$$B_0(\xi) \to \min;\ B_i(\xi) \le 0,\ i=1,\dots,m',\ B_i(\xi)=0,\ i=m'+1,\dots,m,\ (P)$$

$$\dot{x}_\alpha(t) - \varphi(t, x(t)) = 0 \quad \forall\, t \in \Delta, \qquad (1)$$

$\xi = (x(\cdot), t_0, t_1)$, $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)) \in C^1(\Delta, \mathbb{R}^n)$,
Δ — заданный конечный отрезок, $t_0, t_1 \in \Delta$, $t_0 < t_1$.

$$B_i(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt + l_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),\ i = 0, 1, \dots, m.$$

Допустимый элемент, $D(P)$. Дифференциальная связь может быть наложена не на все координаты вектор-функции $x(\cdot)$, а только на некоторые, для определенности на первые k координат: $\dot{x}_i(t) - \varphi_i(t, x(t)) = 0$, $i = 1, \dots, k$. Обозначим далее $x = (x_\alpha, x_\beta)$, где $x_\alpha = (x_1, \dots, x_k)$, $x_\beta = (x_{k+1}, \dots, x_n)$. Если дифференциальная связь отсутствует, то $k = 0$ и $x = x_\beta$.

Поскольку вместо $\dot{x}_\alpha$ в функции $f_i(t, x, \dot{x})$ можно подставить из (1) равное ему выражение $\varphi(t, x)$, то в дальнейшем считаем, что $f_i = f_i(t, x, \dot{x}_\beta)$. Частным случаем задачи (P) является задача, в которой один из концов t_0 или t_1 — подвижный, а другой закреплен или оба конца отрезка интегрирования $[t_0, t_1]$ фиксированы.

Определение

Допустимый элемент $\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1)$ доставляет слабый локальный минимум ($\hat{\xi} \in \mathrm{wlocmin}\, P$), если $\exists\ \delta > 0$:
$B_0(\xi) \geq B_0(\hat{\xi})\ \forall\ \xi = (x(\cdot), t_0, t_1) \in D(P)$: $\|\xi - \hat{\xi}\|_{C^1(\Delta)\times\mathbb{R}^2} < \delta$
$\Leftrightarrow \|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1(\Delta)} < \delta$, $|t_0 - \hat{t}_0| < \delta$, $|t_1 - \hat{t}_1| < \delta$.

Теорема (Эйлера–Лагранжа)

$\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) \in \mathrm{wlocextr}\, P;\ f_i, f_{ix}, f_{i\dot{x}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}))$,
$\varphi, \varphi_x \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}}))$, $l_i \in C^1(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1))$, $i = 0, 1, \ldots, m$.
Тогда $\exists\ (\lambda, p) \in \mathbb{R}^{m+1} \times C^1(\Delta, \mathbb{R}^k)$, $\lambda \neq 0$:
для функции Лагранжа $\mathscr{L}(x(\cdot), t_0, t_1) =$

$$\int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\Big(\overbrace{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x}_\beta)}^{f} + p(t)(\dot{x}_\alpha - \varphi(t, x)) \Big)}_{L(t,x,\dot{x})} dt + \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i l_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))}_{l},$$

выполнены условия:

$a)$ стационарности по x — уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0\ \forall\ t \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} -\dot{p} - p\hat{\varphi}_{x_\alpha} + \hat{f}_{x_\alpha} = 0, \\ -\frac{d}{dt}\hat{f}_{\dot{x}_\beta} - p\hat{\varphi}_{x_\beta} + \hat{f}_{x_\beta} = 0; \end{cases}$$

Теорема (Эйлера–Лагранжа)

b) трансверсальности по x:

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)} \Leftrightarrow \begin{cases} p(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_\alpha(t_0)}, \\ \hat{f}_{\dot{x}_\beta}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_\beta(t_0)}, \end{cases}$$

$$\hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \Leftrightarrow \begin{cases} p(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x_\alpha(t_1)}, \\ \hat{f}_{\dot{x}_\beta}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x_\beta(t_1)}; \end{cases}$$

c) стационарности по подвижным концам:

$$\hat{\mathscr{L}}_{t_0} = 0 \Leftrightarrow -\hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_0) = 0,$$

$$\hat{\mathscr{L}}_{t_1} = 0 \Leftrightarrow \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)}\dot{\hat{x}}(\hat{t}_1) = 0;$$

d) дополняющей нежесткости: $\lambda_i B_i(\hat{\xi}) = 0, \ i = 1, \ldots, m'$;

e) неотрицательности: $\lambda_i \geq 0, \ i = 0, 1, \ldots, m'$.

◁ Доказательство основано на правиле множителей Лагранжа для гладких задач с ограничениями типа равенств и неравенств в нормированных пространствах. Поскольку $B_i = 0 \Leftrightarrow B_i \leq 0, -B_i \leq 0$, то в дальнейшем считаем, что у нас имеются только ограничения типа неравенств и $m' = m$. Покажем, что все условия теоремы о правиле множителей Лагранжа в полученной задаче

$$B_0(\xi) \to \min;\ B_i(\xi) \leq 0,\ i = 1, ..., m,\ F(\xi) = 0 \qquad (\tilde{P})$$

$$\Big(F(\xi) = F(x(\cdot), t_0, t_1) = \dot{x}_\alpha(t) - \varphi(t, x(t))\Big)$$

выполняются. Здесь $X = C^1(\Delta, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^2$, $Y = C(\Delta, \mathbb{R}^k)$. X, Y — банаховы пространства. Из заданной непрерывной дифференцируемости функций следует, что функционалы $B_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, и отображение $F\colon X \to Y$, строго дифференцируемы в точке $\hat{\xi}$.

Покажем, что $\operatorname{Im} F'(\hat{\xi}) = Y := C(\Delta, \mathbb{R}^k)$ — замкнутое пространство. Тогда выполняется не только ослабленное условие регулярности ($\operatorname{Im} F'(\hat{\xi})$ — замкнут), но и условие регулярности ($\operatorname{Im} F'(\hat{\xi}) = Y$). Действительно, $F(\xi) = F(x(\cdot), t_0, t_1) = \dot{x}_\alpha(t) - \varphi(t, x(t)) \Rightarrow$

$$F'(\hat{\xi})[h(\cdot), \tau_0, \tau_1] = \dot{h}(t) - \hat{\varphi}_{x_\alpha}(t)h(t),$$

а система линейных дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами

$$\dot{h}(t) - \hat{\varphi}_{x_\alpha}(t)h(t) = y(t) \qquad (1)$$

имеет решение $\forall\ y(\cdot) \in C(\Delta, \mathbb{R}^k)$, определенное на Δ, с любым граничным условием в форме Коши $h(\hat{t}_0) = \gamma$. Таким образом, $\operatorname{Im} F'(\hat{\xi}) = C(\Delta, \mathbb{R}^k)$.
Все условия теоремы о правиле множителей Лагранжа в нормированных пространствах выполняются. По теореме

$$B_0(\xi) \to \min;\ B_i(\xi) \le 0,\ i = 1, ..., m,\ F(\xi) = 0. \qquad (\tilde{P})$$

$\exists\ (\lambda, y^*) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y^*$, $\lambda \neq 0$ при $\mathrm{Im}\, F'(\hat{\xi}) = Y$: для функции Лагранжа $\tilde{\mathscr{L}}(\xi) = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i B_i(\xi) + \langle y^*, F(\xi)\rangle = \tilde{\mathscr{L}}(x(\cdot), t_0, t_1) =$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x}_\beta)\, dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) + \langle y^*, \dot{x}_\alpha(t) - \varphi(t, x(t))\rangle$$

выполняются условия: a′) стационарности

$$\hat{\tilde{\mathscr{L}}}_\xi = 0 \Leftrightarrow \hat{\tilde{\mathscr{L}}}_x = 0 \ \left(\Leftrightarrow \hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{x_\alpha} = 0,\ \hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{x_\beta} = 0\right),\ \hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{t_0} = 0,\ \hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{t_1} = 0;$$

b′) дополняющей нежесткости: $\lambda_i B_i(\hat{\xi}) = 0,\ i = 1, \ldots, m$;
c′) неотрицательности: $\lambda_i \ge 0,\ i = 0, 1, \ldots, m$.

$$\hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{x_\alpha} = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \exists\ p \in C^1(\Delta, \mathbb{R}^k) : \langle y^*, y\rangle = \int_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} py\, dt\ \forall\ y \in C(\Delta)$$

и выполняются условия a)-b) теоремы для x_α.
Тогда $\tilde{\mathscr{L}} = \mathscr{L}$ и теорема будет доказана. Уравнения Эйлера и условия трансверсальности по x_β будут вытекать из условия $\tilde{\mathscr{L}}_{x_\beta} = 0$. Они выводятся как и для задачи Больца.

Функция Лагранжа

$$\tilde{\mathscr{L}} = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x}_\beta)dt + l(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) + \langle y^*, \dot{x}_\alpha(t) - \varphi(t, x(t))\rangle.$$

$$\dot{h}(t) - \hat{\varphi}_{x_\alpha}(t)h(t) = y(t),\ \ y(\cdot) \in C(\Delta, \mathbb{R}^k),\ \ h(\hat{t}_0) = \gamma. \qquad (1)$$

Имеем: $\hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{x_\alpha} = 0 \Leftrightarrow \hat{\tilde{\mathscr{L}}}_{x_\alpha}[h] = 0\ \forall\ h \in C^1(\Delta, \mathbb{R}^k) \Leftrightarrow$

$$\int\limits_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \hat{f}_{x_\alpha} h\, dt + \hat{l}_{x_\alpha(t_0)} h(\hat{t}_0) + \hat{l}_{x_\alpha(t_1)} h(\hat{t}_1) + \langle y^*, \dot{h}(t) - \hat{\varphi}_{x_\alpha}(t)h(t)\rangle = 0$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \langle y^*, y(\cdot)\rangle = -\int\limits_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} \hat{f}_{x_\alpha} h\, dt - \hat{l}_{x_\alpha(t_0)}\gamma - \hat{l}_{x_\alpha(t_1)} h(\hat{t}_1)\ \forall\ y,\ \forall\ \gamma \in \mathbb{R}^k. \ (2)$$

Определим функцию p из условий:

$$-\dot{p}(t) - p(t)\hat{\varphi}_{x_\alpha}(t) + \hat{f}_{x_\alpha}(t) = 0, \quad p(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x_\alpha(t_1)}. \qquad (3)$$

По т. $\exists$-ния и ! решения задачи Коши $\exists! p \in C^1(\Delta, \mathbb{R}^k)$.
Уравнение Эйлера по x_α и условие стационарности по x_α в точке $\hat{t}_1$ будет выполняться.

$$\dot h(t)-\hat\varphi_{x_\alpha}(t)h(t)=y(t),\ \ y(\cdot)\in C(\Delta,\mathbb{R}^k),\ \ h(\hat t_0)=\gamma. \qquad (1)$$

$$\langle y^*,y(\cdot)\rangle=-\int_{\hat t_0}^{\hat t_1}\hat f_{x_\alpha}h\,dt-\hat l_{x_\alpha(t_0)}\gamma-\hat l_{x_\alpha(t_1)}h(\hat t_1)\ \forall\, y,\ \forall\,\gamma\in\mathbb{R}^k. \ (2)$$

$$-\dot p(t)-p(t)\hat\varphi_{x_\alpha}(t)+\hat f_{x_\alpha}(t)=0,\quad p(\hat t_1)=-\hat l_{x_\alpha(t_1)}. \qquad (3)$$

$$\int\limits_{\hat t_0}^{\hat t_1}\frac{d}{dt}(ph)\,dt=\underline{p(\hat t_1)h(\hat t_1)-p(\hat t_0)h(\hat t_0)}=\int\limits_{\hat t_0}^{\hat t_1}(\dot ph+p\dot h)dt\overset{(3),(1)}{=}$$

$$=\int\limits_{\hat t_0}^{\hat t_1}\left(\hat f_{x_\alpha}h-p\hat\varphi_{x_\alpha}h+py+p\hat\varphi_{x_\alpha}h\right)dt=\underline{\int\limits_{\hat t_0}^{\hat t_1}\left(\hat f_{x_\alpha}h+py\right)dt}\overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\langle y^*,y\rangle=\int\limits_{\hat t_0}^{\hat t_1}py\,dt-p(\hat t_1)h(\hat t_1)+p(\hat t_0)h(\hat t_0)-\hat l_{x_\alpha(t_0)}\gamma-\hat l_{x_\alpha(t_1)}h(\hat t_1)\overset{(3)}{=}$$

$$=\int\limits_{\hat t_0}^{\hat t_1}py\,dt+\gamma\left(p(\hat t_0)-\hat l_{x_\alpha(t_0)}\right)\ \forall\ y\in C(\Delta,\mathbb{R}^k),\ \forall\ \gamma\in\mathbb{R}^k.$$

y и γ определяются независимо $\Rightarrow\langle y^*,y\rangle\not\mid\gamma\Rightarrow p(\hat t_0)=\hat l_{x_\alpha(t_0)}$

$$\Rightarrow\langle y^*,y\rangle=\int\limits_{\hat t_0}^{\hat t_1}py\,dt\Rightarrow\tilde{\mathscr{L}}=\mathscr{L}.\ \triangleright$$

Пример 1. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \text{extr};\ \int\limits_0^1 x\,dt = 0,\ x(1) = 1.$

Функция Лагранжа $\mathscr{L} = \int\limits_0^1 (\underbrace{\lambda_0\dot{x}^2 + \lambda_1 x}_{L})\,dt + \underbrace{\lambda_2(x(1) - 1)}_{l}.$

Необходимые условия: a) уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}2\lambda_0\dot{x} + \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow -2\lambda_0\ddot{x} + \lambda_1 = 0;$$

b) трансверсальность по x:

$$L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)},\ L_{\dot{x}}(1) = -l_{x(1)} \Leftrightarrow 2\lambda_0\dot{x}(0) = 0,\ 2\lambda_0\dot{x}(1) = -\lambda_2.$$

$\lambda_0 = 0 \quad \begin{matrix} \overset{a}{\Rightarrow} \lambda_1 = 0, \\ \overset{b}{\Rightarrow} \lambda_2 = 0, \end{matrix}$ — все множители Лагранжа нули.

$\lambda_0 \neq 0,\ \lambda_0 = \frac{1}{2} \overset{a}{\Rightarrow} \ddot{x} = \lambda_1 \Rightarrow x = C_1t^2 + C_2t + C_3.$

Неизвестные константы C_1, C_2, C_3 находим из существенного условия трансверсальности $\dot{x}(0) = 0$, условия на конце в единице и изопериметрического условия.

Пример 1. $\int_0^1 \dot{x}^2\, dt \to \text{extr};\ \int_0^1 x\, dt = 0,\ x(1) = 1.$

$x = C_1 t^2 + C_2 t + C_3$. $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow x = C_1 t^2 + C_3$.

$$\begin{cases} x(1) = 1, \\ \int_0^1 x\, dt = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 1, \\ \dfrac{C_1}{3} + C_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{3}{2}, \\ C_3 = -\dfrac{1}{2}, \end{cases} \Rightarrow \hat{x} = \frac{3t^2 - 1}{2}.$$

Исследование. Возьмем $x \in D(P)$, обозначим $h := x - \hat{x}$

$\Rightarrow h \in C^1[0,1],\ \int_0^1 h\, dt = 0,\ h(1) = 0$. Для задачи с квадратичным функционалом и линейными ограничениями

$$J(x) - J(\hat{x}) = J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) = J(h) = \int_0^1 \dot{h}^2 dt \geq 0.$$

Значит, $\hat{x} \in \text{absmin}$,

$$S_{\text{absmin}} = \int_0^1 \dot{\hat{x}}^2\, dt = \int_0^1 (3t)^2\, dt = \int_0^1 9t^2\, dt = \frac{9t^3}{3}\Big|_0^1 = 3.$$

Пример 1. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr};\ \int\limits_0^1 x\,dt = 0,\ x(1) = 1.$

Покажем, что $S_{\mathrm{absmax}} = +\infty$. Действительно, возьмем последовательность $x_n(\cdot) = \hat{x}(\cdot) + nh(\cdot) \in D(P)$, $h \not\equiv 0$.

Для допустимости необходимо, чтобы $h \in C^1[0,1]$, $\int\limits_0^1 h\,dt = 0$, $h(1) = 0$, например, $h(t) = \sin 2\pi t$. Тогда

$J(x_n) = \int\limits_0^1 \dot{x}_n^2\,dt = \int\limits_0^1 \left(\dot{\hat{x}} + n\dot{h}\right)^2 dt \to +\infty$ при $n \to +\infty$.

Ответ. Допустимая экстремаль $\frac{3t^2-1}{2} \in \mathrm{absmin}$, $S_{\mathrm{absmin}} = 3$; $S_{\mathrm{absmax}} = +\infty$.

Пример 2. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \text{extr};\ x(0)=\dot{x}(0)=0,\ x(1)=1.$

Сведем задачу к задаче Лагранжа, вводя вместо x вектор-функцию (x_1, x_2), обозначая $x_1 := x,\ x_2 := \dot{x}$:

$$\int\limits_0^1 \dot{x}_2^2\,dt \to \text{extr};\ \dot{x}_1 = x_2,\ x_1(0)=0,\ x_2(0)=0,\ x_1(1)=1.$$

Функция Лагранжа

$$\mathscr{L} = \int\limits_0^1 \Big(\underbrace{\lambda_0\dot{x}_2^2 + p(t)(\dot{x}_1 - x_2)}_{L}\Big)dt + \underbrace{\lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3(x_1(1)-1)}_{l}.$$

Необходимые условия: a) система уравнений Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_1} + L_{x_1} = 0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}p = 0 \Leftrightarrow -\dot{p} = 0,$$

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_2} + L_{x_2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}2\lambda_0\dot{x}_2 - p = 0 \Leftrightarrow -2\lambda_0\ddot{x}_2 - p = 0;$$

b) трансверсальность по x:

$$L_{\dot{x}_1}(0) = l_{x_1(0)},\ L_{\dot{x}_1}(1) = -l_{x_1(1)} \Leftrightarrow p(0) = \lambda_1,\ p(1) = -\lambda_3,$$

$$L_{\dot{x}_2}(0) = l_{x_2(0)},\ L_{\dot{x}_2}(1) = -l_{x_2(1)} \Leftrightarrow 2\lambda_0\dot{x}_2(0) = \lambda_2,\ 2\lambda_0\dot{x}_2(1) = 0.$$

Пример 2. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \text{extr};\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ x(1) = 1.$

$a)\ -\dot{p} = 0,\ -2\lambda_0\ddot{x}_2 - p = 0 \Rightarrow -2\lambda_0 x_2^{(3)} = 0;$

$b)\ p(0) = \lambda_1,\ p(1) = -\lambda_3,\ 2\lambda_0\dot{x}_2(0) = \lambda_2,\ 2\lambda_0\dot{x}_2(1) = 0.$

$\lambda_0 = 0 \quad \begin{array}{l} \overset{a}{\Rightarrow} p = 0 \overset{b}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_3 = 0, \\ \overset{b}{\Rightarrow} \lambda_2 = 0, \end{array}$ — все множители — нули.

$\lambda_0 \neq 0,\ \lambda_0 = \frac{1}{2} \overset{a}{\Rightarrow} x_2^{(3)} = 0 \Leftrightarrow x^{(4)} = 0.$

Общее решение: $x = C_1 t^3 + C_2 t^2 + C_3 t + C_4$.

C_1, C_2, C_3, C_4 находим из условия трансверсальности $\dot{x}_2(1) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}(1) = 0$ и условий на концах:

$x(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0,\ \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0,$

$$\begin{cases} x(1) = 1, \\ \ddot{x}(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 6C_1 + 2C_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2}, \\ C_2 = \frac{3}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \hat{x} = -\frac{t^3}{2} + \frac{3t^2}{2}.$$

Пример 2. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \text{extr};\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ x(1) = 1.$

Исследование экстремали $\hat{x} = -\dfrac{t^3}{2} + \dfrac{3t^2}{2}$. Возьмем $x \in D(P)$, обозначим $h := x - \hat{x} \Rightarrow h \in C^2[0,1],\ h(0) = \dot{h}(0) = h(1) = 0$.
Для задачи с квадратичным функционалом

$$J(x) - J(\hat{x}) = J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) = J(h) = \int\limits_0^1 \ddot{h}^2\,dt \geq 0.$$

Значит, $\hat{x} \in \text{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = \int\limits_0^1 \ddot{\hat{x}}^2 dt =$

$$= \int\limits_0^1 (-3t+3)^2\,dt = 9\int\limits_0^1 (t^2 - 2t + 1)\,dt = 3t^3 - 9t^2 + 9t\,\Big|_0^1 = 3.$$

Пример 2. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\, dt \to \text{extr};\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ x(1) = 1.$

Покажем, что $S_{\text{absmax}} = +\infty$. Действительно, возьмем последовательность $x_n(\cdot) = \hat{x}(\cdot) + nh(\cdot) \in D(P)$, $h \not\equiv 0$. Для допустимости необходимо, чтобы $h \in C^2[0,1]$, $h(0) = \dot{h}(0) = h(1) = 0$, например, $h(t) = t^2(t-1)$. Тогда

$$J(x_n) = \int\limits_0^1 \ddot{x}_n^2\, dt = \int\limits_0^1 \left(\ddot{\hat{x}} + n\ddot{h}\right)^2 dt \to +\infty \text{ при } n \to +\infty.$$

Ответ. Допустимая экстремаль $-\dfrac{t^3}{2} + \dfrac{3t^2}{2} \in \text{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = 3$; $S_{\text{absmax}} = +\infty$.