И. Бернулли в 1696 г поставил задачу о брахистохроне.
В вертикальной плоскости даны две точки A и B.
Определить путь AMB, спускаясь по которому под действием собственной тяжести тело M, начав двигаться из точки A, дойдет до точки B за кратчайшее время.
Вводя в плоскости систему координат так, чтобы ось t была горизонтальна, а ось x вертикальна, получим задачу:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}{\sqrt{x(t)}}\,dt \to \min; \ \ x(t_0) = x_0, \ \ x(t_1) = x_1.$$

$\dot{x}(t)$ — производная по t. Задачу решили сам И. Бернулли, а также Я. Бернулли, Лейбниц, Лопиталь и Ньютон.
Решение Лейбница было основано на аппроксимации кривых ломаными. Развитая затем в работах Эйлера, эта идея заложила основы прямых методов в ВИ.

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\,dt \to \mathrm{extr};\ \ x(t_0) = x_0,\ \ x(t_1) = x_1.\ (P)$$

$x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$, $L = L(t, x, \dot{x})$ — интегрант.

$[t_0, t_1]$ — фиксированный, конечный отрезок, $t_0 < t_1$.

Условия на концах (краевые условия).

Допустимые функции, $D(P)$.

Определение

Допустимая функция $\hat{x}$ доставляет слабый локальный минимум в задаче (P) ($\hat{x} \in \mathrm{wlocmin}\, P$), если $\exists\ \delta > 0$: $J(x(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot))\ \forall\ x(\cdot) \in D(P) : \|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1[t_0,t_1]} < \delta$.

Напомним: $\|y\|_{C[t_0,t_1]} := \max\{|y(t)| \mid t \in [t_0, t_1]\}$,

$\|y\|_{C^1[t_0,t_1]} := \max\{\|y\|_{C[t_0,t_1]}, \|\dot{y}\|_{C[t_0,t_1]}\}$.

1.2 Вывод уравнения Эйлера с помощью основной леммы вариационного исчисления

Теорема

$\hat{x} \in \operatorname{wlocextr} P,\ L, L_x, L_{\dot{x}} \in C(\mathbb{R}^3),\ \hat{L}_{\dot{x}} \in C^1[t_0, t_1]$
$\Rightarrow \hat{x}$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\ t \in [t_0, t_1].$$

Здесь $\hat{L}_{\dot{x}} := \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(t, x, \dot{x})\Big|_{\substack{x=\hat{x}(t)\\ \dot{x}=\dot{\hat{x}}(t)}}$, $\hat{L}_x := \frac{\partial}{\partial x} L(t, x, \dot{x})\Big|_{\substack{x=\hat{x}(t)\\ \dot{x}=\dot{\hat{x}}(t)}}$.

1744 г., Эйлер, аппроксимируя кривые ломаными.
1759 г., Лагранж, варьируя кривую, подозреваемую на экстремум, назвал уравнение Эйлера.
Экстремали $E(P)$. Допустимые экстремали $DE(P)$.

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \mathrm{extr};\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1.\ (P)$$

$\lhd$ Возьмем $h \in C_0^1[t_0, t_1] := \{h \in C^1[t_0, t_1] \mid h(t_0) = h(t_1) = 0\}$.

Положим $\varphi(\lambda) := J(\hat{x} + \lambda h) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \hat{x}(t) + \lambda h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t)) dt$.

$\hat{x} \in \mathrm{wlocextr}\, P \Rightarrow \lambda = 0 \in \mathrm{locextr}\, \varphi \overset{\text{по т. Ферма}}{\Rightarrow} \varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \hat{L}_x(t)h(t)\right) dt = 0\ \forall\ h \in C_0^1[t_0, t_1]. \qquad (1)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \hat{L}_{\dot{x}} \dot{h}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \hat{L}_{\dot{x}} dh \overset{\hat{L}_{\dot{x}} \in C^1}{=} \hat{L}_{\dot{x}}(t)h(t)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} h\, d\hat{L}_{\dot{x}} = -\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}\right) h\, dt.$$

Тогда (1) перепишется в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t)\right) h(t)\, dt = 0 \quad \forall\ h \in C_0^1[t_0, t_1]. \qquad (2)$$

1.2 Вывод уравнения Эйлера с помощью основной леммы вариационного исчисления

Теорема

$\hat{x} \in \mathrm{wlocextr}\, P,\ L, L_x, L_{\dot{x}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})),\ \hat{L}_{\dot{x}} \in C^1[t_0, t_1] \Rightarrow$

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\ t \in [t_0, t_1].$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(-\tfrac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t)\right) h(t)\, dt = 0 \quad \forall\ h \in C_0^1[t_0, t_1]. \qquad (2)$$

Лемма (Лагранжа)

$a(\cdot) \in C[t_0, t_1]$ и $\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)h(t)\, dt = 0\ \forall\ h \in C_0^1[t_0, t_1] \Rightarrow a(t) \equiv 0.$

По лемме Лагранжа из (2) вытекает уравнение Эйлера. ▷

Лемма (Лагранжа)

$a(\cdot) \in C[t_0, t_1]$ и $\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)h(t)\,dt = 0 \ \forall\ h \in C_0^1[t_0, t_1] \Rightarrow a(t) \equiv 0.$

$\lhd\lhd$ Предположим $a(\tau) \neq 0$ в некоторой точке $\tau \in (t_0, t_1)$. Для определенности, пусть $a(\tau) > 0$.
Тогда в силу непрерывности $a(t) > 0$ и в некоторой окрестности точки τ, например, на отрезке $[\tau_0, \tau_1] \subset [t_0, t_1]$.
Пусть $h \in C_0^1[t_0, t_1]$ — положительная в этой окрестности функция и равная нулю вне ее, типа "шапочки", например,

$$h(t) = \begin{cases} (t-\tau_0)^2(t-\tau_1)^2, & t \in [\tau_0, \tau_1], \\ 0, & t \notin [\tau_0, \tau_1]. \end{cases}$$

Тогда $h \in C_0^1[t_0, t_1]$ и $\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)h(t)\,dt > 0$, что противоречит условию леммы. $\rhd\rhd$

Теорема

$\hat{x} \in \operatorname{wlocextr} P,\ L, L_x, L_{\dot{x}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})) \Rightarrow \hat{L}_{\dot{x}} \in C^1[t_0, t_1]$ и

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\ t \in [t_0, t_1].$$

Здесь $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}} := \{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [t_0, t_1]\}$.

$\lhd$ Возьмем $h \in C_0^1[t_0, t_1]$. Положим

$$\varphi(\lambda) := J(\hat{x} + \lambda h) = \int_{t_0}^{t_1} L\big(t, \hat{x}(t) + \lambda h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t)\big)\, dt.$$

$\hat{x} \in \operatorname{wlocextr} P \Rightarrow \lambda = 0 \in \operatorname{locextr} \varphi \overset{\text{по т. Ферма}}{\Rightarrow} \varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big(\hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \hat{L}_x(t)h(t)\Big)\, dt = 0\ \forall\ h \in C_0^1[t_0, t_1]. \qquad (1)$$

1.3 Вывод уравнения Эйлера с помощью леммы Дюбуа-Реймона

Теорема

$\hat{x} \in \mathrm{wlocextr}\, P,\ L, L_x, L_{\dot{x}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})) \Rightarrow \hat{L}_{\dot{x}} \in C^1[t_0, t_1]$ и

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\ t \in [t_0, t_1].$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \big(\hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \hat{L}_x(t)h(t)\big)\,dt = 0\ \forall\ h \in C_0^1[t_0, t_1] \qquad (1)$$

Лемма (Дюбуа-Реймона)

$a_0, a_1 \in C[t_0, t_1],\ \int_{t_0}^{t_1} \big(a_1(t)\dot{h}(t) + a_0(t)h(t)\big)\,dt = 0\ \forall\ h \in C_0^1[t_0, t_1]$

$\Rightarrow a_1 \in C^1[t_0, t_1]$ и $-\frac{d}{dt}a_1(t) + a_0(t) = 0\ \forall\ t \in [t_0, t_1].$

По л. Дюбуа-Реймона из (1) вытекает уравнение Эйлера. $\triangleright$

Лемма (Дюбуа-Реймона)

$a_0, a_1 \in C[t_0,t_1],\ \int\limits_{t_0}^{t_1} \big(a_1(t)\dot h(t) + a_0(t)h(t)\big)\,dt = 0\ \forall\ h \in C_0^1[t_0,t_1]$
$\Rightarrow a_1 \in C^1[t_0,t_1]$ и $-\frac{d}{dt}a_1(t) + a_0(t) = 0\ \forall\ t \in [t_0,t_1]$.

$\lhd\lhd$ Возьмем $p : \dot p(t) = a_0(t),\ \int\limits_{t_0}^{t_1} p(t)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} a_1(t)dt \Rightarrow p \in C^1$.

$$\Rightarrow \int\limits_{t_0}^{t_1}(a_1\dot h + a_0 h)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1}(a_1\dot h + \dot p h)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} a_1\dot h\,dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} h\,dp =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} a_1\dot h\,dt + hp\Big|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1} p\dot h\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1}(a_1 - p)\dot h\,dt = 0\ \forall\ h \in C_0^1. \quad (2)$$

Положим $\tilde h(t) := \int_{t_0}^{t} \big(a_1(\tau) - p(\tau)\big)d\tau \Rightarrow \dot{\tilde h} = a_1 - p,\ \tilde h \in C^1$,
$\tilde h(t_0) = 0,\ \tilde h(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \big(a_1(\tau) - p(\tau)\big)d\tau \overset{\text{в силу выбора } p}{=} 0 \Rightarrow \tilde h \in C_0^1$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \int\limits_{t_0}^{t_1}(a_1 - p)^2\,dt = 0 \Rightarrow a_1(t) \equiv p(t) \Rightarrow$ утв. леммы. $\rhd\rhd$

1.4 Векторный случай

Пусть $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — n-мерная вектор-функция, интегрант $L = L(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$.
Рассмотрим задачу в $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}) \times \ldots \times C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$:

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)dt \to \mathrm{extr};\ x_j(t_k) = x_{jk},\ j = 1, \ldots, n,\ k = 0, 1.$$

Необходимые условия экстремума

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}_j}(t) + \hat{L}_{x_j}(t) = 0,\ j = 1, \ldots, n,$$

Док-во редуцируется к одномерному случаю. Фиксируем у $x(\cdot) = ((x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$ все компоненты кроме $x_j(\cdot)$. Тогда $J = J(x_j(\cdot)) = J((\hat{x}_1(\cdot), \ldots, \hat{x}_{j-1}(\cdot), x_j(\cdot), \hat{x}_{j+1}(\cdot), \ldots, \hat{x}_n(\cdot))$.
А для одномерного случая уравнение Эйлера по $x_j(\cdot)$ доказано. Полнота набора условий для нахождения допустимой экстремали.

1.5 Интегралы уравнения Эйлера

Если $L = L(t, x, \dot{x})$ не зависит явно от одной из переменных, то уравнение Эйлера сводится к более простым уравнениям.

1. Если $L = L(t, \dot{x}) \not\ni x$, то имеет место интеграл импульса

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x = 0 \Leftrightarrow \hat{L}_{\dot{x}}(t) = \mathrm{const}.$$

2. Если $L = L(x, \dot{x}) \not\ni t$, то имеет место интеграл энергии

$$\dot{\hat{x}}(t)\hat{L}_{\dot{x}}(t) - \hat{L}(t) = \mathrm{const}.$$

Для доказательства достаточно продифференцировать равенство по t и воспользоваться уравнением Эйлера:

$$\ddot{\hat{x}}\hat{L}_{\dot{x}} + \dot{\hat{x}}\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} - \hat{L}_x\dot{\hat{x}} - \hat{L}_{\dot{x}}\ddot{\hat{x}} = 0 \Leftrightarrow -\dot{\hat{x}}\Big(-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x\Big) = 0.$$

Замечание. Отметим, что при выводе мы использовали предположение о существовании $\ddot{\hat{x}}$. Интеграл энергии имеет также лишнюю экстремаль $\hat{x}(t) = \mathrm{const}$.

Квадратично-линейный функционал

Рассмотрим задачу с квадратично-линейным функционалом

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \big(\langle A\dot{x}, \dot{x}\rangle + 2\langle C\dot{x}, x\rangle + \langle Bx, x\rangle + \langle a, x\rangle\big)\,dt \to \min;$$

$$x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1. \qquad (P')$$

Здесь $A = A(t)$, $B = B(t)$, $C = C(t)$, $a = a(t)$ (A, B — симм.).
По ф-ле Тейлора для квадратично-линейных функционалов

$$J(\hat{x} + h) = J(\hat{x}) + J'(\hat{x})[h] + \tfrac{1}{2}J''(\hat{x})[h, h],$$

причем $J''(\hat{x}) = J''$ (не зависит от $\hat{x}$).
Если $\hat{x} \in DE(P')$, то $J'(\hat{x})[h] = 0 \;\forall\; h \in C_0^1[t_0, t_1]$
(это соотношение эквивалентно уравнению Эйлера).
Следовательно, на экстремали $\hat{x} \quad \forall\; h \in C_0^1[t_0, t_1]$

$$J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) = \tfrac{1}{2}J''[h, h] = \int_{t_0}^{t_1} \big(\langle A\dot{h}, \dot{h}\rangle + 2\langle C\dot{h}, h\rangle + \langle Bh, h\rangle\big)\,dt.$$

Квадратичный функционал

Если функционал является квадратичным

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \big(\langle A\dot{x}, \dot{x} \rangle + 2\langle C\dot{x}, x \rangle + \langle Bx, x \rangle \big)\, dt \to \min;$$

$$x(t_0) = x_0, \ \ x(t_1) = x_1, \qquad (P')$$

т. е. нет линейных членов, то $\frac{1}{2} J''(\hat{x})[h, h] = J(h)$ и $\forall\ h \in C_0^1[t_0, t_1]$ на допустимой экстремали $\hat{x}$ имеет место равенство

$$J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) = J(h) = \int_{t_0}^{t_1} \big(\langle A\dot{h}, \dot{h} \rangle + 2\langle C\dot{h}, h \rangle + \langle Bh, h \rangle \big)\, dt.$$

Аналогичные равенства верны и для функционалов Больца.

Пример 1. $J(x(\cdot))=\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \text{extr};\ x(0)=0,\ x(1)=1.$

Уравнение Эйлера: $-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}+L_x=0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}2\dot{x}=0 \Leftrightarrow \ddot{x}=0.$

Общее решение: $x=C_1t+C_2$.

$x(0)=0 \Rightarrow C_2=0;\ x(1)=1 \Rightarrow C_1=1 \Rightarrow \hat{x}=t.$

Возьмем $x\in D(P)$, тогда $x=\hat{x}+h$, где $h\in C_0^1[0,1]$,

$J(x)-J(\hat{x})=J(\hat{x}+h)-J(\hat{x}) \overset{\text{для квадратичного функционала}}{=} J(h)=$

$=\int\limits_0^1 \dot{h}^2\,dt \geq 0 \Rightarrow \hat{x}\in \text{absmin},\ S_{\text{absmin}}=\int\limits_0^1 \dot{\hat{x}}^2\,dt=1.$

Покажем, что $S_{\text{absmax}}=+\infty$. Действительно, для

$x_n(t)=\hat{x}(t)+nt(t-1)\in D(P)$

$J(x_n)=\int\limits_0^1 \dot{x}_n^2\,dt=\int\limits_0^1 \left(\dot{\hat{x}}+n(2t-1)\right)^2 dt=n^2\int\limits_0^1 (2t-1)^2\,dt+$

$+An+B \to +\infty$ при $n\to\infty$.

Ответ. $\hat{x}=t\in \text{absmin},\ S_{\text{absmin}}=1;\ S_{\text{absmax}}=+\infty.$

Пример 2. $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$

Уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}2\dot{x} - 2x = 0 \Leftrightarrow -2\ddot{x} - 2x = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + x = 0.$$

Общее решение: $x = C_1 \sin t + C_2 \cos t$.

$x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0;\ x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow \hat{x} \equiv 0.$

Покажем, что $\hat{x} \notin \mathrm{locextr}$. Возьмем

$$x_\lambda(t) = \lambda \sin\frac{2t}{3} \Rightarrow x_\lambda \in D(P),\ \ x_\lambda \overset{C^1[0,\frac{3\pi}{2}]}{\longrightarrow} \hat{x} = 0 \text{ при } \lambda \to 0,$$

$$J(x_\lambda) = \lambda^2 \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{4}{9}\cos^2\frac{2t}{3} - \sin^2\frac{2t}{3}\right)dt =$$

$$= \lambda^2 \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{4}{9}\cdot\frac{1+\cos\frac{4t}{3}}{2} - \frac{1-\cos\frac{4t}{3}}{2}\right)dt = \lambda^2\frac{3\pi}{4}\left(\frac{4}{9} - 1\right) < 0 = J(\hat{x}).$$

Значит, $\hat{x} \notin \mathrm{locmin}$. Поскольку $J(x_\lambda) \to -\infty$ при $\lambda \to \infty$, то $S_{\mathrm{absmin}} = -\infty$.

Пример 2. $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$

$\hat{x} \equiv 0 \notin \mathrm{locmin},\ S_{\mathrm{absmin}} = -\infty.$

Возьмем $x_\lambda(t) = \lambda \sin \dfrac{4t}{3} \Rightarrow x_\lambda \in D(P)$,

$$J(x_\lambda) = \lambda^2 \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{4}{9}\cos^2\frac{2t}{3} - \sin^2\frac{2t}{3}\right)dt =$$

$$= \lambda^2 \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{16}{9} \cdot \frac{1+\cos\frac{4t}{3}}{2} - \frac{1-\cos\frac{4t}{3}}{2}\right)dt = \lambda^2 \frac{3\pi}{4}\left(\frac{16}{9} - 1\right) > 0 = J(\hat{x}).$$

Значит, $\hat{x} \notin \mathrm{locmax}$.

Поскольку $J(x_\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to \infty$, то $S_{\mathrm{absmax}} = +\infty$.

Ответ. Допустимая экстремаль $\hat{x} \equiv 0 \notin \mathrm{locextr}$; $S_{\mathrm{absmin}} = -\infty$; $S_{\mathrm{absmax}} = +\infty$.

Из этого примера видно, что уравнение Эйлера — необходимое, но не достаточное условие экстремума.