§2. Принцип максимума в частном случае

Формулировка и доказательство принципа максимума Понтрягина для задачи со свободным концом

$$B(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt \to \min; \qquad (P)$$

$$\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0 \ \forall\, t \in T,\ u(t) \in U \ \forall\, t \in [t_0, t_1],\ x(t_0) = x_0,$$

фазовая переменная $x \in PC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, управление $u \in PC([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$, $[t_0, t_1]$ — фиксированный отрезок, $U \subset \mathbb{R}^r$, $T \subset [t_0, t_1]$ — множество точек непрерывности управления u.

Теорема (принцип максимума Понтрягина)

$(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) \in \mathrm{strlocmin}\, P$; $f, f_x, \varphi, \varphi_x \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}}) \times U)$. Тогда

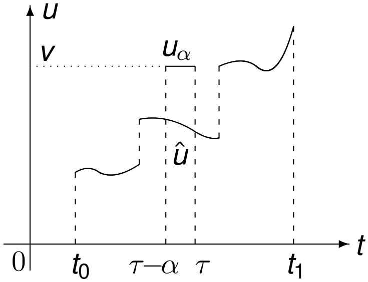
$$f(t, \hat{x}(t), u) - p(t)\varphi(t, \hat{x}(t), u) \geq \hat{f}(t) - p(t)\hat{\varphi}(t) \ \forall\, t \in T,\ \forall\, u \in U, \ (1)$$

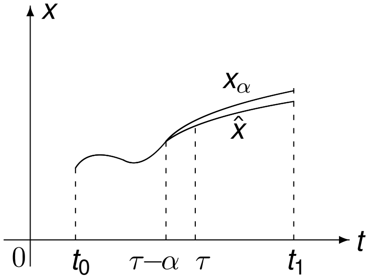
где $p : -\dot{p}(t) + \hat{f}_x(t) - p(t)\hat{\varphi}_x(t) = 0 \ \forall\ t \in T$ (2), $p(t_1) = 0$. (3)

Отметим, что принцип оптимальности управления (1) с условиями (2)–(3) может быть выведен из необходимых условий оптимальности в общей задаче оптимального управления, множитель Лагранжа λ_0 при функционале B оказывается равным единице, а условие трансверсальности по $x(t_0)$ не существенно. Единственность решения уравнения (2) с краевым условием (3) следует из теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейных систем.

◁ Игольчатые вариации. Зафиксируем точку $\tau \in T$, управление $v \in U$ и такое малое число $\alpha \geq 0$: $[\tau - \alpha, \tau] \subset T$.

$$u_\alpha(t) := \begin{cases} \hat{u}(t), & t \notin [\tau - \alpha, \tau), \\ v, & t \in [\tau - \alpha, \tau), \end{cases}$$ — элементарная игольчатая вариация управления $\hat{u}$.





$x_\alpha(\cdot)$ — решение уравнения $\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u_\alpha(t))$, $x(t_0) = x_0$.
x_α — элементарная игольчатая вариация функции $\hat{x}$,
(x_α, u_α) — элементарная игольчатая вариация процесса $(\hat{x}, \hat{u})$,
(τ, v, α) — элементарная иголка.

Лемма (о свойствах элементарной игольчатой вариации)

Пусть в элементарной иголке (τ, v, α) точка τ и управление v фиксированы. Тогда $\exists\ \varepsilon > 0 : \forall\ \alpha \in [0, \varepsilon]$ отрезок $[\tau - \alpha, \tau] \subset T$, а функция x_α — игольчатая вариация функции $\hat{x}$ — определена на всем отрезке $[t_0, t_1]$ и

1) функция $x_\alpha(\cdot) \overset{C[t_0,t_1]}{\rightarrow} \hat{x}(\cdot)$ при $\alpha \to +0$;

2) функция $\dfrac{x_\alpha(\cdot) - \hat{x}(\cdot)}{\alpha} \overset{C[\tau,t_1]}{\rightarrow} y(\cdot)$ при $\alpha \to +0$, где функция $y \in PC^1[\tau, t_1]$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению
$$\dot{y}(t) = \hat{\varphi}_x(t) y(t) \quad \forall\ t \in [\tau, t_1] \cap T \tag{4}$$
с начальным условием
$$y(\tau) = \varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \hat{\varphi}(\tau). \tag{5}$$

$\lhd\lhd$ Существование x_α следует из т. $\exists$-ния решения дифф. уравнения, а сходимости следуют соответственно из теорем о непрерывной и непрерывно дифференцируемой зависимости решения от начальных данных.

Докажем, что $y \in PC^1[\tau, t_1]$, условия (5) и (4):

$$y(t) \overset{def}{=} \lim_{\alpha\to+0} \frac{x_\alpha(t)-\hat{x}(t)}{\alpha} \overset{x(t)=\int_{t_0}^{t}\dot{x}(s)ds+x(t_0)}{=} \lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\int_{t_0}^{t}(\dot{x}_\alpha(s)-\dot{\hat{x}}(s))ds =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\int_{t_0}^{t}(\varphi(s,x_\alpha(s),u_\alpha(s))-\hat{\varphi}(s))ds = \lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\int_{\tau-\alpha}^{\tau}(\varphi(s,x_\alpha(s),v)-\hat{\varphi}(s))ds +$$

$$+ \lim_{\alpha\to+0} \int_{\tau}^{t} \frac{\varphi(s,x_\alpha(s),\hat{u}(s))-\hat{\varphi}(s)}{\alpha} ds = \lim_{\alpha\to+0} \left(\varphi(s,x_\alpha(s),v) - \hat{\varphi}(s)\right)\Big|_{s\in[\tau-\alpha,\tau]} +$$

$$+ \lim_{\alpha\to+0} \int_{\tau}^{t} \frac{\hat{\varphi}_x(s)[x_\alpha(s)-\hat{x}(s)]+o(x_\alpha(s)-\hat{x}(s))}{\alpha} ds =$$

$$= \varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \hat{\varphi}(\tau) + \int_{\tau}^{t} \hat{\varphi}_x(s)y(s)ds \qquad (6)$$

$$\left(\lim_{\alpha\to+0} \frac{\|o(x_\alpha-\hat{x})\|_{C[\tau,t_1]}}{\alpha} = \lim_{\alpha\to+0} \frac{\|o(x_\alpha-\hat{x})\|_C}{\|x_\alpha-\hat{x}\|_C} \cdot \frac{\|x_\alpha-\hat{x}\|_C}{\alpha} = 0\cdot\|y\|_C = 0 \right).$$

Подставляя в (6) $t = \tau$, получаем начальное условие (5) для y в точке τ, а продифференцировав (6) по t, получим, что y удовлетворяет дифференциальному уравнению (4). $\rhd\rhd$

Лемма (о приращении функционала)

Пусть в элементарной иголке (τ, v, α) точка $\tau \in T$ и управление $v \in U$ фиксированы, $B(\alpha) := B(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot))$. Тогда функция B дифференцируема справа в нуле и

$$B'(+0) = f(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \hat{f}(\tau) - p(\tau)\big(\varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \hat{\varphi}(\tau)\big).$$

$\lhd\lhd$ $$B'(+0) = \lim_{\alpha\to+0} \frac{B(\alpha)-B(0)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to+0} \frac{B(x_\alpha,u_\alpha)-B(\hat{x},\hat{u})}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\left(\int_{t_0}^{t_1}\big(f(t,x_\alpha(t),u_\alpha(t)) - \hat{f}(t)\big)\,dt\right) =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\left(\int_{\tau-\alpha}^{\tau}\big(f(t,x_\alpha,v) - \hat{f}\big)\,dt + \int_{\tau}^{t_1}\big(f(t,x_\alpha,\hat{u}) - \hat{f}\big)\,dt\right) =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0}\big(f(t,x_\alpha(t),v) - \hat{f}\big)\Big|_{t\in[\tau-\alpha,\tau]} + \lim_{\alpha\to+0}\int_{\tau}^{t_1}\frac{\hat{f}_x[x_\alpha-\hat{x}]+o(x_\alpha-\hat{x})}{\alpha}\,dt =$$

$$\overset{\frac{x_\alpha-\hat{x}}{\alpha}\to y}{=} f(\tau,\hat{x}(\tau),v) - \hat{f}(\tau) + \int_{\tau}^{t_1}\hat{f}_x y\,dt.$$

Из (2) $-\dot{p} - p\hat{\varphi}_x + \hat{f}_x = 0 \Leftrightarrow \hat{f}_x = \dot{p} + p\hat{\varphi}_x$ имеем:

$$\int_{\tau}^{t_1}\hat{f}_x y\,dt = \int_{\tau}^{t_1}(\dot{p} + p\hat{\varphi}_x)y\,dt \overset{(4)}{=} \int_{\tau}^{t_1}(\dot{p}y + p\dot{y})\,dt = \int_{\tau}^{t_1}\frac{d}{dt}(py)\,dt =$$

$$= p(t_1)y(t_1) - p(\tau)y(\tau) \overset{p(t_1)=0,\,(5)}{=} -p(\tau)\big(\varphi(\tau,\hat{x}(\tau),v) - \hat{\varphi}(\tau)\big).$$

Подставляя, получим нужную формулу для $B'(+0)$. $\rhd\rhd$

$$B(x(\cdot),u(\cdot))=\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))\,dt \to \min; \qquad (P)$$

$$\dot x(t)-\varphi(t,x(t),u(t))=0, \qquad u(t)\in U, \qquad x(t_0)=x_0.$$

Теорема (принцип максимума Понтрягина)

$(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot))\in \mathrm{strlocmin}\, P$; $f, f_x, \varphi, \varphi_x \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat x})\times U)$. Тогда

$f(t,\hat x(t),u)-p(t)\varphi(t,\hat x(t),u)\geq \hat f(t)-p(t)\hat\varphi(t)\ \forall\, t\in T,\ \forall\, u\in U,$ (1)

где $p:\ -\dot p(t)+\hat f_x(t)-p(t)\hat\varphi_x(t)=0\ \forall\ t\in T$ (2), $p(t_1)=0.$ (3)

Завершение доказательства. Лемма 1 $\Rightarrow (x_\alpha,u_\alpha)\in D(P)$ при $0\leq\alpha\leq\varepsilon$ и $x_\alpha(\cdot)\overset{C[t_0,t_1]}{\rightarrow}\hat x(\cdot)$ при $\alpha\to+0$. Так как $(\hat x,\hat u)\in \mathrm{strlocmin}\, P$, то $B(x_\alpha,u_\alpha)\geq B(\hat x,\hat u)\Leftrightarrow B(\alpha)\geq B(0)$ при малых $\alpha>0$. Отсюда $B'(+0)\geq 0$, и из выражения для $B'(+0)$ по лемме 2 вытекает, что

$f(\tau,\hat x(\tau),v)-p(\tau)\varphi(\tau,\hat x(\tau),v)\geq \hat f(\tau)-p(\tau)\hat\varphi(\tau)\,\forall\,\tau\in T,\ \forall\, v\in U,$

т. е. выполняется соотношение (1). $\triangleright$