3 Задача с подвижными концами

3.1 Постановка задачи

Задачей с подвижными концами называется следующая экстремальная задача в пространстве $C^1(\Delta) \times \mathbb{R}^2$:

$$J(\xi) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x})\, dt + l_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \text{extr}; \tag{P}$$

$$l_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \ i = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

где $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$, Δ — заданный конечный отрезок, $t_0, t_1 \in \Delta$, $t_0 < t_1$. Здесь t_0, t_1 — концы отрезка интегрирования являются подвижными и поэтому значение как интегральной так и терминальной частей функционала зависят от величин t_0, t_1.

Частным случаем является задача, в которой один из концов или даже оба закреплены.

Элемент $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$ называется *допустимым*, если $x \in C^1(\Delta)$, $t_0, t_1 \in \Delta$, $t_0 < t_1$, и выполняются условия (1) на концах.

Определение. Говорим, что допустимый элемент $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1))$ доставляет *слабый локальный минимум* в задаче (P), и пишем $\hat{\xi} \in \operatorname{wlocmin} P$, если существует $\delta > 0$ такое, что $J(\xi) \geq J(\hat{\xi})$ для любого допустимого элемента $\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$, для которого $\|x(\cdot) – \hat{x}(\cdot)\|_{C^1(\Delta)} < \delta$, $|t_0 - \hat{t}_0| < \delta$, $|t_1 - \hat{t}_1| < \delta$.

3.2 Необходимые условия экстремума

Теорема. *Пусть элемент* $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ *доставляет слабый локальный экстремум в задаче* (P) ($\hat{\xi} \in wlocextr\, P$), *функции* $L, L_x, L_{\dot{x}}$ — *непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика* $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}} := \{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \mid t \in \Delta\}$ ($L, L_x, L_{\dot{x}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}))$), *функции* l_i — *непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))$ ($l_i \in C^1(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))$), $i = 0, 1, \ldots, m$. *Тогда существует ненулевой вектор множителей Лагранжа* $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\lambda \neq 0$, *такой, что для функции Лагранжа*

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(x(\cdot), t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \lambda_0 f(t, x, \dot{x})\, dt + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i l_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$$

выполнены условия:

a) *стационарности по* x — *уравнение Эйлера для интегранта* $L = \lambda_0 f(t, x, \dot{x})$

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\, t \in \Delta \iff -\frac{d}{dt}\lambda_0 \hat{f}_{\dot{x}}(t) + \lambda_0 \hat{f}_x(t) = 0;$$

b) *трансверсальности по* x *для терминанта* $l = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i l_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)} \iff \lambda_0 \hat{f}_{\dot{x}}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)},$$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \iff \lambda_0 \hat{f}_{\dot{x}}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)};$$

c) *стационарности по подвижным концам* (выписывается только для подвижных концов отрезка интегрирования):

$$\hat{\mathscr{L}}_{t_0} = 0 \iff -\lambda_0 \hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_0) = 0,$$

$$\hat{\mathscr{L}}_{t_1} = 0 \iff \lambda_0 \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_1) = 0.$$

Необходимые условия экстремума в задаче со подвижными концами непосредственно будут вытекать из необходимых условий экстремума в задаче Лагранжа п. 6.2.

3.3 Пример.

$$J(x(\cdot), T) = \int\limits_0^T (\dot{x}^2 - x + 1)\, dt \to \mathrm{extr};\ x(0) = 0.$$

Решение. Функция Лагранжа

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(x(\cdot), T) = \int\limits_0^T \lambda_0(\dot{x}^2 - x + 1)\, dt + \lambda_1 x(0).$$

Необходимые условия экстремума:

a) уравнение Эйлера для интегранта $L = \lambda_0(\dot{x}^2 - x + 1)$

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \iff -\frac{d}{dt}2\lambda_0\dot{x} - \lambda_0 = 0 \iff -2\lambda_0\ddot{x} - \lambda_0 = 0;$$

b) трансверсальность по x для терминанта $l = \lambda_1 x(0)$

$$\begin{cases} L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)}, \\ \mathscr{L}_{\dot{x}}(T) = -l_{x(T)}, \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda_0\dot{x}(0) = \lambda_1, \\ 2\lambda_0\dot{x}(T) = 0; \end{cases}$$

c) стационарность по T (выписываем только для подвижного конца отрезка интегрирования)

$$\mathscr{L}_T = 0 \iff \lambda_0(\dot{x}^2(T) - x(T) + 1) = 0.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из *b*) следует, что $\lambda_1 = 0$ — все множители Лагранжа оказались нулями. Этого не может быть. Значит, $\lambda_0 \neq 0$. Положим $\lambda_0 = 1$. Тогда условия *a*)–*c*) преобразуются к виду

$$-2\ddot{x} - 1 = 0,\ \dot{x}(T) = 0,\ x(T) = 1.$$

Из первого уравнения следует, что $\dot{x} = -\dfrac{t}{2} + C_1$, $x = -\dfrac{t^2}{4} + C_1 t + C_2$. Поскольку $x(0) = 0$, то $C_2 = 0$. Неизвестные C_1, T определяются из условий

$$\begin{cases} \dot{x}(T) = 0, \\ x(T) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{T}{2} + C_1 = 0, \\ -\dfrac{T^2}{4} + C_1 T = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $\hat{T} = 2$, $C_1 = 1$.

Таким образом, в задаче имеется единственный допустимый экстремальный элемент $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{T}) = \Big(-\dfrac{t^2}{4} + t, 2\Big)$.

Покажем, что $\hat{\xi}$ не доставляет локального экстремума, т. е. что в любой его окрестности существует другой допустимый элемент, на котором значение функционала J в точке ξ как больше, так и меньше значения функционала J в точке $\hat{\xi}$. Действительно, возьмем допустимый элемент $\xi = (x(\cdot), T) = \Big(-\dfrac{t^2}{4} + t,\ T\Big)$. Тогда

$$J(\xi) = \int\limits_0^T \Big(\Big(-\frac{t}{2}+1\Big)^2 - \Big(-\frac{t^2}{4}+t\Big) + 1\Big)\,dt = \int\limits_0^T \Big(\frac{t^2}{2} - t + 2\Big)dt =$$

$$= 2\int\limits_0^T \Big(\frac{t}{2}-1\Big)^2 dt > J(\hat{\xi}) = 2\int\limits_0^2 \Big(\frac{t}{2}-1\Big)^2 dt$$

при $T > \hat{T}$ и $J(\xi) < J(\hat{\xi})$ при $T < \hat{T}$, поскольку под знаком интеграла стоит неотрицательная функция.

Покажем, что $S_{\text{absmin}} = -\infty$. Действительно, возьмем последовательность допустимых элементов $\xi_n = (x_n(\cdot), T_n) = (t, n)$. Тогда

$$J(x_n(\cdot), T) = \int\limits_0^T (\dot{x}_n^2 - x_n + 1)\,dt = \int\limits_0^n (2-t)\ dt \to -\infty \quad \text{при } n \to +\infty.$$

Если вместо исходной задачи с подвижным правым концом T рассмотреть задачу с фиксированным концом $T = T_0$, то нетрудно вывести, что функция, доставляющая абсолютный минимум в новой задаче, существует (ее легко найти, решая задачу с фиксированным T_0) и абсолютный минимум в задаче будет конечным для каждого фиксированного T_0. При этом значение абсолютного минимума будет стремиться к $-\infty$ при $T_0 \to +\infty$.

Покажем, что $S_{\text{absmax}} = +\infty$. Действительно, возьмем последовательность допустимых элементов $\xi_n = (x_n(\cdot), T_n) = (nt, 1)$. Тогда

$$J(x_n(\cdot), T) = \int\limits_0^T (\dot{x}_n^2 - x_n + 1)\,dt = \int\limits_0^1 (n^2 - nt + 1)\,dt \to +\infty \quad \text{при } n \to +\infty.$$

Ответ. Допустимая экстремальная пара $(\hat{x}(\cdot), \hat{T}) = \Big(-\dfrac{t^2}{4} + t, 2\Big) \notin$ wlocextr, $S_{\text{absmin}} = -\infty$, $S_{\text{absmax}} = +\infty$.