4.7 Сопряженный конус

4.7.1 Определение сопряженного конуса

Для наглядности представления будем рассматривать пространство $\mathbb{R}^n$.

Определение. *K — конус в $\mathbb{R}^n$. Сопряженным конусом называется множество $K^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \inf\limits_{x \in K} \langle y, x \rangle \geq 0\}$ или, что то же самое, множество $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq 0 \ \forall \ x \in K\}$.*

Нетрудно видеть, что поскольку для конуса K точка $0 \in K$, то $\inf\limits_{x \in K} \langle y, x \rangle = -\infty$ или 0.

Замечание. *Для конусов условия $\inf\limits_{x \in K} \langle y, x \rangle \geq 0$ и $\inf\limits_{x \in K} \langle y, x \rangle \geq c$, где $c \leq 0$, равносильны тому, что $\langle y, x \rangle$ не принимает отрицательных значений.*

Доказательство. Действительно, если $\langle y, x \rangle < 0$ при некотором $x \in K$, то $\lambda x \in K$ для любого $\lambda > 0$, а $\langle y, x \rangle$ будет принимать любые отрицательные значения. Тогда оба неравенства $\langle y, x \rangle \geq 0$ и $\langle y, x \rangle \geq c$ не будут выполняться. $\square$

Замечание. *Для конусов условия $\langle y, x \rangle \geq 0$ для любого $x \in K$ и $\langle y, x \rangle \geq c$ для любого $x \in K$, где $c \leq 0$, равносильны тому, что $\langle y, x \rangle$ не принимает отрицательных значений.*

Доказательство. Действительно, если $\langle y, x \rangle < 0$ при некотором $x \in K$, то $\lambda x \in K$ для любого $\lambda > 0$, а $\langle y, x \rangle$ будет принимать любые отрицательные значения. Тогда оба неравенства $\langle y, x \rangle \geq 0$ и $\langle y, x \rangle \geq c$ не будут выполняться. $\square$

Лемма 1. *Сопряженный конус совпадает с минус полярой: $K^* = -K^\circ$.*

Доказательство. Имеем $y \in K^* \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \geq 0$ для любого $x \in K$. Согласно замечанию это неравенство эквивалентно неравенству $\langle y, x \rangle \geq -1 \ \forall \ x \in K \Leftrightarrow \langle -y, x \rangle \leq 1 \ \forall \ x \in K \Leftrightarrow -y \in K^\circ$ $\Leftrightarrow y \in -K^\circ$. $\square$

Из леммы можно выводить свойства сопряженного конуса.

4.7.2 Примеры сопряженных конусов

- L — *линейное подпространство* $\Rightarrow L^* = L^\perp$.

$\lhd$ Условие $y \in L^* \Leftrightarrow$ означает, что выполняется неравенство

$$\langle y, x\rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in L. \tag{$*$}$$

Поскольку линейное подпространство L вместе с вектором x содержит и вектор $-x$, то неравенство $(*)$ выполняется в виде равенства

$$\langle y, x\rangle = 0 \quad \forall\, x \in L.$$

Это означает, что вектор $x \in L^\perp$. $\rhd$

- $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \leq 0\} \Rightarrow K^* = \{-\lambda a \mid \lambda \geq 0\}$.

$\lhd$ Ранее в примере для множества $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \leq 0\}$ вычислили $K^\circ = \{\lambda a \mid \lambda \geq 0\}$. Поэтому $K^* = -K^\circ = -\{\lambda a \mid \lambda \geq 0\} = \{-\lambda a \mid \lambda \geq 0\}$. $\rhd$

4.7.3 Теорема о втором сопряженном конусе

Теорема (о втором сопряженном конусе)**.** *K — выпуклый замкнутый конус тогда и только тогда, когда $K = K^{**}$.*

Доказательство. Следует из теоремы о биполяре. Условие $0 \in K$ выполняется по определению конуса. $\square$

Следствие (1)**.** *Пусть K — выпуклый замкнутый конус. Тогда K является сопряженным к некоторому выпуклому замкнутому конусу B ($K = B^*$).*

Доказательство. По теореме о втором сопряженном конусе $K = K^{**} = (K^*)^* = B^*$, где $B := K^*$. $\square$

Следствие (2)**.** *Пусть K — произвольный конус. Тогда $K^{**} = \overline{\operatorname{conv} K}$.*

Доказательство. В силу свойства 5 $K^* = (\,\overline{\operatorname{conv} K}\,)^*$ имеем

$$K^{**} = (K^*)^* \overset{5}{=} \left((\,\overline{\operatorname{conv} K}\,)^*\right)^* = \overline{\operatorname{conv} K}.$$

Последнее равенство выполняется по т. о втором сопряженном конусе для конуса $\overline{\operatorname{conv} K}$. $\square$

4.7.4 Свойства сопряженного конуса

1. *Сопряженный конус является выпуклым замкнутым конусом.*

2. $K_1 \supset K_2 \Rightarrow K_1^* \subset K_2^*$.

$\lhd$ Включение $K_1^* \subset K_2^*$ следует из неравенства

$$\inf_{x \in K_2} \langle y, x \rangle \overset{K_2 \subset K_1}{\geq} \inf_{x \in K_1} \langle y, x \rangle. \qquad \rhd$$

3. $(\,\overline{K}\,)^* = K^*$.

$\lhd$ $(\,\overline{K}\,)^* = -(\,\overline{K}\,)^\circ = -K^\circ = K^*$. $\rhd$

4. $(\operatorname{conv} K)^* = K^*$.

$\lhd$ $(\operatorname{conv} K)^* = -(\operatorname{conv} K)^\circ = -(K)^\circ = K^*$. $\rhd$

Из свойств 3-4 следует, что

5. $(\,\overline{\operatorname{conv} K}\,)^* \overset{3}{=} (\operatorname{conv} K)^* \overset{4}{=} K^*$.

6. K_1, K_2 — *произвольные конусы* $\Rightarrow (K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$.

$\lhd$ Возьмем точки $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2$. Поскольку $\langle y, x_1 + x_2 \rangle = \langle y, x_1 \rangle + \langle y, x_2 \rangle$, то

$$\inf_{\substack{x_1 \in K_1 \\ x_2 \in K_2}} \langle y, x_1 + x_2 \rangle = \inf_{\substack{x_1 \in K_1 \\ x_2 \in K_2}} (\langle y, x_1 \rangle + \langle y, x_2 \rangle) = \inf_{x_1 \in K_1} \langle y, x_1 \rangle + \inf_{x_2 \in K_2} \langle y, x_2 \rangle.$$

Отсюда, поскольку для конуса K $\inf\limits_{x \in K} \langle y, x \rangle = -\infty$ или 0, то

$$\inf_{\substack{x_1 \in K_1 \\ x_2 \in K_2}} \langle y, x_1 + x_2 \rangle \geq 0 \iff \begin{cases} \inf\limits_{x_1 \in K_1} \langle y, x_1 \rangle \geq 0, \\ \inf\limits_{x_2 \in K_2} \langle y, x_2 \rangle \geq 0. \end{cases}$$

Это и означает, выполнение доказываемой формулы.

7. K_1, K_2 — *произвольные конусы* $\Rightarrow (K_1 \cap K_2)^* \supset K_1^* + K_2^*$.

$\lhd$ Пусть функционал $y \in K_1^* + K_2^*$. Тогда $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in K_1^*$, $y_2 \in K_2^*$. Поскольку функционал $y_1 \in K_1^*$, то $\langle y_1, x \rangle \geq 0$ для любых точек $x \in K_1$ (в том числе и для $x \in K_1 \cap K_2$); аналогично, поскольку функционал $y_2 \in K_2^*$, то $\langle y_2, x \rangle \geq 0$ для любых точек $x \in K_2$ (в том числе и для $x \in K_1 \cap K_2$). Значит, $\langle y_1 + y_2, x \rangle \geq 0$ для любых точек $x \in K_1 \cap K_2$. Это и означает, что функционал $y \in (K_1 \cap K_2)^*$. $\rhd$

8. K_1, K_2 — *выпуклые замкнутые конусы* $\Rightarrow$ $(K_1 \cap K_2)^* = \overline{K_1^* + K_2^*}$.

$\lhd$ По теореме о втором сопряженном конусе $K_1 = K_1^{**}$, $K_2 = K_2^{**}$. Следовательно,

$$(K_1 \cap K_2)^* = (K_1^{**} \cap K_2^{**})^* = \big((K_1^*)^* \cap (K_2^*)^*\big)^* \overset{6}{=}$$

(в силу свойства 6: $A^* \cap B^* = (A + B)^*$ для конусов $A = K_1^*$ и $B = K_2^*$ и следствия 2: $K^{**} = \overline{\operatorname{conv} K}$ для конуса $K = K_1^* + K_2^*$)

$$= \big((K_1^* + K_2^*)^*\big)^* = (K_1^* + K_2^*)^{**} \overset{\text{сл. } 2}{=} \overline{\operatorname{conv}(K_1^* + K_2^*)} = \overline{K_1^* + K_2^*},$$

так как сумма выпуклых множеств K_1^*, K_2^* есть выпуклое множество. $\rhd$

Отметим, что убрать замыкание в последней формуле нельзя. Согласно теореме о втором сопряженном конусе формула 8 может быть переписана в виде: $8'$. $(K_1^* \cap K_2^*)^* = \overline{K_1 + K_2}$.

Пример. Два выпуклых замкнутых конуса, сумма которых есть незамкнутый конус.

$\lhd$ Пусть $K_1 = \operatorname{conev} \big\{ \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + (x_3 - 1)^2 \le 1, x_2 = 1\} \cup 0 \big\}$ — выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^3$, образованный кругом и точкой 0; K_2 — ось x_2 — выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^3$. Тогда $K_1 + K_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$ — открытое полупространство, объединенное с осью x_2 — незамкнутый конус. $\rhd$

Слева в формуле $8'$ стоит сопряженный конус — замкнутое множество, поэтому без замыкания множества $K_1 + K_2$ формула неверна.

4.7.5 Теорема Дубовицкого-Милютина о непересечении конусов

Из определения отделимости множеств следует, что если два непустых выпуклых конуса K_1 и K_2 отделимы, то существуют линейно непрерывный функционал $\lambda \in X^*$, $\lambda \neq 0$ такой, что

$$\inf_{a \in K_1} \langle \lambda, a \rangle \geq \sup_{b \in K_2} \langle \lambda, b \rangle.$$

Поскольку $0 \in K_1 \cap K_2$, то $\inf\limits_{a \in K_1} \langle \lambda, a \rangle \geq 0 \geq \sup\limits_{b \in K_2} \langle \lambda, b \rangle$. Это означает, что разделяющая гиперплоскость обязательно проходит через ноль.

Лемма. *X — нормированное пространство, $A \subset X$, $\lambda \neq 0$ — линейный функционал на X такой, что $\inf\limits_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle \geq c$. Тогда $\langle \lambda, a \rangle > c$ для любой точки $a \in \operatorname{int} A$.*

Иными словами, ненулевой линейный функционал не может достигать минимума (аналогично максимума) во внутренней точке множества.

Доказательство. Предположим, что существует точка $a_0 \in \operatorname{int} A$, для которой $\langle \lambda, a_0 \rangle = c$. Возьмем любой вектор $v \in X$ такой, что $\langle \lambda, v \rangle < 0$. Такой вектор существует, ибо $\lambda \neq 0$. Тогда при малом $\varepsilon > 0$ точка $a_0 + \varepsilon v \in A$, и $\langle \lambda, a_0 + \varepsilon v \rangle = \langle \lambda, a_0 \rangle + \varepsilon \langle \lambda, v \rangle = c + \varepsilon \langle \lambda, v \rangle < c$ — противоречие. $\square$

Теорема (Дубовицкого-Милютина о непересечении конусов). *Пусть $K_0, K_1, \ldots, K_m$ — непустые выпуклые конусы, причем множества $K_1 \setminus \{0\}, \ldots, K_m \setminus \{0\}$ открыты. Тогда $K_0 \cap K_1 \cap \ldots \cap K_m = 0$ тогда и только тогда, когда существует линейно непрерывный функционал $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in K_0^* \times K_1^* \times \ldots \times K_m^*$, $\lambda \neq 0$ такой, что*

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 0. \tag{$*$}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть существуют линейно непрерывный функционал $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in K_0^* \times K_1^* \times \ldots \times K_m^*$, $\lambda \neq 0$, для которого выполнено уравнение $(*)$. Докажем, что тогда $K_0 \cap K_1 \cap \ldots \cap K_m = 0$. Предположим противное, что существует $x \in K_0 \cap K_1 \cap \ldots \cap K_m$, $x \neq 0$ и, значит, $x \in \operatorname{int} K_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Если все функционалы $\lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$, то из уравнения $(*)$ следует, что $\lambda_0 = 0$ — противоречие с условием $\lambda \neq 0$. Следовательно, существует функционал $\lambda_s \neq 0$, $s \in \{1, \ldots, m\}$. Поскольку $\inf\limits_{x \in K_s} \langle \lambda_s, x \rangle \geq 0$, то по лемме ? для $\langle \lambda_s, x \rangle > 0$ для точки $x \in \operatorname{int} K_s$. Таким образом, для функционалов $\lambda_i \in K_i^*$ выполняется строгое неравенство $\sum\limits_{i=0}^{m} \langle \lambda_i, x \rangle > 0$ (все слагаемые неотрицательны, и по крайней мере одно положительно). Отсюда $\Big\langle \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i, x \Big\rangle > 0$ — противоречие с неравенством $(*)$.

Необходимость. Пусть $K_0 \cap K_1 \cap \ldots \cap K_m = 0$. Докажем, что существует линейно непрерывный функционал $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in K_0^* \times K_1^* \times \ldots \times K_m^*$, $\lambda \neq 0$ такой, что выполняется неравенство $(*)$. Рассмотрим конусы $K := K_1 \times \ldots \times K_m$ и $D := \{\overline{x} = (x, \ldots, x) \in \underbrace{K_0 \times \ldots \times K_0}_{m}\}$ — "диагональ" конуса K_0^m.

Тогда $D \cap \operatorname{int} K = \emptyset$ (если существует $(x, \ldots, x) \in D \cap \operatorname{int} K$, то $x \in K_0 \cap \operatorname{int} K_1 \cap \ldots \cap \operatorname{int} K_m$ — что невозможно в силу заданного условия $K_0 \cap K_1 \cap \ldots \cap K_m = 0$).

По теореме отделимости существует линейно непрерывный функционал $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq 0$, для которого

$$\inf_{\overline{x} \in K} \langle \lambda, \overline{x} \rangle \overset{\text{для конусов}}{\geq 0 \geq} \sup_{\overline{x} \in D} \langle \lambda, \overline{x} \rangle \iff \inf_{\overline{x} \in K} \sum_{i=1}^{m} \langle \lambda_i, x_i \rangle \overset{a}{\geq} 0 \overset{b}{\geq} \sup_{x \in K_0} \sum_{i=1}^{m} \langle \lambda_i, x \rangle.$$

Подставляя точки $\overline{x} = (0, \ldots, \underset{i}{x_i}, \ldots, 0)$ в неравенство (a) получаем, что $\inf\limits_{x_i \in K_i} \langle \lambda_i, x_i \rangle \geq 0$. Это означает, что функционалы $\lambda_i \in K_i^*$, $i = 1, \ldots, m$. Обозначим $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = -\lambda_0$. Тогда $\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$.

Из неравенства (b) следует, что

$$0 \geq \sup_{x \in K_0} \left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i, x \right\rangle \iff 0 \geq \sup_{x \in K_0} \langle -\lambda_0, x \rangle$$

$$\iff 0 \geq -\inf_{x \in K_0} \langle \lambda_0, x \rangle \iff \inf_{x \in K_0} \langle \lambda_0, x \rangle \geq 0.$$

Это означает, что функционал $\lambda_0 \in K_0^*$. $\square$

Теорема 1. *Пусть* $K_0, K_1, \ldots, K_m$ *— непустые выпуклые конусы, причем* $K_1 \backslash \{0\}, \ldots, K_m \backslash \{0\}$ *открыты,* $K_0 \cap K_1 \cap \ldots \cap K_m \neq 0$. *Тогда* $(K_0 \cap K_1 \cap \ldots \cap K_m)^* = K_0^* + K_1^* + \ldots + K_m^*$.

Доказательство. Докажем вложение $(K_0 \cap K_1 \cap \ldots \cap K_m)^* \supset K_0^* + K_1^* + \ldots + K_m^*$. Пусть $\lambda \in K_0^* + \ldots + K_m^*$. Тогда $\lambda = \sum\limits_{i=0}^{m} y_i$, где $\lambda_i \in K_i^*$, $i = 0, \ldots, m$. Поскольку $\lambda_i \in K_i^*$, то $\langle \lambda_i, x \rangle \geq 0$ для любой точки $x \in K_i$ (в том числе и для точки $x \in K_0 \cap \ldots \cap K_m$). Значит, $\left\langle \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i, x \right\rangle \geq 0$ для любой точки $x \in K_0 \cap \ldots \cap K_m$. Это означает, что функционал $\lambda \in (K_0 \cap \ldots \cap K_m)^*$.

Докажем обратное вложение $(K_0 \cap K_1 \cap \ldots \cap K_m)^* \subset K_0^* + K_1^* + \ldots + K_m^*$. Пусть функционал $\lambda \in (K_0 \cap \ldots \cap K_m)^*$. Надо представить его в виде суммы $\lambda = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i$, где $\lambda_i \in K_i^*$, $i = 0, \ldots, m$. Считаем функционал $\lambda \neq 0$ (иначе имеется тривиальное разложение: $0 = 0 + \ldots + 0$). Рассмотрим конус $K_{m+1} := \{x \in X \mid \langle \lambda, x \rangle < 0\} \cup \{0\}$ — открытое полупространство и ноль. Тогда $K_0 \cap \ldots \cap K_{m+1} = 0$ (иначе существует точка $x \in K_0 \cap \ldots \cap K_m$, для которой $\langle \lambda, x \rangle \geq 0$, и $x \in K_{m+1}$ и по определению конуса K_{m+1} будет выполняться неравенство $\langle \lambda, x \rangle < 0$ — противоречие). По теореме Дубовицкого-Милютина существуют линейно непрерывные функционалы $\lambda_i \in K_i^*$, $i = 0, \ldots, m+1$, такие, что $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{m+1}) \neq 0$ и $\sum\limits_{i=0}^{m+1} \lambda_i = 0$. Поскольку $K_{m+1}^* = \{\lambda_{m+1} = -\alpha\lambda \mid \alpha \geq 0\}$ (проверьте!), то $\lambda_{m+1} = -\alpha\lambda$ $(\alpha \geq 0)$, т. е. $\alpha\lambda_{m+1} = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i$. Если $\alpha = 0$, то $\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$ и хотя бы один из этих функционалов ненулевой. Но тогда опять по теореме Дубовицкого-Милютина получаем, что $K_0 \cap \ldots \cap K_m = 0$ — противоречие. Значит, $\alpha > 0$ и $\lambda_{m+1} = \sum\limits_{i=0}^{m} \frac{\lambda_i}{\alpha} \in K_0^* + \ldots + K_m^*$. $\square$