Пространства в двойственности

Определение

Линейные пространства X и Y называются пространствами в двойственности, если определена билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon Y \times X \to \mathbb{R}$: если $\langle y, x \rangle = 0 \ \forall \ y \in Y$, то $x = 0$, а если $\langle y, x \rangle = 0 \ \forall \ x \in X$, то $y = 0$.

Пример. Если X — линейное нормированное пространство, а $Y = X^*$, то форма $\langle y, x \rangle$ является билинейной, а пространства X и $Y = X^*$ являются пространствами в двойственности.
Далее для образности представления рассматриваем именно этот случай.

Определение

X и Y — пространства в двойственности. Полярой множества $A \subset X$ называется множество $A^{\circ} = \{y \in Y \mid \sup\limits_{x \in A} \langle y, x \rangle \leq 1\}$.

Свойства поляры:

1. Поляра множества в линейном нормированном пространстве является выпуклым замкнутым подмножеством, содержащим ноль.

$\triangleleft$ Множество A° является пересечением выпуклых замкнутых множеств (полупространств) $L_x = \{y \in Y \mid \langle y, x \rangle \leq 1\}$ по всем $x \in A$, а значит – выпукло и замкнуто. Очевидно, поляра содержит ноль. $\triangleright$

$$A^\circ = \{y \in X^* \mid \sup_{x\in A} \langle y, x\rangle \le 1\}$$

2. $B \supset A \Rightarrow B^\circ \subset A^\circ$.

$\lhd$ Включение $B^\circ \subset A^\circ$ следует из неравенства

$$\sup_{x\in A} \langle y, x\rangle \overset{A\subset B}{\le} \sup_{x\in B} \langle y, x\rangle. \qquad \rhd$$

3. $(\lambda A)^\circ = \lambda^{-1} A^\circ \ \forall\ \lambda > 0$.

$\lhd$ Поскольку $\sup\limits_{x\in\lambda A} \langle y, x\rangle = \sup\limits_{x\in A} \langle y, \lambda x\rangle = \lambda \sup\limits_{x\in A} \langle y, x\rangle$,

то $\sup\limits_{x\in\lambda A} \langle y, x\rangle \le 1 \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in A} \langle y, x\rangle \le \frac{1}{\lambda}$.

Из последней эквивалентности вытекает свойство 3. $\rhd$

4. $(\overline{A})^\circ = A^\circ$.

$\lhd$ Поскольку $\overline{A} \supset A$, то по свойству 2 $(\overline{A})^\circ \subset A^\circ$.

Докажем обратное включение, что $(\overline{A})^\circ \supset A^\circ$.

Пусть $y \in A^\circ \Rightarrow$ для $\overline{x} \in \overline{A}$ $\exists$ последовательность $x_k \in A$,

$x_k \to \overline{x}$, для которой $\langle y, x_k\rangle \le 1 \overset{x_k\to\overline{x}}{\Rightarrow} \langle y, \overline{x}\rangle \le 1$

$\Rightarrow \sup_{\overline{x}\in\overline{A}} \langle y, \overline{x}\rangle \le 1$. Поэтому $y \in (\overline{A})^\circ$. $\rhd$

$$A^\circ = \{y \in X^* \mid \sup_{x\in A} \langle y, x\rangle \le 1\}$$

5. $(A \cup \{0\})^\circ = A^\circ$.

$\lhd$ Поскольку $A \cup \{0\} \supset A$, то по свойству 2 $(A \cup \{0\})^\circ \subset A^\circ$.
Докажем обратное включение, что $(A \cup \{0\})^\circ \supset A^\circ$.
Пусть $y \in A^\circ \Rightarrow \sup\limits_{x\in A} \langle y, x\rangle \le 1$. Поэтому $\sup\limits_{x\in A\cup\{0\}} \langle y, x\rangle \le 1$.
Значит, $y \in (A \cup \{0\})^\circ$. $\rhd$

6. $(\operatorname{conv} A)^\circ = A^\circ$.

$\lhd$ Поскольку $\operatorname{conv} A \supset A$, то по свойству 2 $(\operatorname{conv} A)^\circ \subset A^\circ$.
Докажем обратное включение, что $(\operatorname{conv} A)^\circ \supset A^\circ$.
Пусть $y \in A^\circ \Rightarrow$ для $x \in \operatorname{conv} A$ имеем разложение:

$x = \sum\limits_{j=1}^n t_j x_j$, $x_j \in A$, $\sum\limits_{j=1}^n t_j = 1$, $t_j \ge 0$, $j = 1, \ldots, n$. Поэтому

$$\langle y,x\rangle = \left\langle y, \sum_{j=1}^n t_j x_j\right\rangle = \sum_{j=1}^n t_j \langle y,x_j\rangle \overset{\langle y,x_j\rangle\le 1}{\le} \sum_{j=1}^n t_j = 1 \Rightarrow y \in (\operatorname{conv} A)^\circ. \rhd$$

Из свойств 4-6 следует, что

7. $\left(\overline{\operatorname{conv} A \cup \{0\}}\right)^\circ \overset{4}{=} (\operatorname{conv} A \cup \{0\})^\circ \overset{5}{=} (\operatorname{conv} A)^\circ \overset{6}{=} A^\circ$.

8. $(A\cup B)^\circ = A^\circ\cap B^\circ$, $\big(\operatorname{conv}(A\cup B)\big)^\circ = A^\circ\cap B^\circ$.
◁ Поскольку $A\cup B\supset A$, то по свойству 2 $(A\cup B)^\circ\subset A^\circ$, аналогично, $A\cup B\supset B$, то по свойству 2 $(A\cup B)^\circ\subset B^\circ$.
Отсюда $(A\cup B)^\circ\subset A^\circ\cap B^\circ$.
Докажем обратное включение. Пусть $y\in A^\circ\cap B^\circ\Rightarrow$ $y\in A^\circ\Rightarrow\sup\limits_{x\in A}\langle y,x\rangle\le 1$, аналогично $y\in B^\circ\Rightarrow\sup\limits_{x\in B}\langle y,x\rangle\le 1$.
Отсюда $\sup\limits_{x\in A\cup B}\langle y,x\rangle\le 1$. Значит, $y\in(A\cup B)^\circ$. ▷

9. $(A\cap B)^\circ = \overline{\operatorname{conv}(A^\circ\cup B^\circ)}$ $\forall$ выпуклых замкнутых множеств A, B, содержащих ноль.
◁ Обозначим $C=A^\circ$, $D=B^\circ\Rightarrow C, D$ — выпуклые замкнутые множества, содержащие ноль (как поляры множеств) $\Rightarrow C^\circ = A^{\circ\circ} = A$ по т. о биполяре. Аналогично, $D^\circ = B^{\circ\circ} = B$. Тогда $(A\cap B)^\circ \overset{\text{def}}{=} (C^\circ\cap D^\circ)^\circ \overset{8}{=} \big((C\cup D)^\circ\big)^\circ \overset{7}{=}$
$= \big((\overline{\operatorname{conv}(C\cup D)}\,)^\circ\big)^\circ = \overline{\operatorname{conv}(C\cup D)} = \overline{\operatorname{conv}(A^\circ\cup B^\circ)}$. ▷
Формулы 8-9 обобщаются на случай n множеств.

$$A^\circ = \{y \in X^* \mid \sup_{x\in A} \langle y, x\rangle \le 1\}$$

Лемма (1)

X — нормированное пр-во, $A \subset X$ — выпуклое множество $\Rightarrow$ $0 \in \operatorname{int} A \Leftrightarrow A^\circ$ — ограниченное множество.

$\lhd$ Пусть $0 \in \operatorname{int} A \Rightarrow \exists\ r > 0 : B_r = \{x \in X \mid \|x\| \le r\} \subset A$.
Значит, если $y \in A^\circ$, то $1 \ge \sup\limits_{x\in A} \langle y, x\rangle \ge \sup\limits_{x\in B_r} \langle y, x\rangle = r\|y\|_{X^*}$
$\Rightarrow \|y\|_{X^*} \le \frac{1}{r}$, т. е. A° — ограниченное множество.

Обратно. Пусть A° — ограниченное множество.
Предположим противное, что $0 \notin \operatorname{int} A \Rightarrow$
по теореме отделимости A можно отделить от 0:
$\exists\ \hat{y} \ne 0 : \sup\limits_{a\in A} \langle \hat{y}, a\rangle \le \langle \hat{y}, 0\rangle = 0 \Rightarrow \sup\limits_{a\in A} \langle t\hat{y}, a\rangle \le 0\ \forall\ t > 0$
$\Rightarrow t\hat{y} \in A^\circ\ \forall\ t > 0$ — противоречие с ограниченностью A°. $\rhd$

$$A^\circ = \{y \in X^* \mid \sup_{x\in A} \langle y, x\rangle \le 1\}$$

Лемма (2)

X — нормированное пространство $\Rightarrow$
$A \subset X$ — ограниченное множество $\Leftrightarrow 0 \in \operatorname{int} A^\circ$.

$\lhd$ Пусть A — ограниченное множество $\Rightarrow$
$\exists\, R : \|a\|_X \le R \ \forall\, a \in A$. Тогда
$\sup\limits_{a\in A} \langle y, a\rangle \le \sup\limits_{a\in A} \|y\|_{X^*} \cdot \|a\|_X \le R\|y\|_{X^*} \le 1$ при $\|y\|_{X^*} \le \frac{1}{R}$
$\Rightarrow B_{\frac{1}{R}} \subset A^\circ \Rightarrow 0 \in \operatorname{int} A^\circ$.
Обратно. Пусть $0 \in \operatorname{int} A^\circ \Rightarrow \exists\, r > 0 : B_r \subset A^\circ$.
Тогда $\forall\, x \in A$, $\forall\, y \in A^\circ$, $\langle y, x\rangle \le 1$.
Отсюда $1 \ge \sup\limits_{y\in A^\circ} \langle y, x\rangle \ge \sup\limits_{y\in B_r} \langle y, x\rangle = r\|x\|_X \Rightarrow \|x\|_X \le \frac{1}{r}$,
т. е. A — ограниченное множество. $\rhd$

4.6.3 Примеры поляр множеств

- $A = a \neq 0 \Rightarrow A^\circ = \{y \in Y \mid \langle y, a \rangle \leq 1\}$ — полупространство.
- $A = \{a_1, \dots, a_n\} \Rightarrow A^\circ$ — пересечение n полупространств, т. е. многогранник.
- $A = \mathrm{conv}\{a_1, \dots, a_n\}$ — многогранник $\Rightarrow$ A° — многогранник.

Число граней многогранника A° равно числу вершин A, и наоборот, число вершин многогранника A° равно числу граней A.

$$A^\circ = \{y \in X^* \mid \sup_{x \in A} \langle y, x \rangle \le 1\}$$

- $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = 0,\ a \ne 0\}$ — гиперплоскость $\Rightarrow A^\circ = \{\lambda a \in \mathbb{R}^n \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ — прямая.

$\triangleleft$ Представим $y \in A^\circ$ в виде $y = \lambda a + b$, где $b \perp a$.
Тогда $\sup\limits_{\langle a,x\rangle=0} \langle \lambda a + b, x \rangle = \sup\limits_{\langle a,x\rangle=0} \langle b, x \rangle$ конечен, если $b = 0$
(если $b \ne 0$, то можно взять $x = \mu b \in A$ и $\sup\limits_{\mu} \langle b, \mu b \rangle = +\infty$).
Следовательно, $y = \lambda a \Rightarrow \sup\limits_{\langle a,x\rangle=0} \langle \lambda a, x \rangle = 0 \Rightarrow \lambda a \in A^\circ$. $\triangleright$

4.6.3 Примеры поляр множеств

$$A^\circ = \{y \in X^* \mid \sup_{x \in A} \langle y, x\rangle \le 1\}$$

- $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \le 0\}$ — полупространство $\Rightarrow A^\circ = \{y = \lambda a \in \mathbb{R}^n \mid \lambda \ge 0\} = \operatorname{cone} a$ — луч.

$\lhd$ Представим $x \in A$ в виде $x = \mu a + b$, где $b \perp a$. Тогда $x \in A \Leftrightarrow \langle a, x\rangle \le 0 \Leftrightarrow \langle a, \mu a + b\rangle \le 0 \Leftrightarrow \mu\langle a, a\rangle \le 0 \Leftrightarrow \mu \le 0$. Представим $y \in A^\circ$ в виде $y = \lambda a + c$, где $c \perp a \Rightarrow$ $\sup\limits_{x \in A} \langle y, x\rangle = \sup\limits_{\substack{\mu \le 0\\ b \perp a}} \langle \lambda a + c, \mu a + b\rangle = \sup\limits_{\substack{\mu \le 0\\ b \perp a}} (\lambda\mu\langle a, a\rangle + \langle c, b\rangle)$ конечен, если $c = 0$, $\lambda \ge 0$ (если $c \ne 0$, то можно взять $x = tc \in A$ и $\sup\limits_{t} \langle c, tc\rangle = +\infty$). В этом случае, $y = \lambda a$, $\lambda \ge 0$ $\Rightarrow \sup\limits_{x \in A} \langle y, x\rangle = \sup\limits_{\mu \le 0} \lambda\mu\langle a, a\rangle \le 0 \Rightarrow y \in A^\circ$. $\rhd$

4.6.3 Примеры поляр множеств

$$A^\circ = \{y \in X^* \mid \sup_{x\in A} \langle y, x\rangle \leq 1\}$$

- $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \leq 1\}$, $a \neq 0$
  $\Rightarrow A^\circ = \{y = \lambda a \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} = [0, a]$ — отрезок.

$\triangleleft$ Представим $x \in A$ и $y \in A^\circ$ в виде $x = \mu a + b$, $y = \lambda a + c$, где $b, c \perp a$. Тогда

$x \in A \Leftrightarrow \langle a, x\rangle \leq 1 \Leftrightarrow \langle a, \mu a + b\rangle \leq 1 \Leftrightarrow \mu\langle a, a\rangle \leq 1$,

$\sup\limits_{x\in A} \langle y, x\rangle = \sup\limits_{\substack{\mu\langle a,a\rangle\leq 1\\ b\perp a}} \langle \lambda a + c, \mu a + b\rangle = \sup\limits_{\substack{\mu\langle a,a\rangle\leq 1\\ b\perp a}} (\lambda\mu\langle a, a\rangle + \langle c, b\rangle)$

конечен, если $c = 0$ (если $c \neq 0$, то можно взять $x = tc \in A$ и $\sup\limits_{t} \langle c, tc\rangle = +\infty$). В этом случае $y = \lambda a \Rightarrow$

$\sup\limits_{x\in A} \langle y, x\rangle = \sup\limits_{\mu\langle a,a\rangle\leq 1} \lambda\mu\langle a, a\rangle \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow y = \lambda a \in A^\circ$. $\triangleright$

4.6.3 Примеры поляр множеств

$$A^\circ = \{y \in X^* \mid \sup_{x \in A} \langle y, x \rangle \leq 1\}$$

- $A = \{x \in X \mid \|x\|_X \leq 1\} \Rightarrow A^\circ = \left\{y \in X^* \mid \|y\|_{X^*} \leq 1\right\}$.

$\lhd \sup\limits_{x \in A} \langle y, x \rangle = \sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \langle y, x \rangle = \|y\|_{X^*} \leq 1 \Leftrightarrow \|y\|_{X^*} \leq 1$
$\Rightarrow A^\circ = \left\{y \in X^* \mid \|y\|_{X^*} \leq 1\right\}$. $\rhd$

- $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq C\}$, $C > 0$, $|x| := \left(\sum\limits_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

  $A^\circ = \left\{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| \leq \frac{1}{C}\right\}$.

$\lhd$ Поскольку $A = CB$, где $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$, и по-предыдущему $B^\circ = \left\{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| \leq 1\right\}$, то
$A^\circ = (CB)^\circ \overset{4}{=} \frac{1}{C} B^\circ = \left\{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| \leq \frac{1}{C}\right\}$. $\rhd$

Поляра от поляры называется биполярой:
$A^{\circ\circ} := (A^{\circ})^{\circ} = \{x \in X \mid \sup_{y \in A^{\circ}} \langle y, x \rangle \leq 1\}$.

Теорема (о биполяре)

$A = A^{\circ\circ} \Leftrightarrow A$ — выпуклое замкнутое множество и $0 \in A$.

$\lhd$ a) $A = A^{\circ\circ} \Rightarrow A$ — выпуклое замкнутое множество и $0 \in A$, так как само является полярой, а поляра всегда является выпуклым замкнутым подмножеством, содержащим ноль.
b) A — выпуклое замкнутое множество, содержащее ноль.
$A \subset A^{\circ\circ}$ — очевидно: $x \in A \Rightarrow \langle y, x \rangle \leq 1 \ \forall\ y \in A^{\circ} \Rightarrow x \in A^{\circ\circ}$.
Докажем, что $A \supset A^{\circ\circ}$. От противного. Предположим, что $A \not\supset A^{\circ\circ} \Rightarrow\ \exists\ \hat{x} \in A^{\circ\circ}$, $\hat{x} \notin A \Rightarrow$ по т. о строгой отделимости $\hat{x}$ можно строго отделить от A: $\exists\ \hat{y} : \langle \hat{y}, \hat{x} \rangle > \sup_{a \in A} \langle \hat{y}, a \rangle \geq 0$ (так как $0 \in A$) $\Rightarrow \langle \hat{y}, \hat{x} \rangle > 0 \Rightarrow\ \exists\ t > 0 :$
$\langle t\hat{y}, \hat{x} \rangle > 1 \geq \sup\limits_{a \in A} \langle t\hat{y}, a \rangle \Rightarrow t\hat{y} \in A^{\circ}$, $\hat{x} \notin A^{\circ\circ}$ — противоречие. $\rhd$

Следствие (1)

A — выпуклое замкнутое множество и $0 \in A \Rightarrow A$ является полярой некоторого выпуклого замкнутого множества B, содержащего 0 ($A = B^\circ$).

$\lhd$ По теореме о биполяре $A = A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ = B^\circ$, где $B = A^\circ$ — выпуклое замкнутое множество и $0 \in B$, так как поляра всегда является выпуклым замкнутым подмножеством, содержащим ноль. $\rhd$

Следствие (2)

A — произвольное множество $\Rightarrow A^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{conv}(A \cup \{0\})}$.

$\lhd$ В силу свойства 7 $\left(A^\circ = \left(\overline{\mathrm{conv}(A \cup \{0\})}\right)^\circ\right)$

$A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ \overset{7}{=} \left(\left(\overline{\mathrm{conv}(A \cup \{0\})}\right)^\circ\right)^\circ = \overline{\mathrm{conv}(A \cup \{0\})}$

по теореме о биполяре для выпуклого замкнутого множества $\overline{\mathrm{conv}(A \cup \{0\})}$, содержащего ноль. $\rhd$