$$J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t))\, dt \to \mathrm{extr}; \qquad (P)$$

$$x^{(k)}(t_j) = x_{kj},\ k = 0, 1, \dots, n-1,\ j = 0, 1,$$

$x(\cdot) \in C^n[t_0, t_1]$, $[t_0, t_1]$ — фиксированный отрезок, $t_0 < t_1$.
Условия на концах. Допустимые функции, $D(P)$.

Определение

Допустимая функция $\hat{x}$ доставляет слабый локальный минимум в задаче (P) ($\hat{x} \in \mathrm{wlocmin}\, P$), если $\exists\ \delta > 0$: $J(x(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot))\ \forall\ x(\cdot) \in D(P) : \|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^n[t_0,t_1]} < \delta$.

$$\|y\|_{C^n[t_0,t_1]} := \max\left\{\|y\|_{C[t_0,t_1]}, \|\dot{y}\|_{C[t_0,t_1]}, \dots, \|y^{(n)}\|_{C[t_0,t_1]}\right\}$$

Теорема

$\hat{x} \in \operatorname{wlocextr} P$, $L, L_x, \ldots, L_{x^{(n)}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}\ldots\hat{x}^{(n)}}))$, $\hat{L}_{x^{(k)}} \in C^k[t_0, t_1]$, $k = 1, \ldots, n \Rightarrow$ выполнено уравнение Эйлера–Пуассона

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \hat{L}_{x^{(k)}}(t) = 0 \quad \forall\, t \in [t_0, t_1].$$

$$\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}\ldots\hat{x}^{(n)}} := \left\{ (t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \ldots, \hat{x}^{(n)}(t)) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid t \in [t_0, t_1] \right\}.$$

$$n = 1 \Rightarrow -\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0;$$

$$n = 2 \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \hat{L}_{\ddot{x}} - \frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x = 0.$$

$\lhd$ Возьмем $h \in C_0^n[t_0,t_1] := \{h \in C^n[t_0,t_1] \mid h^{(k)}(t_0) = h^{(k)}(t_1) = 0,$ $k = 0,1,\ldots,n-1\}$. Положим

$$\varphi(\lambda) := J(\hat{x} + \lambda h) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \hat{x} + \lambda h, \dot{\hat{x}} + \lambda \dot{h}, \ldots, \hat{x}^{(n)} + \lambda h^{(n)})\, dt.$$

$\hat{x} \in \mathrm{wlocextr}\, P \Rightarrow \lambda = 0 \in \mathrm{locextr}\, \varphi \overset{\text{по т. Ферма}}{\Rightarrow} \varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{k=0}^{n} \hat{L}_{x^{(k)}} h^{(k)} \Big) dt = 0 \quad \forall\, h \in C_0^n[t_0,t_1]. \tag{1}$$

Проинтегрируем по частям k раз каждое слагаемое в (1):

$$\int_{t_0}^{t_1} \hat{L}_{x^{(k)}} h^{(k)}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \hat{L}_{x^{(k)}}\, dh^{(k-1)} = \hat{L}_{x^{(k)}}(t) h^{(k-1)}(t) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} h^{(k-1)}\, d\hat{L}_{x^{(k)}} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Big(-\frac{d}{dt} \hat{L}_{x^{(k)}} \Big) h^{(k-1)}\, dt = \ldots = \int_{t_0}^{t_1} \Big((-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \hat{L}_{x^{(k)}} \Big) h\, dt.$$

Тогда соотношение (1) перепишется в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \hat{L}_{x^{(k)}} \right) h\, dt = 0 \quad \forall\ h \in C_0^n[t_0, t_1].$$

Лемма (Лагранжа)

$a(\cdot) \in C[t_0, t_1]$ и $\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)h(t)\, dt = 0\ \forall\ h \in C_0^1[t_0, t_1] \Rightarrow a(t) \equiv 0.$

Отсюда по основной лемме вариационного исчисления (лемме Лагранжа), в которой в формулировке вместо пространства $C_0^1[t_0, t_1]$ можно было взять пространство $C_0^n[t_0, t_1]$, а при доказательстве соответственно взять функцию $h(t) = \begin{cases} (t - \tau_0)^{n+1}(\tau_1 - t)^{n+1}, & t \in [\tau_0, \tau_1], \\ 0, & t \notin [\tau_0, \tau_1]. \end{cases}$

следует выполнение уравнения Эйлера–Пуассона. $\triangleright$

Пример. $J(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr};$ $x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = 1.$

Уравнение Эйлера–Пуассона:

$$\frac{d^2}{dt^2}L_{\ddot{x}} - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2}2\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow x^{(4)} = 0.$$

Общее решение $x = C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4$. Неизвестные константы C_1, C_2, C_3, C_4 находим из условий на концах
$x(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0,$
$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0,$

$$\begin{cases} x(1) = 0, \\ \dot{x}(1) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 3C_1 + 2C_2 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = t^3 - t^2$.

Пример. $J(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr};$
$x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = 1.$

Возьмем $x \in D(P)$, обозначим $h := x - \hat{x}$. Тогда $h \in C_0^2[0,1]$. Для задачи с квадратичным функционалом и линейными ограничениями

$$J(x) - J(\hat{x}) = J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) = J(h) = \int\limits_0^1 \ddot{h}^2\,dt \geq 0.$$

Значит, $\hat{x} \in \mathrm{absmin}$, $S_{\mathrm{absmin}} = \int\limits_0^1 \ddot{\hat{x}}^2 dt =$

$$= \int\limits_0^1 (6t-2)^2\,dt = \int\limits_0^1 (36t^2 - 24t + 4)\,dt = 12t^3 - 12t^2 + 4t\,\Big|_0^1 = 4.$$

Пример. $J(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr};$

$$x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = 0,\ \ \dot{x}(1) = 1.$$

Покажем, что $S_{\mathrm{absmax}} = +\infty$. Действительно, возьмем последовательность $x_n(\cdot) = \hat{x}(\cdot) + nh(\cdot) \in D(P)$, $h \not\equiv 0$.
Для допустимости необходимо, чтобы $h \in C_0^2[0,1]$, например, $h(t) = t^2(t-1)^2$. Тогда

$$J(x_n) = \int\limits_0^1 \ddot{x}_n^2\,dt = \int\limits_0^1 \left(\ddot{\hat{x}} + n\ddot{h}\right)^2 dt \to +\infty \text{ при } n \to +\infty.$$

Ответ. Допустимая экстремаль $t^3 - t^2 \in \mathrm{absmin}$, $S_{\mathrm{absmin}} = 4$; $S_{\mathrm{absmax}} = +\infty$.