4.7 Сопряженный конус

4.7.1 Определение сопряженного конуса

Для простоты рассматриваем пространство $\mathbb{R}^n$.

Определение

K — конус в $\mathbb{R}^n$. Сопряженным конусом называется множество $K^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \inf\limits_{x \in K} \langle y, x \rangle \geq 0\}$ или, что то же самое, множество $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq 0 \ \forall\, x \in K\}$.

Замечание. Для конусов условия $\langle y, x \rangle \geq 0 \ \forall\, x \in K$ и $\langle y, x \rangle \geq c \ \forall\, x \in K$, где $c \leq 0$, равносильны тому, что $\langle y, x \rangle$ не принимает отрицательных значений.

Лемма ($K^* = -K^\circ$)

$\lhd$ $y \in K^* \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \geq 0 \ \forall\, x \in K \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \geq -1 \ \forall\, x \in K \Leftrightarrow \langle -y, x \rangle \leq 1 \ \forall\, x \in K \Leftrightarrow -y \in K^\circ \Leftrightarrow y \in -K^\circ$. $\rhd$

Из леммы можно выводить свойства сопряженного конуса.

4.7.2 Примеры сопряженных конусов

$$K^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \inf_{x \in K} \langle y, x \rangle \geq 0\}$$

- L — линейное подпространство $\Rightarrow L^* = L^{\perp}$.

$\lhd$ $y \in L^* \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \geq 0 \ \forall \ x \in L.$ $\quad (*)$
Поскольку L вместе с x содержит и $-x$, то неравенство $(*)$ выполняется $\Leftrightarrow \langle y, x \rangle = 0 \ \forall \ x \in L$. Это означает, что $x \in L^{\perp}$. $\rhd$

- $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq 0\} \Rightarrow K^* = \{-\lambda a \mid \lambda \geq 0\}$.

$\lhd$ Ранее для $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq 0\}$
вычислили $K^\circ = \{\lambda a \mid \lambda \geq 0\}$.

Поэтому $K^* = -K^\circ = -\{\lambda a \mid \lambda \geq 0\} = \{-\lambda a \mid \lambda \geq 0\}$. $\rhd$

4.7.3 Теорема о втором сопряженном конусе

Теорема (о втором сопряженном конусе)

K — выпуклый замкнутый конус $\Leftrightarrow K = K^{**}$.

$\lhd$ Следует из теоремы о биполяре. Условие $0 \in K$ выполняется по определению конуса. $\rhd$

Следствие (1)

K — вып. замкнутый конус $\Rightarrow K$ является сопряженным к некоторому выпуклому замкнутому конусу B $(K = B^*)$.

$\lhd$ По теореме о втором сопряженном конусе
$K = K^{**} = (K^*)^* = B^*$, где $B := K^*$. $\rhd$

Следствие (2)

K — произвольный конус $\Rightarrow K^{**} = \overline{\operatorname{conv} K}$.

$\lhd$ В силу свойства 5: $K^* = (\overline{\operatorname{conv} K})^*$
$K^{**} = (K^*)^* \overset{5}{=} ((\overline{\operatorname{conv} K})^*)^* = \overline{\operatorname{conv} K}$
по т. о втором сопряженном конусе для конуса $\overline{\operatorname{conv} K}$. $\rhd$

4.7.4 Свойства сопряженного конуса

$$K^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \inf_{x \in K} \langle y, x \rangle \geq 0\}$$

1. Сопряженный конус является выпуклым замкнутым конусом.

2. $K_1 \supset K_2 \Rightarrow K_1^* \subset K_2^*$.

$\lhd$ Включение $K_1^* \subset K_2^*$ следует из неравенства

$$\inf_{x \in K_2} \langle y, x \rangle \overset{K_2 \subset K_1}{\geq} \inf_{x \in K_1} \langle y, x \rangle. \qquad \rhd$$

3. $(\,\overline{K}\,)^* = K^*$.

$\lhd$ $(\,\overline{K}\,)^* = -(\,\overline{K}\,)^\circ = -K^\circ = K^*$. $\rhd$

4. $(\mathrm{conv}\, K)^* = K^*$.

$\lhd$ $(\mathrm{conv}\, K)^* = -(\mathrm{conv}\, K)^\circ = -(K)^\circ = K^*$. $\rhd$

Из свойств 3-4 следует, что

5. $(\,\overline{\mathrm{conv}\, K}\,)^* \overset{3}{=} (\mathrm{conv}\, K)^* \overset{4}{=} K^*$.

$$K^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \inf_{x\in K}\langle y, x\rangle \geq 0\}$$

6. K_1, K_2 — произвольные конусы $\Rightarrow (K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$.

$\lhd$ Возьмем $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2$. Поскольку $\langle y, x_1 + x_2\rangle = \langle y, x_1\rangle + \langle y, x_2\rangle$, то $\inf\limits_{x_1\in K_1,\, x_2\in K_2}\langle y, x_1 + x_2\rangle =$
$\inf\limits_{x_1\in K_1,\, x_2\in K_2}(\langle y, x_1\rangle + \langle y, x_2\rangle) = \inf\limits_{x_1\in K_1}\langle y, x_1\rangle + \inf\limits_{x_2\in K_2}\langle y, x_2\rangle \Rightarrow$

$$\inf_{x_1\in K_1,\, x_2\in K_2}\langle y, x_1 + x_2\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \inf\limits_{x_1\in K_1}\langle y, x_1\rangle \geq 0, \\ \inf\limits_{x_2\in K_2}\langle y, x_2\rangle \geq 0. \end{cases} \rhd$$

4.7.4 Свойства сопряженного конуса

Следствие 2: K — произвольный конус $\Rightarrow K^{**} = \overline{\operatorname{conv} K}$.

6. K_1, K_2 — произвольные конусы $\Rightarrow K_1^* \cap K_2^* = (K_1 + K_2)^*$.

$$K^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \geq 0 \ \forall\ x \in K\}$$

7. K_1, K_2 — произвольные конусы $\Rightarrow (K_1 \cap K_2)^* \supset K_1^* + K_2^*$.

$\lhd$ Пусть $y \in K_1^* + K_2^* \Rightarrow y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in K_1^*$, $y_2 \in K_2^* \Rightarrow$
$y_1 \in K_1^* \Rightarrow \langle y_1, x\rangle \geq 0 \ \forall x \in K_1$ (в том числе и для $x \in K_1 \cap K_2$);
$y_2 \in K_2^* \Rightarrow \langle y_2, x\rangle \geq 0 \ \forall\ x \in K_2$ (в том числе и для $x \in K_1 \cap K_2$).
Значит, $\langle y_1 + y_2, x\rangle \geq 0 \ \forall\ x \in K_1 \cap K_2 \Leftrightarrow y \in (K_1 \cap K_2)^*$. $\rhd$

8. K_1, K_2 — вып. замкн. конусы $\Rightarrow (K_1 \cap K_2)^* = \overline{K_1^* + K_2^*}$.

$\lhd$ По т. о втором сопряженном конусе $K_1 = K_1^{**}$, $K_2 = K_2^{**}$

$$\Rightarrow (K_1 \cap K_2)^* = (K_1^{**} \cap K_2^{**})^* = \left((K_1^*)^* \cap (K_2^*)^*\right)^* \overset{6}{=}$$

$$= \left((K_1^* + K_2^*)^*\right)^* = (K_1^* + K_2^*)^{**} \overset{\text{Сл. 2}}{=} \overline{\operatorname{conv}(K_1^* + K_2^*)} = \overline{K_1^* + K_2^*},$$

так как сумма выпуклых множеств K_1^*, K_2^* есть выпуклое множество. $\rhd$

8. K_1, K_2 — выпукл. замкн. конусы $\Rightarrow (K_1 \cap K_2)^* = \overline{K_1^* + K_2^*}$.

Отметим, что убрать замыкание в последней формуле нельзя. Согласно т. о втором сопряженном конусе формула 8 может быть переписана в виде: $8'$. $(K_1^* \cap K_2^*)^* = \overline{K_1 + K_2}$.

Пример. Два выпуклых замкнутых конуса, сумма которых есть незамкнутый конус.

$\lhd$ $K_1 = \operatorname{conev}\left\{\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + (x_3 - 1)^2 \le 1, x_2 = 1\} \cup 0\right\}$ — выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^3$, образованный кругом и точкой 0; K_2 — ось x_2 — выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^3$. Тогда $K_1 + K_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$ — открытое полупространство, объединенное с осью x_2 — незамкнутый конус. $\rhd$

Слева в формуле $8'$ стоит сопряженный конус — замкнутое множество, поэтому без замыкания множества $K_1 + K_2$ формула неверна.

Из определения отделимости множеств следует, что если два непустых выпуклых конуса K_1 и K_2 отделимы, то

$$\exists\ \lambda \in X^*,\ \ \lambda \neq 0 : \inf_{a \in K_1} \langle \lambda, a \rangle \geq \sup_{b \in K_2} \langle \lambda, b \rangle.$$

Поскольку $0 \in K_1 \cap K_2$, то $\inf\limits_{a \in K_1} \langle \lambda, a \rangle \geq 0 \geq \sup\limits_{b \in K_2} \langle \lambda, b \rangle$ и, значит, разделяющая гиперплоскость проходит через 0.

Лемма

X — нормированное пространство, $A \subset X$, $\lambda \neq 0$ — линейный функционал : $\inf\limits_{a \in A} \langle \lambda, a \rangle \geq c \Rightarrow \langle \lambda, a \rangle > c \;\forall\; a \in \operatorname{int} A$. Иными словами, ненулевой линейный функционал не может достигать минимума (также максимума) во внутренней точке множества.

$\lhd$ Предположим, что $\exists\; a_0 \in \operatorname{int} A : \langle \lambda, a_0 \rangle = c$. Возьмем любой вектор $v \in X : \langle \lambda, v \rangle < 0$ (такой вектор $\exists$, ибо $\lambda \neq 0$). Тогда при малом $\varepsilon > 0$ точка $a_0 + \varepsilon v \in A$, и
$\langle \lambda, a_0 + \varepsilon v \rangle = \langle \lambda, a_0 \rangle + \varepsilon \langle \lambda, v \rangle = c + \varepsilon \langle \lambda, v \rangle < c$ — противоречие. $\rhd$

Теорема (Дубовицкого-Милютина о непересечении конусов)

$K_0, K_1, \dots, K_m$ — непустые выпуклые конусы, причем $K_1 \setminus \{0\}, \dots, K_m \setminus \{0\}$ открыты $\Rightarrow K_0 \cap K_1 \cap \dots \cap K_m = 0$ $\Leftrightarrow \exists\ \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in K_0^* \times K_1^* \times \dots \times K_m^*,\ \lambda \neq 0:$

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0. \qquad (*)$$

$\triangleleft$ Достаточность. Пусть $\exists\ \lambda \in K_0^* \times K_1^* \times \dots \times K_m^*,\ \lambda \neq 0:$ выполнено уравнение $(*)$. Предположим противное, что $\exists\ x \in K_0 \cap K_1 \cap \dots \cap K_m,\ x \neq 0$ $(x \in \operatorname{int} K_i,\ i = 0, 1, \dots, m)$. Если все $\lambda_i = 0,\ i = 1, \dots, m$, то из $(*)$ $\lambda_0 = 0$ — противоречие. Значит, $\exists\ \lambda_s \neq 0,\ s \in \{1, \dots, m\}$. Поскольку $\inf_{x \in K_s} \langle \lambda_s, x \rangle \geq 0$, то по лемме для $x \in \operatorname{int} K_s : \langle \lambda_s, x \rangle > 0 \overset{\lambda_i \in K_i^*}{\Rightarrow} \sum\limits_{i=0}^{m} \langle \lambda_i, x \rangle > 0$ (все слагаемые неотрицательны, и по крайней мере одно положительно) $\Rightarrow \left\langle \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i, x \right\rangle > 0$ — противоречие с $(*)$.

Необходимость. Рассмотрим конусы $K := K_1 \times \ldots \times K_m$ и $D := \{\overline{x} = (x, \ldots, x) \in \underbrace{K_0 \times \ldots \times K_0}_{m}\}$ — диагональ конуса K_0^m

$\Rightarrow D \cap \operatorname{int} K = \emptyset$ (если $\exists\ (x, \ldots, x) \in D \cap \operatorname{int} K$, то $x \in K_0 \cap \operatorname{int} K_1 \cap \ldots \cap \operatorname{int} K_m$ — что невозможно).

По т. отделимости $\exists\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq 0$:

$$\inf_{\overline{x} \in K} \langle \lambda, \overline{x} \rangle \overset{\text{для конусов}}{\geq} 0 \geq \sup_{\overline{x} \in D} \langle \lambda, \overline{x} \rangle \Leftrightarrow \inf_{\overline{x} \in K} \sum_{i=1}^{m} \langle \lambda_i, x_i \rangle \overset{a}{\geq} 0 \overset{b}{\geq} \sup_{x \in K_0} \sum_{i=1}^{m} \langle \lambda_i, x \rangle$$

$(a) \Rightarrow \inf\limits_{x_i \in K_i} \langle \lambda_i, x_i \rangle \geq 0$ (можно брать точки $\overline{x} = (0, \ldots, \underset{i}{x_i}, \ldots, 0)$)

$\Rightarrow \lambda_i \in K_i^*$, $i = 1, \ldots, m$. Обозначим $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = -\lambda_0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$.

$$(b) \Rightarrow 0 \geq \sup_{x \in K_0} \left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i, x \right\rangle \Leftrightarrow 0 \geq \sup_{x \in K_0} \langle -\lambda_0, x \rangle$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq -\inf_{x \in K_0} \langle \lambda_0, x \rangle \Leftrightarrow \inf_{x \in K_0} \langle \lambda_0, x \rangle \geq 0 \Rightarrow \lambda_0 \in K_0^*. \ \triangleright$$

Теорема

$K_0, K_1, \ldots, K_m$ — непустые выпуклые конусы, причем $K_1 \setminus \{0\}, \ldots, K_m \setminus \{0\}$ открыты, $K_0 \cap K_1 \cap \ldots \cap K_m \neq 0$ $\Rightarrow (K_0 \cap K_1 \cap \ldots \cap K_m)^* = K_0^* + K_1^* + \ldots + K_m^*$.

$\lhd$ Пусть $y \in K_0^* + \ldots + K_m^* \Rightarrow y = \sum\limits_{i=0}^{m} y_i$, где $y_i \in K_i^*$, $i = 0, \ldots, m$. Поскольку $y_i \in K_i^*$, то $\langle y_i, x \rangle \geq 0 \ \forall \ x \in K_i$ (в том числе и для $x \in K_0 \cap \ldots \cap K_m$). Значит,

$$\left\langle \sum_{i=0}^{m} \lambda_i, x \right\rangle \geq 0 \ \forall \ x \in K_0 \cap \ldots \cap K_m \Leftrightarrow y \in (K_0 \cap \ldots \cap K_m)^*.$$

Пусть $\lambda \in (K_0 \cap \ldots \cap K_m)^*$. Надо представить $\lambda = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i$, где $\lambda_i \in K_i^*$, $i = 0, \ldots, m$. Считаем $\lambda \neq 0$ (иначе имеется тривиальное разложение: $0 = 0 + \ldots + 0$). Рассмотрим конус $K_{m+1} := \{x \mid \langle \lambda, x \rangle < 0\}$ — открытое полупространство. Тогда $K_0 \cap \ldots \cap K_{m+1} = \emptyset$ (иначе $\exists\ x \in K_0 \cap \ldots \cap K_m \Rightarrow \langle \lambda, x \rangle \geq 0$, и $x \in K_{m+1} \Rightarrow \langle \lambda, x \rangle < 0$ — противоречие). По т. Д-М $\exists\ \lambda_i \in K_i^*$, $i = 0, \ldots, m+1$, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{m+1}) \neq 0 : \sum\limits_{i=0}^{m+1} \lambda_i = 0$. Поскольку $K_{m+1}^* = \{\lambda_{m+1} = -\alpha\lambda \mid \alpha \geq 0\}$ (проверьте!), то $\lambda_{m+1} = -\alpha\lambda$ $(\alpha \geq 0)$, т. е. $\alpha\lambda_{m+1} = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i$. Если $\alpha = 0$, то $\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$ и хотя бы один из этих функционалов ненулевой. Но тогда опять по т. Д-М получаем, что $K_0 \cap \ldots \cap K_m = 0$ — противоречие.

Значит, $\alpha > 0$ и $\lambda_{m+1} = \frac{1}{\alpha} \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i \in K_0^* + \ldots + K_m^*$. $\triangleright$