Задачей Больца называется задача без ограничений в пространстве $C^1[t_0, t_1]$:

$$B(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to \text{extr}. \qquad (P)$$

Здесь $L = L(t, x, \dot{x})$ — функция трех, а $l = l(x(t_0), x(t_1))$ — функция двух переменных. Задача Больца — элементарная задача ВИ. Функционал B называется функционалом Больца, функция l — терминантом.

Определение

Допустимая функция $\hat{x}$ доставляет слабый локальный минимум в задаче (P) ($\hat{x} \in \text{wlocmin}\, P$), если $\exists\ \delta > 0$: $B(x(\cdot)) \geq B(\hat{x}(\cdot))$ для любой допустимой функции x, для которой $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1[t_0,t_1]} < \delta$.

Теорема

$\hat{x} \in \mathrm{wlocextr}\, P,\ L, L_x, L_{\dot{x}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})),\ l \in C^1(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$
$\Rightarrow \hat{L}_{\dot{x}} \in C^1[t_0, t_1]$ и выполнены
a) уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\ t \in [t_0, t_1];$$

b) условия трансверсальности:

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_{x(t_0)},\ \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}.$$

Доказательство

Возьмем $h(\cdot) \in C^1[t_0, t_1]$. Положим $\varphi(\lambda) := B(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot)) =$
$= \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, \hat{x} + \lambda h, \dot{\hat{x}} + \lambda \dot{h})dt + l\big(\hat{x}(t_0) + \lambda h(t_0), \hat{x}(t_1) + \lambda h(t_1)\big).$

$\hat{x} \in \operatorname{locextr} P \Rightarrow \lambda = 0 \in \operatorname{locextr} \varphi \overset{\text{по т. Ферма}}{\Rightarrow} \varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow$

$\int\limits_{t_0}^{t_1} (\hat{L}_{\dot{x}} \dot{h} + \hat{L}_x h)\, dt + \hat{l}_{x(t_0)} h(t_0) + \hat{l}_{x(t_1)} h(t_1) = 0 \;\forall\, h \in C^1[t_0, t_1]. \;(1)$

Равенство (1) выполняется $\forall\; h \in C^1[t_0, t_1]$, а значит и для функций $h \in C_0^1[t_0, t_1]$. Следовательно, из (1)

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(\hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \hat{L}_x(t)h(t)\Big)\, dt = 0 \quad \forall\; h \in C_0^1[t_0, t_1].$$

Отсюда по лемме Дюбуа-Реймона $\hat{L}_{\dot{x}} \in C^1[t_0, t_1]$ и

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\; t \in [t_0, t_1]$$

— уравнение Эйлера. Для завершения доказательства теоремы осталось вывести условия трансверсальности.

Доказательство

$$\int_{t_0}^{t_1} (\hat{L}_{\dot{x}}\dot{h} + \hat{L}_x h)\,dt + \hat{l}_{x(t_0)}h(t_0) + \hat{l}_{x(t_1)}h(t_1) = 0 \ \forall\, h \in C^1[t_0, t_1]. \quad (1)$$

Возьмем по частям первый интеграл (это стало возможным в силу доказанной гладкости $\hat{L}_{\dot{x}} \in C^1[t_0, t_1]$):

$$\int_{t_0}^{t_1} \hat{L}_{\dot{x}}\dot{h}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \hat{L}_{\dot{x}}\,dh = \hat{L}_{\dot{x}}h\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} h\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}\,dt.$$

Подставляя полученное выражение в соотношение (1) и учитывая уже доказанное уравнение Эйлера, получим

$$\hat{L}_{\dot{x}}h\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} h\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}\,dt + \int_{t_0}^{t_1} \hat{L}_x h\,dt + \hat{l}_{x(t_1)}h(t_1) + \hat{l}_{x(t_0)}h(t_0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big(-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x\Big)h\,dt + \big(\hat{L}_{\dot{x}}(t_1) + \hat{l}_{x(t_1)}\big)h(t_1) + \big(-\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) + \hat{l}_{x(t_0)}\big)h(t_0) =$$

$$= \big(\hat{L}_{\dot{x}}(t_1) + \hat{l}_{x(t_1)}\big)h(t_1) + \big(-\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) + \hat{l}_{x(t_0)}\big)h(t_0) = 0 \ \forall\, h \in C^1[t_0, t_1].$$

Подставляя $h(t) = t - t_1$ и $h(t) = t - t_0$, придем к условиям трансверсальности $\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_{x(t_0)}$ и $\hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}$. $\triangleright$

Пусть $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ — n-мерная вектор-функция, интегрант $L = L(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ — функция $2n+1$ переменного, $l = l(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0), x_1(t_1), \dots, x_n(t_1))$ — функция $2n$ переменных.

Рассмотрим задачу в $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}) \times \dots \times C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$:

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)dt + l(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0), x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)) \to \mathrm{extr}.$$

Необходимые условия экстремума состоят из системы n уравнений Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}_j}(t) + \hat{L}_{x_j}(t) = 0,\ \ j = 1, \dots, n,$$

и системы $2n$ условий трансверсальности

$$\hat{L}_{\dot{x}_j}(t_0) = \hat{l}_{x_j(t_0)},\ \ \hat{L}_{\dot{x}_j}(t_1) = -\hat{l}_{x_j(t_1)},\ \ j = 1, \dots, n.$$

Многомерный случай

Доказательство теоремы в векторном случае редуцируется к одномерному случаю. Действительно, фиксируем у вектор-функции $x(\cdot) = ((x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot))$ все компоненты кроме $x_j(\cdot)$. Тогда функционал будет зависеть только от $x_j(\cdot)$: $B(x_j(\cdot)) = B((\hat{x}_1(\cdot), \dots, \hat{x}_{j-1}(\cdot), x_j(\cdot), \hat{x}_{j+1}(\cdot), \dots, \hat{x}_n(\cdot))$.
А для одномерного случая уравнение Эйлера и условия трансверсальности по $x_j(\cdot)$ доказаны.
Каждое уравнение Эйлера — дифференциальное уравнение второго порядка — содержит две константы интегрирования. Всего — $2n$ констант интегрирования. Для их нахождения у нас есть $2n$ уравнений — условий трансверсальности.
В таком случае, когда количество неизвестных совпадает с количеством уравнений для их нахождения, мы говорим о полноте набора условий для нахождения экстремали.

Пример: $B(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 - x)\,dt + x^2(1) \to$ extr.

Необходимые условия экстремума:
a) уравнение Эйлера для интегранта $L = \dot{x}^2 - x$:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}2\dot{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow -2\ddot{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} = -\frac{1}{2};$$

b) условия трансверсальности для терминанта $l = x^2(1)$:

$$\begin{cases} L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)}, \\ L_{\dot{x}}(1) = -l_{x(1)}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\dot{x}(0) = 0, \\ 2\dot{x}(1) = -2x(1), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(0) = 0, \\ \dot{x}(1) = -x(1). \end{cases}$$

Решение ур-я Эйлера: $\dot{x} = -\frac{t}{2} + C_1$, $x = -\frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2$.
Из условий трансверсальности находим константы C_1 и C_2:

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = 0, \\ \dot{x}(1) = -x(1), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ -\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - C_2 \Leftrightarrow C_2 = \frac{3}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \hat{x}(t) = \frac{-t^2+3}{4}.$$

Пример: $B(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 - x)\,dt + x^2(1) \to \text{extr}.$

Возьмем произвольную допустимую функцию x. Обозначим $h = x - \hat{x}$, тогда $h \in C^1[0,1]$. Функционал B является квадратично-линейным. Тогда в силу равенства

$$B(\hat{x} + h) - B(\hat{x}) = \frac{1}{2} B''(\hat{x})[h,h] \quad \forall\ h \in C^1[0,1]$$

для квадратично-линейного функционала на экстремали $\hat{x}$

$$B(x) - B(\hat{x}) = B(\hat{x} + h) - B(\hat{x}) = \int\limits_0^1 \dot{h}^2\,dt + h^2(1) \geq 0.$$

Таким образом, $\hat{x} = \frac{-t^2+3}{4} \in \text{absmin}$,

$$S_{\text{absmin}} = B(\hat{x}) = \int\limits_0^1 \left(\frac{t^2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{t^2}{4}\right) dt + \frac{1}{4} = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{3t}{4}\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}.$$

Пример: $B(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 - x)\,dt + x^2(1) \to \text{extr}.$

Покажем, что $S_{\text{absmax}} = +\infty$. Действительно, возьмем последовательность допустимых функций $x_n = n$, тогда $B(x_n) = -n + n^2 \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Ответ. Допустимая экстремаль $\dfrac{-t^2+3}{4} \in \text{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = -\dfrac{1}{3}$, $S_{\text{absmax}} = +\infty$.