Задачи оптимального управления

Потребности техники, экономики стимулировали решение нового класса экстремальных задач оптимального управления. Необходимое условие экстремума для таких задач — "Принцип максимума", — сформулированное Понтрягиным в 1956 г., было доказано и развито впоследствии им, его учениками и сотрудниками. В качестве обязательного условия в решении задачи оптимального управления входит решение вспомогательной задачи на максимум (отсюда и название — "принцип максимума").
В отличие от задачи Лагранжа в задаче оптимального управления вводится управление u и появляется дополнительное ограничение типа включения на управление: $u \in U$. Множество U определяет возможности человека влиять на происходящий процесс.

$B_0(\xi) \to \min;\ B_i(\xi) \le 0,\ i = 1, \dots, m',\ B_i(\xi) = 0,\ i = m'+1, \dots, m,\ (P)$

$\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0\ \forall\ t \in T, \quad (1) \quad u(t) \in U\ \forall\ t \in \Delta, \quad (2)$

$\xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$, $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)) \in PC^1(\Delta, \mathbb{R}^n)$ — фазовая переменная, $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_r(\cdot)) \in PC(\Delta, \mathbb{R}^r)$ — управление, Δ — заданный конечный отрезок, $t_0, t_1 \in \Delta$, $t_0 < t_1$, $U \subset \mathbb{R}^r$ — произвольное множество.

(PC) Кусочно-непрерывная функция имеет не более конечного числа разрывов первого рода (в точках разрывов существуют конечные пределы слева и справа).

(PC^1) Кусочно-дифференцируемая функция — непрерывная, а производная является кусочно-непрерывной функцией.

$B_0(\xi)\to\min;\ B_i(\xi)\le 0,\ i=1,\dots,m',\ B_i(\xi)=0,\ i=m'+1,\dots,m,\ (P)$

$\dot x(t)-\varphi(t,x(t),u(t))=0\ \forall\ t\in T,\quad (1)\ \ u(t)\in U\ \forall\ t\in\Delta,\quad (2)$

$\xi=(x(\cdot),u(\cdot),t_0,t_1),\ x(\cdot)=(x_1(\cdot),\dots,x_n(\cdot))\in PC^1(\Delta,\mathbb{R}^n)$ — фазовая переменная, $u(\cdot)=(u_1(\cdot),\dots,u_r(\cdot))\in PC(\Delta,\mathbb{R}^r)$ — управление, Δ — заданный конечный отрезок, $t_0,t_1\in\Delta$, $t_0<t_1$, $U\subset\mathbb{R}^r$ — произвольное множество.

$T\subset\Delta$ — множество точек непрерывности функции u,

$$B_i(\xi)=\int\limits_{t_0}^{t_1} f_i(t,x(t),u(t))\,dt+l_i(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)),\ i=0,1,\dots,m.$$

Допустимый элемент (допустимый управляемый процесс), $D(P)$. Дифференциальная связь.

Ограничение типа включения.

Частным случаем задачи (P) является задача, в которой один из концов t_0 или t_1 — подвижный, а другой закреплен или оба конца отрезка интегрирования $[t_0, t_1]$ фиксированы.

Определение

Допустимый управляемый процесс $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ доставляет сильный локальный минимум (является оптимальным процессом) ($\hat{\xi} \in \mathrm{strlocmin}\, P$), если $\exists\ \delta > 0$: $B_0(\xi) \geq B_0(\hat{\xi})\ \forall\ \xi = (x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) \in D(P)$: $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C(\Delta)} < \delta$, $|t_0 - \hat{t}_0| < \delta$, $|t_1 - \hat{t}_1| < \delta$.

Теорема (принцип максимума Понтрягина)

$\hat\xi = (\hat x(\cdot), \hat u(\cdot), \hat t_0, \hat t_1) \in \mathrm{strlocmin}\, P$; $f_i, f_{ix}, \varphi, \varphi_x \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat x}) \times U)$, $l_i \in C^1(\hat t_0, \hat x(\hat t_0), \hat t_1, \hat x(\hat t_1))$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Тогда
$\exists\ (\lambda, p) \in \mathbb{R}^{m+1} \times PC^1(\Delta, \mathbb{R}^n)$, $\lambda \neq 0$:
для функции Лагранжа $\mathscr{L}(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1) =$

$$\int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\Big(\overbrace{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t,x,u)}^{f} + p(t)(\dot x - \varphi(t,x,u))\Big)}_{L(t,x,\dot x,u)} dt + \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i l_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))}_{l},$$

выполнены условия:

a) стационарности по x — уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\hat L_{\dot x}(t) + \hat L_x(t) = 0\ \forall\ t \in T \Leftrightarrow -\dot p + \hat f_x - p\hat\varphi_x = 0;$$

Теорема (принцип максимума Понтрягина)

b) трансверсальности по x:

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)} \Leftrightarrow p(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)},$$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \Leftrightarrow p(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)};$$

c) оптимальность по u:

$$\min_{u\in U} L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \hat{u}(t)) \quad \forall\ t \in T$$

$$\Big(\Leftrightarrow \min_{u\in U} \{f(t, \hat{x}(t), u) - p(t)\varphi(t, \hat{x}(t), u)\} = \hat{f}(t) - p(t)\hat{\varphi}(t)\Big);$$

d) стационарности по подвижным концам:

$$\hat{\mathscr{L}}_{t_0} = 0 \Leftrightarrow -\hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_0) = 0,$$

$$\hat{\mathscr{L}}_{t_1} = 0 \Leftrightarrow \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_1) = 0;$$

e) дополняющей нежесткости: $\lambda_i B_i(\hat{\xi}) = 0,\ i = 1, \ldots, m'$;

f) неотрицательности: $\lambda_i \geq 0,\ i = 0, 1, \ldots, m'$.

Покажем, что утверждение теоремы является реализацией принципа Лагранжа. По нему надо рассмотреть задачи о минимуме функции Лагранжа $\mathscr{L}(x(\cdot), u(\cdot), t_0, t_1)$, в которых фиксированы все аргументы, кроме одного:

$$\mathscr{L}(x(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) \to \min; \qquad (i)$$

$$\mathscr{L}(\hat{x}(\cdot), u(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) \to \min; \qquad (ii)$$

$$\mathscr{L}(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot), t_0, t_1) \to \min. \qquad (iii)$$

(i) — задача Больца, необходимые условия экстремума — уравнение Эйлера и условия трансверсальности.
(ii) — элементарная задача оптимального управления. Минимум интеграла достигается, если подынтегральная функция минимальна по выбору возможных управлений.
(iii) — задача нахождения минимума функции двух переменных, необходимые условия экстремума — теорема Ферма — равенство нулю частных производных по t_0 и t_1.

1.3 Пример. $\int\limits_0^4 (\dot{x}^2 + x)\,dt \to \mathrm{extr};\ |\dot{x}| \le 1,\ x(0) = 0.$

Приведем задачу к виду задач оптимального управления, введя управление u:

$$\int\limits_0^4 (u^2 + x)\,dt \to \mathrm{extr};\ \dot{x} = u,\ u \in [-1, 1],\ x(0) = 0.$$

Функция Лагранжа $\mathscr{L} = \int\limits_0^4 \Big(\underbrace{\lambda_0(u^2+x) + p(\dot{x}-u)}_{L}\Big)\,dt + \underbrace{\lambda_1 x(0)}_{l}.$

Необходимые условия: a) уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Leftrightarrow -\dot{p} + \lambda_0 = 0;$$

b) трансверсальность по x:

$L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)},\ L_{\dot{x}}(4) = -l_{x(4)} \Leftrightarrow p(0) = \lambda_1,\ p(4) = 0;$

c) оптимальность по u: $\min\limits_{u\in[-1,1]} \{\lambda_0 u^2 - pu\} = \lambda_0 \hat{u}^2 - p\hat{u};$

d) неотрицательность: $\lambda_0 \ge 0$ в задаче на минимум,

$\lambda_0 \le 0$ в задаче на максимум.

$a)\ \dot{p} = \lambda_0;$

$b)\ p(0) = \lambda_1,\ p(4) = 0;$

$c)\ \min_{u\in[-1,1]}\{\lambda_0 u^2 - pu\} = \lambda_0\hat{u}^2 - p\hat{u};$

$d)\ \lambda_0 \geq 0$ в задаче на min, $\lambda_0 \leq 0$ в задаче на max.

$\lambda_0 = 0 \stackrel{a}{\Rightarrow} \dot{p} = 0 \Rightarrow p = \text{const} \stackrel{b)\,p(4)=0}{\Rightarrow} p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.$

В задаче на min положим $\lambda_0 = 1 \stackrel{a}{\Rightarrow} \dot{p} = 1 \stackrel{b)\,p(4)=0}{\Rightarrow} p = t - 4 \Rightarrow$

$c)\ \min_{u\in[-1,1]}\{u^2 - pu\} = \hat{u}^2 - p\hat{u}.$

Из c) следует, что минимум параболы с ветвями вверх $f(u) = u^2 - pu$ на отрезке $[-1, 1]$ достигается либо в вершине, либо на одном из его концов. Поскольку $f'(u) = 0 \Leftrightarrow 2u = p \Leftrightarrow u = \frac{p}{2}$, то минимум достигается в вершине $\hat{u} = \frac{p}{2}$ при $\left|\frac{p}{2}\right| \leq 1$. Если же $\left|\frac{p}{2}\right| > 1$, то минимум достигается на одном из концов отрезка $[-1, 1]$, а именно, на котором знаки $\hat{u}$ и p совпадают. Значит,

$$\hat{u} = \begin{cases} -1, & \frac{p}{2} \le -1, \\ \frac{p}{2}, & -1 \le \frac{p}{2} \le 1, \\ 1, & 1 \le \frac{p}{2}, \end{cases} \overset{p=t-4}{=} \begin{cases} -1, & \frac{t-4}{2} \le -1, \\ \frac{t-4}{2}, & -1 \le \frac{t-4}{2} \le 1, \\ 1, & 1 \le \frac{t-4}{2}, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -1, & t-4 \le -2, \\ \frac{t-4}{2}, & -2 \le t-4 \le 2, \\ 1, & 2 \le t-4, \end{cases} = \begin{cases} -1, & t \le 2, \\ \frac{t-4}{2}, & 2 \le t \le 6, \\ 1, & 6 \le t. \end{cases}$$

Следовательно, на отрезке $0 \le t \le 4$

$$\dot{\hat{x}} = \hat{u} = \begin{cases} -1, & 0 \le t < 2, \\ \frac{t}{2} - 2, & 2 \le t \le 4, \end{cases} \Leftrightarrow \hat{x} = \begin{cases} -t + C_1, & 0 \le t \le 2, \\ \frac{t^2}{4} - 2t + C_2, & 2 \le t \le 4. \end{cases}$$

Из начального условия $x(0) = 0$ выводим, что $C_1 = 0$, а из условия непрерывности в точке $t = 2$ имеем $-2 = 1 - 4 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = 1$. Таким образом,

$$\hat{x} = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le 2, \\ \frac{t^2}{4} - 2t + 1, & 2 \le t \le 4. \end{cases}$$

Докажем, что $\hat{x} = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le 2, \\ \frac{t^2}{4} - 2t + 1, & 2 \le t \le 4, \end{cases} \in \mathrm{absmin}.$

Возьмем $x \in D(P)$, обозначим $h := x - \hat{x} \Rightarrow h \in PC^1[0,4]$, $|\dot{x}| = |\dot{\hat{x}} + \dot{h}| \le 1$, $h(0) = 0$. Тогда $x = \hat{x} + h$ и

$$B(x) - B(\hat{x}) = \int_0^4 \big((\dot{\hat{x}} + \dot{h})^2 + \hat{x} + h\big)\,dt - \int_0^4 (\dot{\hat{x}}^2 + \hat{x})\,dt =$$

$$= 2\int_0^4 \dot{\hat{x}}\dot{h}\,dt + \int_0^4 \dot{h}^2\,dt + \int_0^4 h\,dt \ge 2\int_0^4 \dot{\hat{x}}\,dh + \int_0^4 h\,dt =$$

$$= 2\dot{\hat{x}}h\Big|_0^4 + \int_0^4 (-2\ddot{\hat{x}} + 1)h\,dt \overset{\dot{\hat{x}}(4)=0,\,h(0)=0}{=} \int_0^4 (-2\ddot{\hat{x}} + 1)h\,dt =$$

$$= \int_0^2 (-2\ddot{\hat{x}} + 1)h\,dt + \int_2^4 (-2\ddot{\hat{x}} + 1)h\,dt = \int_0^2 h\,dt \overset{?}{\ge} 0.$$

Ибо на $[2,4]$ $\ddot{\hat{x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow -2\ddot{\hat{x}} + 1 = 0$. На $[0,2]$:
$|\dot{\hat{x}} + \dot{h}| \le 1 \Leftrightarrow |-1 + \dot{h}| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -1 + \dot{h} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \dot{h} \le 2.$
Значит, $h\uparrow$ и, поскольку $h(0) = 0$, то $h(t) \ge 0$ при $t \in [0,2]$.

$$S_{\mathrm{absmin}} = B(\hat{x}) = \int\limits_0^4 (\dot{\hat{x}}^2 + \hat{x})\,dt =$$

$$= \int\limits_0^2 (1 - t)\,dt + \int\limits_2^4 \left(\left(\frac{t}{2} - 2\right)^2 + \frac{t^2}{4} - 2t + 1\right) dt = -4\frac{2}{3}.$$

В задаче на max положим $\lambda_0 = -1 \overset{a}{\Rightarrow} \dot{p} = -1 \overset{b}{\Rightarrow} p = 4 - t$. Условие c) перепишется в виде:

$$\min_{u \in [-1,1]} \{-u^2 - pu\} = -\hat{u}^2 - p\hat{u}.$$

Минимум параболы с ветвями вниз достигается всегда на одном из концов отрезка. В нашей задаче минимум достигается там, где знаки $\hat{u}$ и p совпадают. Значит,

$$\hat{u} = \dot{\hat{x}} = \mathrm{sign}\, p = \mathrm{sign}(4 - t) = 1 \text{ при } 0 \le t < 4.$$

Интегрируя, получаем $x = t + C \overset{x(0)=0}{\Rightarrow} \hat{x} = t$.

Докажем, что $\hat{x} = t \in \operatorname{absmax}$. Возьмем $x \in D(P)$, обозначим $h := x - \hat{x} \Rightarrow h \in PC^1[0,4]$, $h(0) = 0$, $|\dot{\hat{x}} + \dot{h}| \le 1$ $(\Leftrightarrow |1 + \dot{h}| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le 1 + \dot{h} \le 1 \Leftrightarrow -2 \le \dot{h} \le 0)$.

Как и при проверке экстремали на минимум имеем

$$B(x) - B(\hat{x}) = \int\limits_0^4 (2\dot{\hat{x}}\dot{h} + h)\,dt + \int\limits_0^4 \dot{h}^2\,dt =$$

$$= \int\limits_0^4 (2\dot{h} + h)\,dt + \int\limits_0^4 \dot{h}^2\,dt = \int\limits_0^4 (2 + \dot{h})\dot{h}\,dt + \int\limits_0^4 h\,dt \overset{?}{\le} 0.$$

Ибо оба интеграла неположительны, поскольку в первом интеграле $2 + \dot{h} \ge 0$, а $\dot{h} \le 0$, а во втором интеграле $h \le 0$, так как $\dot{h} \le 0$ (т. е. $h \downarrow$), а $h(0) = 0$. При этом

$$S_{\text{absmax}} = B(\hat{x}) = \int\limits_0^4 (\dot{\hat{x}}^2 + \hat{x})\,dt = \int\limits_0^4 (1 + t)\,dt = \left(t + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^4 = 12.$$

1.3 Пример. $\int\limits_0^4 (\dot{x}^2 + x)\, dt \to \text{extr}; \ |\dot{x}| \le 1, \ x(0) = 0.$

То, что $\hat{x} = t \in \text{absmax}$ можно было бы получить и без непосредственной проверки из условия самой задачи.
Разобьем исходный функционал на два интеграла.
Максимум $\int\limits_0^4 \dot{x}^2\, dt$ при $|\dot{x}| \le 1$ достигается на $|\dot{x}| = 1$,
а максимум $\int\limits_0^4 x\, dt$ при $|\dot{x}| \le 1$, $x(0) = 0$, достигается при наибольшем возрастании функции x, т. е. при $\dot{x} = 1$ ($\Leftrightarrow \hat{x} = t$).

Ответ. $\begin{cases} -t, & 0 \le t \le 2, \\ \dfrac{t^2}{4} - 2t + 1, & 2 \le t \le 4, \end{cases} \in \text{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = -4\dfrac{2}{3}$;
$t \in \text{absmax}$, $S_{\text{absmax}} = 12$.