leftrightarrow p(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)} \big),$$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \quad \big(\Leftrightarrow p(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \big);$$

c) оптимальность по u

$$\min_{u \in U} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) \quad \forall\, t \in T$$

$$\Big(\Leftrightarrow \min_{u \in U} \{ f(t, \hat{x}(t), u) - p(t)\varphi(t, \hat{x}(t), u) \} = \hat{f}(t) - p(t)\hat{\varphi}(t) \Big);$$

d) стационарность по подвижным концам (выписывается только для подвижных концов отрезка интегрирования)

$$\hat{\mathscr{L}}_{t_0} = 0 \quad \big(\Leftrightarrow -\hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_0) = 0 \big),$$

$$\hat{\mathscr{L}}_{t_1} = 0 \quad \big(\Leftrightarrow \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_1) = 0\big);$$

e) *дополняющая нежесткость*

$$\lambda_i B_i(\hat{\xi}) = 0, \ i = 1, \ldots, m';$$

f) *неотрицательность*

$$\lambda_i \geq 0, \ i = 0, 1, \ldots, m'.$$

Покажем, что утверждение теоремы находится в полном соответствии с принципом Лагранжа, о котором в книге неоднократно шла речь. Действительно, функция Лагранжа $\mathscr{L} = \mathscr{L}(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$ является функцией трех аргументов: фазовой переменной $x(\cdot)$, управления $u(\cdot)$, концов отрезка интегрирования t_0, t_1. Согласно общему принципу Лагранжа, надо рассмотреть задачи о минимуме функции Лагранжа, в которых фиксированы все аргументы, кроме одного, и выписать необходимые условия минимума функции Лагранжа:

$$\mathscr{L}(x(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) \to \min; \tag{i}$$

$$\mathscr{L}(\hat{x}(\cdot), u(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) \to \min; \tag{ii}$$

$$\mathscr{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), t_0, t_1) \to \min. \tag{iii}$$

Задача (i) является задачей Больца, необходимые условия экстремума в которой — уравнение Эйлера и условия трансверсальности. Задача (ii) является элементарной задачей оптимального управления. Минимум интеграла достигается, если подынтегральная функция достигает своего минимума по выбору возможных управлений — это и есть условие оптимальности по управлению. Задача (iii) является задачей нахождения минимума функции двух переменных, необходимые условия экстремума в которой — теорема Ферма — равенство нулю в точке минимума частных производных по t_0 и t_1.

1.3 Пример

$$B(x(\cdot)) = \int\limits_0^4 (\dot{x}^2 + x)\,dt \to \text{extr};\ |\dot{x}| \leq 1,\ x(0) = 0.$$

Решение. Приведем задачу к виду задач оптимального управления, введя управление u:

$$\int\limits_0^4 (u^2 + x)\,dt \to \text{extr};\ \dot{x} = u,\ u \in [-1,\,1],\ x(0) = 0.$$

Функция Лагранжа $\mathscr{L} = \int\limits_0^4 \big(\lambda_0(u^2 + x) + p(\dot{x} - u)\big)\,dt + \lambda_1 x(0)$.

Необходимые условия:

a) уравнение Эйлера для лагранжиана $L = \lambda_0(u^2+x)+p(\dot{x}-u)$

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \iff -\dot{p} + \lambda_0 = 0;$$

b) трансверсальность по x для терминанта $l = \lambda_1 x(0)$

$$L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)},\ L_{\dot{x}}(4) = -l_{x(4)} \iff p(0) = \lambda_1,\ p(4) = 0;$$

c) оптимальность по u: $\min\limits_{u\in[-1,1]} \{\lambda_0 u^2 - pu\} = \lambda_0 \hat{u}^2 - p\hat{u}$;

d) неотрицательность: $\lambda_0 \geq 0$ в задаче на минимум,
$\lambda_0 \leq 0$ в задаче на максимум.

Если $\lambda_0 = 0$, то из a) $\dot{p} = 0$ и из b) $p = \lambda_1 = 0$ — все множители Лагранжа оказались нулями, а этого быть не может. Значит, $\lambda_0 \neq 0$.

В задаче на минимум положим $\lambda_0 = 1$. Тогда из a) $\dot{p} = 1$ и из b) $p = t - 4$. Из условия c) следует, что минимум параболы с осями вверх $f(u) = u^2 - pu$ на отрезке $[-1,\,1]$ достигается либо в вершине, либо на одном из его концов. Поскольку $f'(\hat{u}) = 0$ $\Leftrightarrow 2\hat{u} = p \Leftrightarrow \hat{u} = \dfrac{p}{2}$, то минимум достигается в вершине при $\left|\dfrac{p}{2}\right| \leq 1$. Если же $\left|\dfrac{p}{2}\right| > 1$, то минимум достигается на одном из концов отрезка $[-1,\,1]$, а именно, на котором знаки $\hat{u}$ и p совпадают. Значит,

$$\hat{u} = \begin{cases} -1, & \frac{p}{2} \le -1, \\ \frac{p}{2}, & -1 \le \frac{p}{2} \le 1, \\ 1, & 1 \le \frac{p}{2}, \end{cases} \overset{p=t-4}{=} \begin{cases} -1, & \frac{t-4}{2} \le -1, \\ \frac{t-4}{2}, & -1 \le \frac{t-4}{2} \le 1, \\ 1, & 1 \le \frac{t-4}{2}, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1, & t-4 \le -2, \\ \frac{t-4}{2}, & -2 \le t-4 \le 2, \\ 1, & 2 \le t-4, \end{cases} = \begin{cases} -1, & t \le 2, \\ \frac{t-4}{2}, & 2 \le t \le 6, \\ 1, & 6 \le t. \end{cases}$$

Следовательно, на отрезке $0 \le t \le 4$

$$\dot{\hat{x}} = \hat{u} = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 2, \\ \frac{t}{2} - 2, & 2 \le t \le 4, \end{cases} \iff \hat{x} = \begin{cases} -t + C_1, & 0 \le t \le 2, \\ \frac{t^2}{4} - 2t + C_2, & 2 \le t \le 4. \end{cases}$$

Из начального условия $x(0) = 0$ выводим, что $C_1 = 0$, а из условия непрерывности в точке $t = 2$ имеем $-2 = 1 - 4 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = 1$. Таким образом,

$$\hat{x} = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le 2, \\ \frac{t^2}{4} - 2t + 1, & 2 \le t \le 4. \end{cases}$$

Докажем с помощью непосредственной проверки, что функция $\hat{x}$ доставляет абсолютный максимум в задаче. Сравним значение функционала $B(\hat{x})$ со значением функционала $J(x)$ на произвольной допустимой функции x. Представим функцию x в виде суммы $x = \hat{x}+h$, где функция h такова, что их сумма $\hat{x}+h$ допустима. Для этого надо взять $h \in PC^1([0,\,4])$, $|\dot{\hat{x}} + \dot{h}| \le 1$, $h(0) = 0$. Тогда в силу равенства

$$B(\hat{x}+h) - B(\hat{x}) = B(\hat{x})[h] + \frac{1}{2}B''(\hat{x})[h,h] \quad \forall\ h \in PC^1([0,\,4])$$

для функционала B с линейно-квадратичным интегрантом $f = \dot{x}^2 + x$ на экстремали $\hat{x}$ имеем

$$B(\hat{x}+h) - B(\hat{x}) = \int\limits_0^4 \left(\hat{f}_{\dot{x}}\dot{h} + \hat{f}_x h\right) dt + \int\limits_0^4 \dot{h}^2\, dt \ge \int\limits_0^4 \left(\hat{f}_{\dot{x}}\dot{h} + \hat{f}_x h\right) dt =$$

$$= \int\limits_0^4 \left(-\frac{d}{dt}\hat{f}_{\dot{x}} + \hat{f}_x \right) h\,dt = \int\limits_0^4 (-2\ddot{\hat{x}} + 1) h\,dt.$$

Разбивая отрезок интегрирования на два и подставляя найденную функцию $\hat{x}$, имеем

$$B(\hat{x}+h) - B(\hat{x}) \geq \int\limits_0^2 (-2\ddot{\hat{x}}+1) h\,dt + \int\limits_2^4 (-2\ddot{\hat{x}}+1) h\,dt = \int\limits_0^2 h\,dt \geq 0.$$

Ибо на отрезке $[0,\,2]$ ограничение на производную переписывается в следующем виде: $|\dot{\hat{x}} + \dot{h}| \leq 1 \Leftrightarrow |-1 + \dot{h}| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -1 + \dot{h} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \dot{h} \leq 2$. Значит, функция h возрастает и, поскольку $h(0) = 0$, то $h(t) \geq 0$ при $t \in [0,\,2]$ и, следовательно, интеграл неотрицателен. Итак, $\hat{x} \in \mathrm{absmin}$,

$$S_{\mathrm{absmin}} = B(\hat{x}) = \int\limits_0^4 (\dot{\hat{x}}^2 + \hat{x})\,dt = \int\limits_0^2 (1-t)\,dt + \int\limits_2^4 \left(\left(\frac{t}{2} - 2 \right)^2 + \frac{t^2}{4} - 2t + 1 \right) dt =$$

$$= \left(t - \frac{t^2}{2} \right)\Big|_0^2 + \int\limits_2^4 \left(\frac{t^2}{2} - 4t + 5 \right) dt = 2 - 2 + \left(\frac{t^3}{6} - 2t^2 + 5t \right)\Big|_2^4 = -4\frac{2}{3}.$$

В задаче на максимум положим $\lambda_0 = -1$. Тогда из a) $\dot{p} = -1$ и из b) $p = 4 - t$. Условие c) перепишется в виде:

$$\min_{u \in [-1,\,1]} \{-u^2 - pu\} = -\hat{u}^2 - p\hat{u}.$$

Минимум параболы с осями вниз достигается всегда на одном из концов отрезка. В нашей задаче минимум достигается там, где знаки $\hat{u}$ и p совпадают. Значит,

$$\hat{u} = \dot{\hat{x}} = \mathrm{sign}\,p = \mathrm{sign}(4-t) = 1 \text{ при } 0 \leq t < 4.$$

Интегрируя, получаем $\hat{x} = t + C$. Из начального условия $x(0) = 0$ вытекает, что $C = 0$. Таким образом, $\hat{x} = t$.

Докажем с помощью непосредственной проверки, что функция $\hat{x}$ доставляет абсолютный максимум в задаче. Возьмем функцию $h \in PC^1([0,4])$ такую, чтобы $\hat{x}+h$ была допустимой в задаче. Для этого надо взять функцию h, для которой $|\dot{\hat{x}}+\dot{h}| \le 1$ ($\Leftrightarrow |1+\dot{h}| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le 1+\dot{h} \le 1 \Leftrightarrow -2 \le \dot{h} \le 0$), $h(0)=0$. Как и при проверке экстремали на минимум имеем

$$B(\hat{x}+h)-B(\hat{x}) = \int_0^4 \left(\hat{f}_{\dot{x}}\dot{h}+\hat{f}_x h\right) dt + \int_0^4 \dot{h}^2\,dt = \int_0^4 \left(2\dot{\hat{x}}\dot{h}+h\right) dt + \int_0^4 \dot{h}^2\,dt =$$

$$= \int_0^4 \left(2\dot{h}+h\right) dt + \int_0^4 \dot{h}^2\,dt = \int_0^4 (2+\dot{h})\dot{h}\,dt + \int_0^4 h\,dt \le 0.$$

Ибо оба интеграла неположительны, поскольку в первом интеграле $2+\dot{h} \ge 0$, а $\dot{h} \le 0$, а во втором интеграле $h \le 0$, так как $\dot{h} \le 0$ (т. е. функция h убывает), а $h(0)=0$. При этом

$$S_{\text{absmax}} = B(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^4 (\dot{\hat{x}}^2+\hat{x})\,dt = \int_0^4 (1+t)\,dt = \left(t+\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = 4+8 = 12.$$

То, что $\hat{x} = t \in \text{absmax}$ можно было бы получить и без непосредственной проверки из условия самой задачи. Разобьем исходный функционал на два интеграла. Максимум $\int_0^4 \dot{x}^2\,dt$ при $|\dot{x}| \le 1$ достигается на $|\dot{x}|=1$, а максимум $\int_0^4 x\,dt$ при $|\dot{x}| \le 1$, $x(0)=0$, достигается при наибольшем возрастании функции x, т. е. при $\dot{x}=1$ ($\Leftrightarrow \hat{x}=t$).

Ответ. $\begin{cases} -t, & 0 \le t \le 2, \\ \dfrac{t^2}{4}-2t+1, & 2 \le t \le 4, \end{cases} \in \text{absmin},\ S_{\text{absmin}} = -4\dfrac{2}{3};$
$t \in \text{absmax}$, $S_{\text{absmax}} = 12$.