Определение (1)

A и B отделимы, если
$$\exists\ \lambda \in X^*,\ \ \lambda \neq 0 : \inf_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle \geq \sup_{b \in B} \langle \lambda, b \rangle.$$

Множества являются отделимыми, если можно провести гиперплоскость $H = \{x \in X \mid \langle \lambda, x \rangle = c\}$, $c \in \mathbb{R}$, так что одно из множеств лежит в одном замкнутом полупространстве $H_+ = \{x \in X \mid \langle \lambda, x \rangle \geq c\}$, а другое — в другом замкнутом полупространстве $H_- = \{x \in X \mid \langle \lambda, x \rangle \leq c\}$.

Определение (2)

A и B строго отделимы, если
$$\exists\ \lambda \in X^* : \inf_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle > \sup_{b \in B} \langle \lambda, b \rangle.$$

Теорема (отделимости множеств в $\mathbb{R}^n$)

A и B — непустые выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{int} A \cap B = \emptyset$ (в частности, $A \cap B = \emptyset$). Тогда множества A и B отделимы.

$\lhd$ Поскольку отделимость мн-в $\operatorname{int} A$ и B равносильна отделимости мн-в A и B, то, не ограничивая общности, считаем, что $A \cap B = \emptyset$. Обозначим
$C := A - B = \{a - b \mid a \in A,\ b \in B\}$ (разность по Минковскому множеств A и B). $A \cap B = \emptyset \Rightarrow 0 \notin C$.
Надо доказать, что $\exists\ \lambda \neq 0 : \inf_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle \geq \sup_{b \in B} \langle \lambda, b \rangle$
$\Leftrightarrow \inf_{c \in C} \langle \lambda, c \rangle \geq \langle \lambda, 0 \rangle = 0$, т. е., гиперплоскость $\langle \lambda, c \rangle = 0$ отделяет C от начала координат O.
1) $0 \notin \overline{C}$. Рассмотрим задачу $f(x) = |x| \to \inf;\ x \in \overline{C}$. $\quad (P)$
f — непрерывная функция, $f(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty \Rightarrow$ по следствию из т. Вейерштрасса $\exists\ \lambda \in \operatorname{absmin} P$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \overline{C}$.

$C := A - B$, $0 \notin C$. Надо доказать, что $\exists\, \lambda \neq 0 : \inf_{c \in C} \langle \lambda, c \rangle \geq 0$.
Покажем, что функционал λ искомый. Если $\inf_{c \in C} \langle \lambda, c \rangle < 0$, то $\exists\, c \in C : \langle \lambda, c \rangle < 0$, т. е., векторы λ и c образуют тупой угол $\Rightarrow$ основание H высоты OH треугольника $Oc\lambda$ лежит на отрезке $[c; \lambda]$ (и, в силу выпуклости $\overline{C}$, принадлежит $\overline{C}$), и $|OH| < |O\lambda|$, что противоречит выбору точки λ.
2) $0 \in \overline{C}$. Так как $0 \notin C$, то $0 \in \partial C \Rightarrow \exists$ последовательность $y_k \to 0$, $y_k \notin \overline{C} \Rightarrow$ по п. 1) $\exists\, \lambda_k \neq 0 : \inf_{c \in C} \langle \lambda_k, c \rangle \geq \langle \lambda_k, y_k \rangle$.
НеОО, считаем $|\lambda_k| = 1\ \forall\, k$. Сфера в $\mathbb{R}^n$ компактна $\Rightarrow$ можно перейти к подпоследовательности λ_k, сходящейся к некоторой точке λ, $|\lambda| = 1 \Rightarrow |\langle \lambda_k, y_k \rangle| \leq |\lambda_k| \cdot |y_k| = |y_k| \to 0$.
Следовательно,

$$\inf_{c \in C} \langle \lambda, c \rangle = \inf_{c \in C} \lim_{k \to \infty} \langle \lambda_k, c \rangle \geq \lim_{k \to \infty} \langle \lambda_k, y_k \rangle \to 0$$

$$\Rightarrow \inf_{c \in C} \langle \lambda, c \rangle \geq 0$$

$\Rightarrow \lambda$ – искомый функционал. $\triangleright$

Теорема (отделимости множеств в нормированном пространстве)

A и B — непустые выпуклые множества в X, $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, $\operatorname{int} A \cap B = \emptyset$. Тогда множества A и B отделимы.

В теореме отделимости в конечномерном пространстве $\operatorname{int} A$ может быть пуста. Напомним, что из определения выпуклого множества следует, что пустое множество является выпуклым. И вместо условия $\operatorname{int} A \cap B = \emptyset$ можно писать $A \cap B = \emptyset$. В теореме отделимости в бесконечномерном пространстве это не так. Надо требовать, чтобы $\operatorname{int} A \neq \emptyset$.

Пример двух непересекающихся выпуклых подмножеств, которые нельзя отделить.

Рассмотрим в бесконечномерном гильбертовом пространстве $l_2 = \left\{x = (x_1, x_2, \dots) \mid \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\right\}$ два множества с пустыми внутренностями: множество $A = \left\{a \in l_2 \mid \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = 1\right\}$ и точку $B = \{0\}$. Надо показать, что $\nexists\ \lambda \in l_2^*,\ \lambda \neq 0\ (l_2^* = l_2)$:

$$\inf_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle \geq \langle \lambda, b \rangle = 0. \qquad (*)$$

Возьмем произвольный функционал $\lambda \in l_2$, $\lambda \neq 0$. Покажем, что $\inf\limits_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle = -\infty$, тогда неравенство $(*)$ не будет выполняться. Поскольку $\lambda \neq 0$, то $\exists\ \lambda_i \neq \lambda_j$ (для определенности $\lambda_i < \lambda_j$). Возьмем точку $a : a_i = n$, $a_j = 1 - n$, $a_k = 0$ при $k \neq i, j \Rightarrow a \in A$ и
$\langle \lambda, a \rangle = \lambda_i a_i + \lambda_j a_j = \lambda_i n + \lambda_j (1 - n) = n(\lambda_i - \lambda_j) + \lambda_j \to -\infty$
при $n \to +\infty$. Значит, множества A и B нельзя отделить.

Теорема (о строгой отделимости точки от множества в нормированном пространстве)

A — непустое выпуклое замкнутое множество в X, $b \notin A$. Тогда точку b можно строго отделить от множества A.

$\lhd$ Поскольку $b \notin A$, где A — замкнутое множество, то $\exists\ \varepsilon > 0 : A \cap (b + \varepsilon U) = \emptyset$ ($U := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$). Следовательно, по теореме отделимости в нормированном пространстве ($A \cap \operatorname{int} B = \emptyset$, $\operatorname{int} B \neq \emptyset$) выпуклые множества A и $B = b + \varepsilon U$ можно отделить, т. е., $\exists\ \lambda \in X^*$, $\lambda \neq 0$:

$$\inf_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle \geq \sup_{x \in b + \varepsilon U} \langle \lambda, x \rangle = \sup_{u \in U} \langle \lambda, b + \varepsilon u \rangle = \langle \lambda, b \rangle + \varepsilon \sup_{u \in U} \langle \lambda, u \rangle =$$

$= \langle \lambda, b \rangle + \varepsilon \|\lambda\|_{X^*} \Rightarrow \inf\limits_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle > \langle \lambda, b \rangle$. Это и означает, что точку b можно строго отделить от множества A. $\rhd$

Теорема (о строгой отделимости компакта)

A и B — непустые выпуклые замкнутые подмножества нормированного пространства X, причем B — компакт и $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A$ и B строго отделимы.

$\lhd$ Обозначим $U := \{x \in X \mid \|x\|_X \le 1\}$. Покажем, что $\exists\ \varepsilon > 0 : A \cap (B + \varepsilon U) = \emptyset$. Иначе, $\exists$ последовательности $\{a_k\} \in A$, $\{b_k\} \in B : \|a_k - b_k\| \to 0$ при $k \to \infty$.
B — компакт $\Rightarrow \exists$ сходящаяся подпоследовательность (НеОО, пишем b_k) : $b_k \to b \in B \Rightarrow a_k \to b$ и $b \in A$ в силу замкнутости $A \Rightarrow b \in A \cap B$ — противоречие. Следовательно, по т-ме отделимости ($A \cap \operatorname{int} B' = \emptyset$, $\operatorname{int} B' \neq \emptyset$) множества A и $B' = B + \varepsilon U$ можно отделить, т. е., $\exists\ \lambda \in X^*$, $\lambda \neq 0$:

$$\inf_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle \ge \sup_{x \in B + \varepsilon U} \langle \lambda, x \rangle = \sup_{b \in B, u \in U} \langle \lambda, b + \varepsilon u \rangle = \sup_{b \in B} \langle \lambda, b \rangle + \varepsilon \sup_{u \in U} \langle \lambda, u \rangle =$$
$$= \sup_{b \in B} \langle \lambda, b \rangle + \varepsilon \|\lambda\|_{X^*} \Rightarrow \inf_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle > \sup_{b \in B} \langle \lambda, b \rangle.$$

Это и означает, что A и B строго отделимы. $\rhd$

Лемма (о замкнутости суммы (разности) замкнутого множества и компакта)

X — нормированное пространство, множества $A, B \subset X$, A — замкнуто, B — компакт $\Rightarrow$ алгебраическая сумма $C = A + B$ (разность $A - B$) замкнута.

$\triangleleft$ Пусть $c_k \in C$, $c_k \to c_0$. Требуется доказать, что $c_0 \in C$. По условию $c_k = a_k + b_k$, $a_k \in A$, $b_k \in B$. Так как B — компакт $\Rightarrow \exists$ сходящаяся подпоследовательность b_{k_m} : $b_{k_m} \to b_0 \in B$ $\Rightarrow a_{k_m} = c_{k_m} - b_{k_m} \to c_0 - b_0$ и $a_0 = c_0 - b_0 \in A$ в силу замкнутости A. Значит, $c_0 = a_0 + b_0$, $a_0 \in A$, $b_0 \in B$. $\triangleright$

Второе д-во т-мы о строгой отделимости компакта.

Теорема (о строгой отделимости компакта)

A и B — непустые выпуклые замкнутые подмножества нормированного пространства X, причем B — компакт и $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A$ и B строго отделимы.

$\triangleleft$ Обозначим $C := A - B \Rightarrow$ множество C замкнуто по лемме о замкнутости суммы (разности) замкнутого множества и компакта и $0 \notin C$. Следовательно, по т-ме о строгой отделимости точки от выпуклого замкнутого множества точку 0 можно строго отделить от множества C, т. е., $\exists\ \lambda \in X^*$:

$$\inf_{c \in C} \langle \lambda, c \rangle > 0 \Leftrightarrow \inf_{a \in A, b \in B} \langle \lambda, a - b \rangle > 0 \Leftrightarrow$$

$$\inf_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle - \sup_{b \in B} \langle \lambda, b \rangle > 0 \Leftrightarrow \inf_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle > \sup_{b \in B} \langle \lambda, b \rangle.$$

Это и означает, что A и B строго отделимы. $\triangleright$

Замечание

Требование компактности одного из множеств в теореме о строгой отделимости существенно.

◁ Действительно, непересекающиеся замкнутые множества ось x и множество точек над гиперболой $\frac{1}{x}$, $x > 0$, не пересекаются, но не являются строго отделимыми. ▷