Глава 1

Конечномерные задачи

1 Конечномерные гладкие задачи без ограничений

В этом параграфе даются необходимые и достаточные условия экстремума функций одной и нескольких переменных.

1.1 Постановка задачи

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция n действительных переменных, обладающая некоторой гладкостью. Под гладкостью мы понимаем определенную дифференцируемость функции. Если функция f дифференцируема k раз в точке $\hat{x}$, мы пишем $f \in D^k(\hat{x})$. *Гладкой конечномерной экстремальной задачей без ограничений* называется следующая задача:

$$f(x) \to \text{extr}.$$

При решении задачи надо найти не только абсолютные (глобальные) экстремумы (минимумы и максимумы) функции, но и локальные экстремумы.

Точка $\hat{x}$ является *точкой локального минимума* (максимума) функции f, если существует окрестность $U_\varepsilon = \{x \mid |x - \hat{x}| < \varepsilon\}$ точки $\hat{x}$ такая, что $f(x) \geq f(\hat{x})$ $\big(f(x) \leq f(\hat{x})\big)$ для любой точки x из этой окрестности. При этом мы пишем $\hat{x} \in \text{locmin} f$ $(\hat{x} \in \text{locmax} f)$, а если речь идет о минимуме или максимуме, то пишем $\hat{x} \in \text{locextr} f$.

1.2 Необходимые и достаточные условия экстремума

1.2.1 Функции одной переменной

Теорема 1 (Ферма). *Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция одного действительного переменного. Если $\hat{x} \in locextrf$ — точка локального экстремума функции f и функция $f \in D(\hat{x})$ дифференцируема в точке $\hat{x}$, то*

$$f'(\hat{x}) = 0.$$

Это соотношение мы называем *условием стационарности* или необходимым условием экстремума I порядка. Точки, удовлетворяющие условию стационарности, называются *стационарными*.

Доказательство. По определению дифференцируемости функции

$$f(\hat{x}+h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})h + r(h), \quad r(h) = o(h) = o(1)h$$

при малых h. Значит, $f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) = (f'(\hat{x}) + o(1))h$.

Если бы $f'(\hat{x}) \neq 0$, то при h достаточно близких к нулю, величина $f'(\hat{x})+o(1)$ имела бы знак $f'(\hat{x})$, поскольку $o(1) \to 0$ при $h \to 0$. Само же h может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, разность $f(\hat{x}+h) - f(\hat{x})$ может быть как меньше, так и больше нуля. Это противоречит тому, что $f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) \geq 0$ при $\hat{x} \in \mathrm{locmin} f$ и $f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) \leq 0$ при $\hat{x} \in \mathrm{locmax} f$. $\triangleright$

Геометрически теорема Ферма утверждает, что в точке экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику горизонтальна.

Теорема Ферма дает необходимое условие I порядка для существования локального экстремума. Сформулируем необходимые и достаточные условия экстремума I–II порядка.

Теорема 2. `Необходимые условия экстремума`: *если* $\hat{x} \in locmin\, f$ *— точка локального минимума функции* f *и* f *дважды дифференцируема в точке* $\hat{x}$ $\big(f \in D^2(\hat{x})\big)$, *то*

$$f'(\hat{x}) = 0, \qquad f''(\hat{x}) \geq 0.$$

`Достаточные условия экстремума`: *если*

$$f'(\hat{x}) = 0, \qquad f''(\hat{x}) > 0,$$

то $\hat{x} \in locmin\, f$ *— точка локального минимума функции* f.

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})h + \frac{1}{2}f''(\hat{x})h^2 + r(h), \quad r(h) = o(h^2).$$

Необходимость. Пусть $\hat{x} \in \mathrm{locmin} f$. Тогда по необходимому условию экстремума I порядка для функций одной переменной — теореме Ферма — $f'(\hat{x}) = 0$. Следовательно, по формуле Тейлора

$$f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) = \frac{1}{2}f''(\hat{x})h^2 + r(h).$$

Поскольку $\hat{x} \in \mathrm{locmin}\, f$, то $f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) \geq 0$ при достаточно малых h. Поэтому

$$\frac{1}{2}f''(\hat{x})h^2 + r(h) \geq 0.$$

Разделим обе части последнего неравенства на h^2 и устремим h к нулю. Поскольку $\dfrac{r(h)}{h^2} \to 0$, то получим, что $f''(\hat{x}) \geq 0$.

Достаточность. Пусть $f'(\hat{x}) = 0$, $f''(\hat{x}) > 0$. Тогда по формуле Тейлора

$$f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) = \frac{1}{2}f''(\hat{x})h^2 + r(h).$$

Поскольку $r(h) = o(h^2)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$: $-\varepsilon h^2 < r(h) < \varepsilon h^2$ при $|h| < \delta$. Следовательно,

$$f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) \geq \left(\frac{f''(\hat{x})}{2} - \varepsilon\right)h^2 \geq 0$$

при $\varepsilon \leq \frac{f''(\hat{x})}{2}$. Значит, $\hat{x} \in \mathrm{locmin}\, f$. $\triangleright$

Для локального максимума неравенства имеют противоположный вид: $f''(\hat{x}) \le 0$ и $f''(\hat{x}) < 0$ соответственно.

Теоремы 1 и 2 допускают обобщения на конечномерный и бесконечномерный случаи (см. соответственно Глава I, п. 1.2.2 и § 6).

В одномерном случае можно дать почти исчерпывающий ответ на вопрос о том, является ли данная точка $\hat{x}$ локальным экстремумом или нет.

Теорема 3. `Необходимые условия экстремума`: *если $\hat{x} \in \mathrm{locmin}\, f$ — точка локального минимума функции f и функция f n раз дифференцируема в точке $\hat{x}$ $\big(f \in D^n(\hat{x})\big)$, то либо $f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(n)}(\hat{x}) = 0$, либо*

$$f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(2m-1)}(\hat{x}) = 0, \quad f^{(2m)}(\hat{x}) > 0 \tag{1}$$

при некотором $m:\ 2 \le 2m \le n$.

`Достаточные условия экстремума`: *если выполняется условие (1), то $\hat{x} \in \mathrm{locmin}\, f$ — точка локального минимума функции f.*

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(\hat{x}+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\hat{x})}{k!} h^k + r(h),\ r(h) = o(h^n)\ \left(\frac{r(h)}{h^n} \to 0 \text{ при } h \to 0\right).$$

Необходимость при $n = 1$ следует из теоремы Ферма. Пусть далее $n > 1$. Тогда либо $f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(n)}(\hat{x}) = 0$ (в этом случае выполняется утверждение теоремы), либо $f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(l-1)}(\hat{x}) = 0$, $f^{(l)}(\hat{x}) \ne 0$, $l \le n$. Значит,

$$f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) = \sum_{k=l}^{n} \frac{f^{(k)}(\hat{x})}{k!} h^k + r(h) = \frac{f^{(l)}(\hat{x})}{l!} h^l + r_1(h),\ r_1(h) = o(h^l).$$

Поскольку $\hat{x} \in \mathrm{locmin} f$, то $f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) \ge 0$ при достаточно малых h. Поэтому

$$\frac{f^{(l)}(\hat{x})}{l!} h^l + r_1(h) \ge 0.$$

Так как $f^{(l)}(\hat{x}) \ne 0$, то отсюда следует, что l — четно и $f^{(l)}(\hat{x}) > 0$. Действительно, если бы l было нечетно, то слагаемое $\dfrac{f^{(l)}(\hat{x})}{l!} h^l$, а вместе с ним и сумма $\dfrac{f^{(l)}(\hat{x})}{l!} h^l + r_1(h)$ принимали бы знаки как больше, так и меньше нуля при разных знаках h. А это противоречит условию $\hat{x} \in \mathrm{locmin} f$.

Достаточность. Пусть $f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(2m-1)}(\hat{x}) = 0,\ f^{2m}(\hat{x}) > 0$. Тогда по формуле Тейлора

$$f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) = \frac{f^{(2m)}(\hat{x})}{(2m)!} h^{2m} + r_2(h), \quad r_2(h) = o(h^{2m}) \text{ при } h \to 0.$$

Поскольку $f^{(2m)}(\hat{x}) > 0$, то $\frac{f^{(2m)}(\hat{x})}{(2m)!} h^{2m} + r_2(h) > 0$ при достаточно малых h, а, значит, и $f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) \geq 0$, т. е. $\hat{x} \in \mathrm{locmin} f$. $\triangleright$

Для локального максимума неравенство имеет противоположный вид: $f^{(2m)}(\hat{x}) < 0$.

1.2.2 Функции нескольких переменных

Сформулируем необходимое условие экстремума I порядка в конечномерной задаче без ограничений, являющееся аналогом теоремы Ферма.

Теорема 1. *Если $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \in locextrf$ — точка локального экстремума функции n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ и функция $f \in D(\hat{x})$ дифференцируема в точке $\hat{x}$, то*

$$f'(\hat{x}) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_n} = 0 \right).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию одной переменной $\varphi(x_i) = f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{i-1}, x_i, \hat{x}_{i+1}, \ldots, \hat{x}_n)$. Поскольку $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \in \mathrm{locextr}\, f$, то $\hat{x}_i \in \mathrm{locextr}\, \varphi$. Кроме того $\varphi \in D(\hat{x}_i)$. По необходимому условию экстремума для функций одной переменной — теореме Ферма

$$\varphi'(\hat{x}_i) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_i} = 0 \right). \ \triangleright$$

Сформулируем необходимые и достаточные условие экстремума II порядка в конечномерной задаче без ограничений. Предварительно напомним, что второй производной функции нескольких переменных является симметричная матрица вторых производных

$$A = f''(\hat{x}) = \left(\frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n} = \left(a_{ij} \right)_{i,j=1}^{n},$$

а также приведем определения знакоопределенностей симметричных матриц.

Матрица A называется *неотрицательно определенной* ($A \geq 0$), если

$$\langle Ah, h\rangle \geq 0 \ \forall\ h \in \mathbb{R}^n \quad \Big(\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}h_ih_j \geq 0 \ \forall\ h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n \Big).$$

Матрица A называется *положительно определенной* ($A > 0$), если

$$\langle Ah, h\rangle > 0 \quad \forall\ h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0.$$

Матрица A называется *строго положительно определенной*, если существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\langle Ah, h\rangle \geq \alpha\|h\|^2 \quad \forall\ h \in \mathbb{R}^n.$$

Аналогично определяются неположительная и отрицательная матрицы.

Отметим, что в конечномерном пространстве условие положительной определенности симметричной матрицы A эквивалентно условию строгой положительности матрицы A.

$$\langle Ah, h\rangle > 0 \ \forall\ h{\in}\mathbb{R}^n,\ h \neq 0 \iff \exists\ \alpha > 0 \mid \langle Ah, h\rangle \geq \alpha|h|^2 \ \forall\ h{\in}\mathbb{R}^n.$$

В бесконечномерных пространствах это не так (см. Гл. 1, п.6.3, Пример 2), то есть условие положительной определенности не является условием строгой положительности.

Теорема 2. `Необходимые условия экстремума:` *если* $\hat{x} \in loc\min f$ — *точка локального минимума функции* f *и функция* f *дважды дифференцируема в точке* $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ $\big(f \in D^2(\hat{x})\big)$, *то*

$$f'(\hat{x}) = 0,\ \langle f''(\hat{x})h, h\rangle \geq 0 \quad \forall\ h \in \mathbb{R}^n.$$

`Достаточные условия экстремума:` *если*

$$f'(\hat{x}) = 0,\ \langle f''(\hat{x})h, h\rangle > 0 \quad \forall\ h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0,$$

то $\hat{x} \in loc\min f$ — *точка локального минимума функции* f.

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(\hat{x}+h) = f(\hat{x}) + \langle f'(\hat{x}), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f''(\hat{x})h, h\rangle + r(h), \quad r(h) = o(|h|^2).$$

Необходимость. Поскольку $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$, то по необходимому условию экстремума I порядка в конечномерной задаче без ограничений $f'(\hat{x}) = 0$. Поэтому в силу формулы Тейлора

$$f(\hat{x}+\lambda h) - f(\hat{x}) = \frac{\lambda^2}{2}\langle f''(\hat{x})h, h\rangle + r(\lambda h), \quad r(\lambda h) = o(|\lambda|^2)$$

при достаточно малых λ и фиксированном h. Поскольку $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$, то $f(\hat{x}+\lambda h) - f(\hat{x}) \geq 0$ при малых λ. Поэтому

$$\tfrac{\lambda^2}{2}\langle f''(\hat{x})h, h\rangle + r(\lambda h) \geq 0.$$

Разделим обе части последнего неравенства на λ^2 и устремим λ к нулю. Поскольку $\frac{r(\lambda h)}{\lambda^2} \to 0$, то получим, что

$$\langle f''(\hat{x})h, h\rangle \geq 0 \quad \forall\ h \in \mathbb{R}^n. \ \rhd$$

Достаточность. Так как $f'(\hat{x}) = 0$, то по формуле Тейлора

$$f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) = \frac{1}{2}\langle f''(\hat{x})h, h\rangle + r(h), \quad r(h) = o(|h|^2).$$

Поскольку в конечномерном пространстве условие положительности эквивалентно условию строгой положительности, то $\langle f''(\hat{x})h, h\rangle \geq \alpha|h|^2$ с некоторой константой $\alpha > 0$. Тогда из формулы Тейлора

$$\frac{1}{2}\langle f''(\hat{x})h, h\rangle + r(h) \geq 0$$

при достаточно малых h, так как $r(h) = o(|h|^2)$. Следовательно, $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$. $\rhd$

Замечание. Для квадратичных функционалов $Q(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ условие положительной определенности матрицы $A = f''(\hat{x}) = \big(a_{ij}\big)_{i,j=1}^{n}$ является достаточным условием абсолютного минимума функционала в стационарной точке.

Для локального максимума неравенства имеют противоположный вид: $\langle f''(\hat{x})h, h\rangle \leq 0$ и $\langle f''(\hat{x})h, h\rangle < 0$ соответственно.

1.2.3 Теорема Вейерштрасса и следствие из нее

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция n переменных. При исследовании вопроса о достижении функцией n переменных экстремума часто используется следующая теорема.

Теорема Вейерштрасса. [19, т.1, с.235] *Непрерывная функция на непустом ограниченном замкнутом подмножестве конечномерного пространства (компакте) достигает своих абсолютных максимума и минимума.*

Выделим простое следствие из этой теоремы, которое часто будем использовать.

Следствие. *Если функция f непрерывна на $\mathbb{R}^n$ и $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$, то она достигает своего абсолютного минимума на любом замкнутом подмножестве из $\mathbb{R}^n$ (не обязательно конечном).*

Аналогичное утверждение для абсолютного максимума выполняется, если $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = -\infty$.

1.2.4 Критерий Сильвестра

Знакоопределенность матрицы устанавливается с помощью критерия Сильвестра.

Напомним, что *последовательными главными минорами* матрицы A называются определители $A_{1\ldots k} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ . & \ldots & . \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk}\end{pmatrix}$, $k = 1, \ldots, n$.

Главным минором $A_{i_1\ldots i_k}$ матрицы A называется определитель матрицы размера $k\times k$, составленной из строк и столбцов с номерами $i_1, \ldots, i_k$, $1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n$: $A_{i_1\ldots i_k} := \det\begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \ldots & a_{i_1 i_k} \\ . & \ldots & . \\ a_{i_k i_1} & \ldots & a_{i_k i_k}\end{pmatrix}$, $k = 1, \ldots, n$.

Теорема (см. [10, с. 260]). *Пусть A — симметричная матрица. Тогда*

1. *Матрица A положительно определена* ($A > 0$) *тогда и только тогда, когда все ее последовательные главные миноры положительны, т. е. $A_{1\ldots k} > 0$, $k = 1, \ldots, n$.*

2. *Матрица A отрицательно определена ($A < 0$) тогда и только тогда, когда все ее последовательные главные миноры чередуют знак, начиная с отрицательного, т. е.* $(-1)^k A_{1\dots k} > 0$, $k = 1, \dots, n$.

3. *Матрица A неотрицательно определена ($A \geq 0$) тогда и только тогда, когда все ее главные миноры неотрицательны, т. е.* $A_{i_1\dots i_k} \geq 0$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$, $k = 1, \dots, n$.

4. *Матрица A неположительно определена ($A \leq 0$) тогда и только тогда, когда все ее главные миноры чередуют знак, начиная с неположительного, т. е.* $(-1)^k A_{i_1\dots i_k} \geq 0$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$, $k = 1, \dots, n$.

1.3 Примеры

Пример 1. $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 \to \mathrm{extr}$.

Решение. Необходимое условие локального экстремума I порядка:

$$f'(x) = 0 \iff \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 0 \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2 = 0; \\ -x_1 + 2x_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим единственную стационарную точку $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1, 0)$. Для проверки условий II порядка выпишем матрицу вторых производных и проверим ее знакоопределенность:

$$A = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = 2 > 0, \ A_{12} = \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0.$$

Матрица A по критерию Сильвестра положительно определена. По достаточному условию экстремума функции нескольких переменных точка $\hat{x}$ доставляет локальный минимум функции f.

Поскольку функционал линейно-квадратичный), то точка $\hat{x}$ будет доставлять не только локальный, но и абсолютный минимум, $S_{\mathrm{absmin}} = f(1, 0) = -1$.

Покажем, что $S_{\mathrm{absmax}} = +\infty$. Действительно, для $x_n = (n, 0)$ $f(x_n) = n^2 - 2n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Ответ. $(1, 0) \in \mathrm{absmin}$, $S_{\mathrm{absmin}} = -1$; $S_{\mathrm{absmax}} = +\infty$.

Пример 2. $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 \to \mathrm{extr}.$
Решение. Необходимое условие локального экстремума I порядка:

$$f'(\hat{x}) = 0 \iff \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 0 \iff \begin{cases} 4x_1^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0, \\ 4x_2^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим $4x_1^3 - 4x_2^3 = 0 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Подставляя $x_2 = x_1$ в первое уравнение системы, находим x_1 и x_2: $4x_1^3 - 2x_1 - 2x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1^3 = x_1 \Leftrightarrow x_1 = -1; 0; 1$, соответственно $x_2 = -1; 0; 1$. Получили три стационарные точки $\hat{x}^1 = (1, 1)$, $\hat{x}^2 = (-1, -1)$, $\hat{x}^3 = (0, 0)$. Для проверки условий II порядка выписываем матрицу вторых производных в каждой точке стационарности:

$$A = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12x_2^2 - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A\Big|_{(1,1)} = A\Big|_{(-1,-1)} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, \ A\Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ по критерию Сильвестра положительно определена: $A_1 = 10 > 0$, $A_{12} = \det \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = 100 - 4 = 96 > 0$. По достаточному условию локального экстремума функции нескольких переменных точки $(1, 1)$ и $(-1, -1)$ доставляют локальный минимум функции f. Поскольку

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x_1, x_2) = \lim_{|x| \to \infty} \left(x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2 \right) = +\infty,$$

то по следствию из теоремы Вейерштрасса абсолютный минимум в задаче должен достигаться. Значит, эти точки будут доставлять не только локальный, но и абсолютный минимум, $S_{\mathrm{absmin}} = f(1, 1) = -2$.

Матрица $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ по критерию Сильвестра не является ни положительно, ни отрицательно определенной: $A_1 = -2 < 0$, $A_{12} = \det \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = 0$. Она является неположительно определенной матрицей ($A \leq 0$) и не является неотрицательно определенной матрицей ($A \ngeq 0$). Следовательно, не выполняется необходимое условие локального минимума. Поэтому $\hat{x}^3 = (0,0) \notin \operatorname{locmin} f$. Проверим, доставляет ли точка локальный максимум. Поскольку $f(h,-h) = 2h^4 > 0 = f(\hat{x}^3)$ при малых $h \neq 0$, то $\hat{x}^3 \notin \operatorname{locmax} f$. Таким образом, точка $(0,0) \notin \operatorname{locextr} f$.

Выше показали, что $S_{\text{absmax}} = +\infty$.

Ответ. $(0,0) \notin$ locextr; $(-1,-1), (1,1) \in$ absmin, $S_{\text{absmin}} = -2$; $S_{\text{absmax}} = +\infty$.

Приведем несколько примеров различных свойств экстремумов в задаче без ограничений.**Пример 4.** *Абсолютные минимумы и максимумы достигаются в бесконечном числе точек*:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x.$$

Пример 5. *Функция ограничена, абсолютный максимум достигается, минимум — нет*:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 6. *Функция ограничена, но абсолютные максимум и минимум не достигаются*:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Пример 7. *Функция ограничена, имеет стационарные точки, но абсолютные максимум и минимум не достигаются*:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (\operatorname{arctg} x)^3.$$

Пример 8. *Функция ограничена, имеет локальные максимумы и минимумы, но абсолютные максимум и минимум не достигаются:*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{arctg} x \cdot \sin x.$$

Пример 9. *Ограничение функции, заданной на плоскости, на любую прямую, проходящую через начало координат, имеет в нуле локальный минимум, но вместе с тем начало координат не является точкой локального минимума:*

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1,x_2) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - 3x_2^2).$$

Действительно, на любой прямой вида $x_1 = \alpha x_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, функция $f(\alpha x_2, x_2) = (\alpha x_2 - x_2^2)(\alpha x_2 - 3x_2^2) = x_2^2(\alpha - x_2)(\alpha - 3x_2) = x_2^2(\alpha^2 - 4\alpha x_2 + 3x_2^2) \geq 0 = f(0)$ при малых x_2. Значит, на любой прямой вида $x_1 = \alpha x_2$ функция f имеет локальный минимум в нуле. Аналогично на прямой $x_2 = 0$ функция $f(x_1, 0) = x_1^2$ имеет минимум в нуле. С другой стороны, на параболе $x_1 = 2x_2^2$ функция $f(2x_2^2, x_2) = -x_2^4 < 0$ в любой окрестности нуля. То есть точка $\hat{x} = 0$ не является точкой локального минимума функции f.