МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Галеев Э. М.

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ

(типы задач и методы их решений)

Часть 1

- Рациональные неравенства (метод интервалов)
- Уравнения высших степеней
- Уравнения и неравенства с модулем

Москва 2012

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Галеев Э. М.

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ

(типы задач и методы их решений)

Часть 1

- **Рациональные неравенства (метод интервалов)**
- **Уравнения высших степеней**
- **Уравнения и неравенства с модулем**

Издание десятое, дополненное

Москва 2012

ББК 22.1 я 729
УДК 373.3

Учебно-методическое пособие

Галеев Э.М.

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ (типы задач и методы их решений). Часть 1. Рациональные неравенства (метод интервалов). Уравнения высших степеней. Уравнения и неравенства с модулем. Изд. 10-е, дополненное. Издательство "Попечительский совет механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова". 2012. - 64 с.

В пособии рассматриваются рациональные неравенства (метод интервалов), уравнения высших степеней, уравнения и неравенства с модулем. Предпринята попытка систематизации типов встречающихся задач и методов их решений. Схема решений уравнений определенного вида подобрана таким образом, чтобы решение было наиболее простым. К задачам даны ответы, а к некоторым ключевым задачам даны и решения.

Предназначено для абитуриентов МГУ, выпускников школ при подготовке к ЕГЭ, для слушателей подготовительных отделений и курсов, учащихся математических классов.

Рецензент: д.ф.-м.н., Богатый С. А.

$\mathbf{Г}\dfrac{\mathbf{1702070000-08}}{\mathbf{3Ш7(03)-02}}$ **Без объявл.**

ISBN 5-87597-024-3

Оглавление

Предисловие

О пособии

В первой части пособия рассматриваются рациональные неравенства, уравнения высших степеней, уравнения и неравенства с модулем.

Книга состоит из четырех параграфов: рациональные неравенства (метод интервалов), уравнения высших степеней, уравнения с модулем, неравенства с модулем. Параграфы делятся на пункты по типам (видам) задач. Например, параграф уравнения с модулем делится на пункты: уравнения вида $|f| = g$, вида $|f| = |g|$, с несколькими отдельно стоящими модулями, с модулем в модуле, системы уравнений с модулями. Таким образом, уравнения с модулем разбиваются на определенные виды уравнений, которые имеют одинаковую схему решений. Предпринята попытка систематизации типов встречающихся задач и методов их решений. Схема решений уравнений определенного вида подобрана таким образом, чтобы решение было наиболее простым. Такая систематизация помогает определить, к какому типу задач относится данная задача и оптимальную схему ее решения. Это помогает более легкому усвоению материала, лучшему запоминанию. Такие же идеи классификации задач по схемам их решений применяются и в остальных параграфах.

В начале параграфов при необходимости приводятся краткие сведения об изучаемых понятиях. В некоторых частях основные формулы приводятся в начале книги. Предполагается, что читатель уже знаком со школьной программой, собирается углубить имеющиеся у него знания и научиться правильным подходам и схемам решений уравнений и неравенств.

В начале каждого пункта приводятся схемы решений задач определенного вида. Иногда эти схемы могут отличаться от тех, что давались в школе, но тем не менее имеет смысл разобраться в них, понять, что заложенные в них идеи помогают приобрести более общий взгляд на уже известные факты, учат наиболее простым методам решений задач.

При работе с пособием рекомендуется вначале прочитать имеющуюся краткую теоретическую часть. Перед решением задачи вначале следует разобраться к какому виду относится или к какому виду сводится имеющаяся задача, а затем воспользоваться схемой решения задач этого вида. Даже, если Вам ясно, как решать задачу, необходимо подумать, а наиболее ли простое решение Вы выбрали, нет ли другого более легкого решения.

Имеющиеся задачи распределены на две части. Одна часть предполагает решение на занятии под руководством преподавателя. Другая часть — для самостоятельного решения дома. Домашние задачи предназначены для закрепления материала, пройденного на занятии с преподавателем. Обычно, задачи, подобные домашним, предварительно решаются на занятии.

Часть задач приведена с подробными решениями в разделе "Ответы, указания, решения" в конце пособия. Как правило, решения первых задач встречающихся видов подробно разобраны в разделе "Ответы, ...". Рекомендуется прочитать решение, приведенное в книге. Понять, почему автор предпочел именно такое решение, а не другое. При решении подобных задач научиться использовать предложенный способ и форму записи решения. Для аналогичных задач решения не приводятся, а даются только ответы. В некоторых задачах специально ответы не приводятся. Это так называемые "тестовые" задачи. Сложные задачи, как обычно, обозначаются звездочками.

В пособии содержатся задачи и простые, и сложные. Основная масса задач взята из вступительных экзаменов в МГУ. При этом упор делался на наиболее интересные задачи последних лет. Указан факультет, год, номер задачи и общее количество задач. Для выездных экзаменов указывается город, в котором эта задача давалась. Часть задач взята из пособий по элементарной математике, приведенных в списке литературы (некоторые из них при этом изменены), часть составлена автором.

Пособие предназначено для абитуриентов ВУЗов с повышенными требованиями по математике при подготовке к письменному и устному экзамену, для слушателей подготовительных отделений и курсов, учащихся математических классов и школ. В то же время знания приведенных приемов решения задач окажутся полезными и для любого школьника.

О занятиях по пособию

Данное пособие можно использовать для проведения занятий в группе школьников. Преподаватель производит отбор задач, соответствующих уровню группы из числа задач, предназначенных для решения на занятии, и для домашней работы из числа задач, предназначенных для домашнего решения. В число домашних задач, как правило, включаются задачи, аналоги которых уже решены на занятии, а также задачи с громоздкими вычислениями. По каждому пункту необязательно решать все задачи, поскольку это потребует слишком много времени, а также некоторые задачи окажутся слишком сложными или чересчур легкими, и лучше разобрать решение задач данного типа на доступном уровне. Какие-то наиболее сложные типы задач также можно опустить.

Приведенные в пособии схемы решения задач должны быть объяснены преподавателем. Каждый ученик выбирает ту схему решения, которая ему понятнее.

Занятия в группе могут строиться как индивидуальные занятия с каждым из учеников. На каждом занятии изучается какая-нибудь одна тема, например, уравнения с модулем, рассматриваются различные типы задач с модулем. В пособии дается немного теории с объяснениями метода и формул решения задач данного типа. Каждый из учеников решает задачи со своей скоростью, кто-то быстрее, кто-то медленнее. Если у кого-то возникают затруднения с решением задачи, то даются подсказки или, если все-таки задача не решается, предлагается лист с отпечатанным полностью решением задачи. Если остаются вопросы, то даются пояснения устно. По некоторым задачам, где особенно важна методика решения или оформление, предлагается всем ознакомиться с решением преподавателя. Домашнее задание дается по этой же теме из числа задач, выделенных для домашнего задания. В пособии есть ответы по всем задачам (кроме тестовых) и приведены решения задач, где надо посмотреть оформление, методику и т. д. С помощью тестовых задач легко проверяется, подгонял ли дома ученик свои ответы к остальным задачам или нет. Кроме того в тестовых задачах, имеются определенные тонкости, которые надо заметить. И преподаватель проверяет, усвоил ли ученик их.

В начале каждого занятия один из учеников выписывает ответы на тестовые задачи на доске. Потом ответы корректируются преподавателем. Слушатели сообщают, сколько тестовых задач решено у них правильно. Согласно количеству правильно решенных задач выставляется оценка за домашнее задание. Далее решаются на доске (или даются решения) задачи, которые дома не получились.

При таком проведении занятия есть польза и для более подготовленных учеников, и для менее подготовленных. Задачи будут интересны для всех, что тоже немаловажно для обучения. Сильные решают большее количество задач, доходят до более сложных. Нет необходимости все задачи разбирать на доске. Это было бы полезно только части аудитории — тем, кто в данный момент решает эту задачу и мало полезно для более сильных, которые уже ушли дальше и решают следующие более сложные задачи. Такой метод обучения дает хорошие результаты, о которых свидетельствует количество поступивших в МГУ учеников.

Автор в течении многих лет преподает по данной методике на подготовительных курсах МГУ. Записаться к нему на занятия по подготовке к вступительным экзаменам по математике можно по телефону 8-926-266-02-87.

Галеев Э. М.

Формулы

Степени и разложения на множители

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b),$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b),$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4,$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$

$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5,$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$

$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4),$

$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4),$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$

$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}),$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$

$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc.$

Обозначения

$\begin{cases} A, \\ B, \end{cases}$ — система уравнений или неравенств. Решением является пересечение множеств A и B.

$\left[\begin{array}{l} A, \\ B, \end{array} \right.$ — совокупность уравнений или неравенств. Решением является объединение множеств A и B.

Квадратный трехчлен

1) $ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0,$
если дискриминант $D=b^2-4ac<0$, то корней нет,
если $D>0$, то $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,
если $D=0$, то $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}, \qquad ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2.$
Если b — коэффициент при x — четный, то квадратное уравнение удобно решать через $\dfrac{D}{4}=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac$, тогда $x_{1,2}=\dfrac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{(\frac{b}{2})^2-ac}}{a}$.

Теорема Виета. $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$

2) *Приведённый квадратный трёхчлен:* $x^2+px+q=0.$
$x_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$.
Если p — коэффициент при x — четный, то приведённое квадратное уравнение удобно решать через $\dfrac{D}{4}=\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q$, тогда $x_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q}$.

Теорема Виета. $\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases}$

Выделение полного квадрата

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}=a(x-x_0)^2+y_0,$$

$x_0=-\dfrac{b}{2a}$, $y_0=c-\dfrac{b^2}{4a}$ — координаты вершины параболы.

Кубический многочлен: $x^3+ax^2+bx+c=0$.

Пусть x_1,x_2,x_3 — его корни, тогда
$x^3+ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=$
$x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3.$

Теорема Виета. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-a, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b, \\ x_1x_2x_3=-c. \end{cases}$

1 Рациональные неравенства (метод интервалов)

Дробно-рациональной функцией (иногда говорят просто *рациональной*) называется функция вида $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. Неравенства вида $f(x) \geq 0$ для дробно-рациональной функции f решаются чаще всего *методом интервалов.* Вместо неравенства $\geq$ здесь может стоять любое из неравенств: $\leq$, $>$, $<$. Метод интервалов заключается в следующем:

1. *Перенести все члены неравенства в одну сторону.*

2. *Привести их к общему знаменателю.*

3. *Разложить числитель и знаменатель полученной дроби на линейные множители*[1]:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C \cdot \frac{(x-a_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_m)^{\alpha_m}}{(x-b_1)^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot (x-b_n)^{\beta_n}}$$

Для этого надо приравнять числитель и знаменатель нулю и найти их корни. Если константа $C < 0$, то умножением обеих частей неравенства на -1 (при этом знак неравенства меняется на противоположный) добиваемся того, чтобы коэффициент C стал положительным. Положительные множители (типа x^2+1, в том числе положительную константу перед дробью или многочленом) можно отбросить, так как при этом множество решений неравенства не изменится.

4. *Отметить корни числителя и знаменателя на числовой прямой.* При нестрогом неравенстве ($\geq$ или $\leq$) корни числителя обозначить жирными точками. В этом случае корни числителя могут входить в решения неравенства. Корни знаменателя не могут являться решениями, поэтому их можно обозначить кружочками (выколотые точки). В случае строгого неравенства корни числителя также обозначаются кружочками. В каждом из полученных интервалов знак дроби не меняется, т. е. является постоянным.

[1] Отметим, что квадратные трехчлены типа $x^2 + 1$ не разлагаются на линейные множители, но зато они всегда положительны.

5. *Определить знак дроби в каждом из интервалов.* Для этого можно взять какую-нибудь отдельную "удобную" точку внутри интервала, подставить ее в дробь и найти знак дроби.

Определять знак дроби можно также используя *свойство кратности корня*[2]: если корень имеет нечетную кратность (один, три и т. д.), то при переходе через эту точку знак дроби меняется; если корень имеет четную кратность (два, четыре и т. д.), то при переходе через эту точку знак дроби не меняется.

В самом правом интервале (от $+\infty$ до первого корня) знак дроби совпадает со знаком числа C, стоящего перед дробью.

6. *Выписать правильно ответ.* В ответ выписываем те промежутки, в которых дробь имеет нужный знак. Особое внимание при этом обращаем на концы промежутков, включая их когда надо, и исключая, наоборот, все кружочки (выколотые точки). При этом в ответе могут быть и промежутки, и отдельно стоящие точки.

Замечание. 1. При нанесении нулей числителя и знаменателя на числовую ось соблюдение масштаба необязательно. Важно соблюдение порядка следования этих точек друг за другом.

2. Не ставьте лишние (отличные от нулей числителя и знаменателя) точки на числовой оси.

Решить неравенства:

1.1 Простейшие рациональные неравенства

1.1. $\dfrac{1}{x} \leq 1.$

1.2. (МГУ, психологический, 1982, 1(6))
$$\frac{2x-3}{x} \leq \frac{3-2x}{x(x+1)}.$$

1.3. $\dfrac{1}{3x-2-x^2} - \dfrac{3}{7x-4-3x^2} > 0.$

1.4. $\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} \leq \dfrac{2}{x-3}.$ **"Тест"**

[2]Для множителя $(x-a)^k$, $k \in \mathbb{N}$, число k является кратностью корня $x = a$.

1.5. (МГУ, Магнитогорск, 1996, 2(10))

$$\frac{-2}{1-1/(3-x)} \le 1.$$ **"Тест"**

1.6. (МГУ, психологический, 1971, 3(5))

Найти все такие значения x, что наименьшее из чисел $2-2x^2$ и $1-x$ больше 1.

1.7. (МГУ, почвоведения, 1990, 5(6))

Найти все значения x, при которых наибольшее из чисел $2x+1$ и $x+2$ больше -1.

Домашнее задание

1.8. (МГУ, Якутск, 1995, 1(10))

$$\frac{6+2x}{7x} \le 0.$$

1.9. (МГУ, геологический, май 1996, 1(8))

$$\frac{1}{x-1996} \le \frac{x}{x-1996}.$$

1.10. (МГУ, Обнинск, 1995, 1(10))

$$\frac{-2}{x-1} \le 1.$$

1.11. (МГУ, экономический, 1985, 1(6))

$$\frac{4x-1}{3x+1} \ge 1.$$

1.12. (МГУ, физический, 1987, 1(6))

$$\frac{1}{2x} \ge \frac{1}{1-x}.$$

1.13. (МГУ, физический, май 1995, 3(8))

$$\frac{x}{x-1} \le \frac{x-2}{x}.$$

1.14. $\dfrac{1}{2-x} + \dfrac{5}{2+x} < 1.$

1.15. (МГУ, геологический, май 1995, 1(9))

$$\frac{7}{(x-2)(x-3)} + \frac{9}{x-3} + 1 \le 0.$$

1.16. (МГУ, философский, 1989, 1(5))

$$\frac{x^2-5x+4}{5-x} \geq 0.$$

1.17. $$\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 1.$$

1.18. (МГУ, химический, 2004, 1(6))

$$\frac{10+3x-x^2}{x^2-3x+2} \leq 1.$$

1.19. (МГУ, ФНМ, апрель 2002, 1(6))

Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y = \frac{3}{x-1}$ лежат не выше соответствующих точек графика функции $y = 2x$.

1.20. (МГУ, социологический, филологический, 2007, 2(8))

$$\frac{(x-2)(x-5)(x-8)}{(x+2)(x+5)(x+8)} \geq -1.$$

1.21. $$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 1.$$

1.22. (МГУ, филологический, 1999, 2(5))

$$\frac{1}{x^2+8x-9} \geq \frac{1}{3x^2-5x+2}.$$

1.23. (МГУ, почвоведения, 1990, 5(6))

Найти все значения x, при которых наименьшее из чисел $3-2x$ и $1-x$ меньше 1.

1.24. (МГУ, ИСАА, 2005, 1(7))

$$\frac{x^2-3x-4}{x+1} \leq 1.$$

1.25. Найдите наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству $\dfrac{x-5}{x^2+5x-14} > 0$.

1.26. Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-x+1} < \dfrac{1-2x}{x^3+1}$.

1.27. (МГУ, геологический, 2001, 1(8))

$$\frac{\frac{1}{x-1} - 1}{1 - \frac{1}{x-7}} \geq 0.$$ **"Тест"**

1.28. (МГУ, Челябинск, 1996, 1(10))

$$\frac{1}{2 - 1/(1 - 1/(1-x))} < 1.$$ **"Тест"**

1.29. (МГУ, факультет Гос. управления, 2002, 3(7))

$$\frac{-1}{\frac{8}{9-x^2} + 1} \leq 3 - x.$$

1.30. (МГУ, филологический, 1970, 4(7))
Доказать, что $11n^2 - 14n + 3 \geq 0$ при всех целых n.

1.31. (МГУ, филологический, 1971, 3(7))
Определить, сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$(n^2-1)(n^2-11)(n^2-101)(n^2-1001) < 0.$$ **"Тест"**

1.2 Учет кратности корня

В этом пункте определять знак функции рекомендуется, используя *свойство кратности корня*: если корень имеет нечетную кратность (один, три и т. д.), то при переходе через эту точку знак функции меняется; если корень имеет четную кратность (два, четыре и т. д.), то при переходе через эту точку знак функции не меняется.

1.32. $\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25} \geq 0.$

1.33. $(x+1)(5-x)(x-3)^2 \leq 0.$ **"Тест"**

1.34. $(x+7)(2x-5)^3(6-x)^5(3x+10)^4 \geq 0.$

1.35. $\dfrac{x(x+1)^2(x+2)^3(x+3)^4}{(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4} \leq 0.$

1.36. $\dfrac{x^2(x-1)(x+3)^3}{x^2+4x+3} \geq 0.$ **"Тест"**

1.37. $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right)^2 \geq 1.$

Домашнее задание

1.38. $(x+1)(3-x)(x-2)^2 > 0.$

1.39. (МГУ, физический, март 1996, 2(8))
$\dfrac{2x-7}{x-3} > \dfrac{9}{5-x}.$

1.40. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 1(7))
$\dfrac{1}{1-x} \leq 1 + x.$

1.41. (МГУ, мехмат, 1977, 1(5))
$x \leq 3 - \dfrac{1}{x-1}.$

1.42. (МГУ, ИСАА, 2006, 1(7))
$\dfrac{5x+1}{(x+2)(x-3)} \geq 1 + \dfrac{16}{x-3}.$

1.43. $\dfrac{(x^2+1)(x^2-1)^2(x-3)^4}{(x+2)^3(2x-3)^5} \leq 0.$

1.44. $(1+x)(1-3x)(4-x^2)^3(5+2x)(1-x)^2 \geq 0.$

1.45. $\dfrac{x^2(x-1)^2(x-2)}{x^2-1} \leq 0.$ **"Тест"**

1.46. (МГУ, психологический, 1990, 3(5))
$\left(-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{8} - \dfrac{15}{88-32x}\right)^2 \leq 1.$

1.47. $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0.$

1.48. $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1}\le 0.$

1.49. (Черноморский ф-л МГУ, май 2001, 1(9))
Определите все целые значения x, для которых дробь $\dfrac{x^2(x^2-35)(x^2-10)}{(x^2-64)(x^2-100)}$ является неположительной.

1.3 Метод интервалов на ОДЗ. Монотонность корня

В задачах этого пункта можно найти ОДЗ (область допустимых значений) неравенства, отметить ее на числовой прямой, найти корни числителя и знаменателя, отметить их на прямой. Далее найти знак функции на полученных промежутках, выбрать нужные промежутки.

В рассматриваемых ниже задачах множество точек, не входящих в ОДЗ, можно заштриховывать (чтобы не ставить в этих промежутках знак функции) и в дальнейшем из рассмотрения исключать. Особое внимание нужно обратить на граничные точки заштрихованных множеств, которые могут входить в ОДЗ и даже могут быть в числе решений неравенства.

Задачи этого пункта можно также решать, используя монотонное возрастание корня. Согласно нему знак разности $\sqrt{f}-\sqrt{g}$ совпадает на ОДЗ со знаком разности $f-g$, соответственно.

1.50. $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-2}\ge 0.$

1.51. $(4-x)\sqrt{x-3}\le 0.$ **"Тест"**

1.52. (МГУ, геологический, 1988, 2(6))
$(x^2-3x-40)\sqrt{2x-3}\ge 0.$

1.53. (МГУ, ВМиК, 1978, 1(5))
$(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0.$

1.54. (МГУ, мех-мат, 1983, 1(5))
$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$$ **“Тест”**

Домашнее задание

1.55. $(\sqrt{x}-2)(x-2) \leq 0.$

1.56. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-3} \leq 0.$

1.57. $\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-4} \geq 0.$ **“Тест”**

1.58. (МГУ, биологический, ФФМ, ФББ, 2006, 1(6))
$$\sqrt{x+1}\,(x^2+3x-4) \geq 0.$$

1.59. (МГУ, геологический, 1988, 2(6))
$$(x^2+8x+15)\sqrt{x+4} \geq 0.$$

1.60. (МГУ, геологический, 2007, 3(8))
$$\sqrt{2^{(x^2-4)}-1} \cdot (x^2-7x+6) \leq 0.$$

1.61. (МГУ, ФББ, 2009, 3(9))
$$(x^2-7x+6)\sqrt{x^2-10x+21} \geq 0.$$

1.62. (МГУ, экономический, 1986, 3(6))
$$(8x^2-6x+1)\sqrt{-25x^2+15x-2} \geq 0.$$ **“Тест”**

1.63. (МГУ, физический, 1996, 2(8))
$$\frac{x-2}{x\sqrt{6+x-x^2}} \geq 0.$$

1.64. (МГУ, мех-мат, 1983, 1(5))
$$\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}.$$

1.4 Неравенства с многочленами высших степеней

В этом пункте прежде чем приступить к решению неравенств имеющиеся многочлены надо разложить на множители или путем замены свести к квадратным неравенствам.

При замене неравенство, полученное относительно новой переменной, решить методом интервалов, ответ для новой переменной записать в виде неравенства. И затем в полученное решение неравенства вместо новой переменной подставить её выражение.

1.65. $x^6 - 9x^3 + 8 > 0.$

1.66. (МГУ, геологический, 1974, 1(5))
$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geq 5.$

1.67. $x^3 + x^2 - x - 1 \geq 0.$ **"Тест"**

1.68. $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 > 0.$

1.69.* $2x^3 + x > x^2 + \dfrac{1}{3}.$

Домашнее задание

1.70. (МГУ, почвоведения, 1982, 3(5))
$x^4 - 5x^2 + 6 \geq 0.$

1.71. (МГУ, ВМиК, апрель 2004, 2(6))
$\dfrac{1}{x^2 - 5x + 7} \leq 5x - x^2 - 5.$ **"Тест"**

1.72. $(x^2 - x - 1)(x^2 - x - 7) < -5.$

1.73. $x^4 + x^3 - x - 1 < 0.$

1.74. $x^7 + 8x^4 - x^3 - 8 > 0.$

1.75. $x^8 - 6x^7 + 9x^6 - x^2 + 6x - 9 \leq 0.$ **"Тест"**

1.76. $\dfrac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 8}{x^2} \leq 0.$

1.77.* $6x^2 + 1 > 3x^4 + 4x^3 + 4x.$

2 Алгебраические уравнения

2.1 Квадратные уравнения

2.1. $\dfrac{x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}}{x^2 - x - 6} = 0.$

2.2. (МГУ, геологический, МШЭ, 2008, 1(8))
Найти целые корни уравнения $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 2(\sqrt{3} - 1) = 0.$

Домашнее задание

2.3. (МГУ, 2011, 1(8))
Найти значение функции $0{,}125x^2 - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{9}$ в точке $x = \dfrac{1}{2}.$

2.4. (МГУ, ИСАА, 2008, 1(8))
$\dfrac{3x^2 - 5x}{3x - 2} - 1 = \dfrac{2}{2 - 3x}.$ **“Тест”**

2.5. (МГУ, географический, 2006, 1(6))
$\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 3(x - 1).$

2.6. (МГУ, экономический, 2005, 2(7))
Найдите сумму всех целых значений, которые принимает функция $y = \dfrac{x}{\sqrt{5}} - \dfrac{x^2}{20} + 6$ при $x \in [2;\, 12].$

Уравнения высших степеней

Многочленом степени n называется функция вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (через $\mathbb{R}$ обозначается множество действительных чисел) и $a_n \neq 0$.

Большой класс задач связан с нахождением корней многочленов, т. е. с решением уравнений вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0. \tag{1}$$

При $n = 1, 2$ эта задача не представляет труда, т. к. можно написать явные формулы для корней многочленов первой и второй степеней. При $n = 3, 4$ такие формулы также существуют, но они не изучаются в школьной программе и решения уравнений вида (1) при $n \geq 3$ требуют знания некоторых других приемов, о которых здесь и пойдет речь.

2.2 Деление многочленов

Для отыскания корней многочленов полезно познакомиться сначала с тем, как происходит деление многочленов.

Разделить с остатком многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, отличный от нуля, — это значит найти два многочлена $s(x)$ и $r(x)$ такие, что

$$P(x) = Q(x)s(x) + r(x), \tag{2}$$

причем степень многочлена $r(x)$ строго меньше степени многочлена $Q(x)$, либо $r(x)$ есть нуль.

В случае, если выполнено равенство (2), говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$ с остатком $r(x)$ и частным $s(x)$; если $r(x) = 0$, т. е. остаток есть число нуль, то говорят, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$ с остатком нуль или многочлен $P(x)$ делится нацело на многочлен $Q(x)$.

Теорема 1. *Для любых двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, где $Q(x) \neq 0$, существует пара многочленов $s(x)$ и $r(x)$ таких, что $P(x) = Q(x)s(x) + r(x)$, причем степень многочлена $r(x)$ строго меньше степени многочлена $Q(x)$, либо $r(x)$ есть нуль.*

Деление многочленов можно проводить “уголком”. Этот алгоритм (*алгоритм Евклида*) очень похож на тот, который используется при делении чисел “уголком”. Мы познакомимся с ним на нескольких примерах.

2.7. Разделить $x^5 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ на $x^2 - x$.

2.8. Разделить $x^4 + 2x^2 - 3x - 6$ на $x + 1$.

2.9. Разделить $x^3 - 2x + 1$ на $x - 1$.

2.10. Разделить $x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ на $x^2 - 1$.

2.11. Разделить $x^3 - 1$ на $x^2 + 1$.

2.12. Разделить $x^4 - x^2$ на $x + 1$.

2.13. Разделить $x^5 - x^2 + x + 3$ на $x^3 + 1$.

2.14. Разделить $x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 4$ на $x^2 - 1$.

2.3 Отыскание целых корней

При отыскании корней многочлена можно вначале поискать целые корни. Пусть нам надо найти корни многочлена с целыми коэффициентами

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ (через $\mathbb{Z}$ обозначается множество целых чисел) и $a_n \neq 0$. При отыскании целых корней многочлена полезно знать следующие факты:

Теорема 2. *Если $x = m$ является целым ($m \in \mathbb{Z}$) корнем многочлена $P(x)$, то число m является делителем свободного члена a_0.*

Теорема 3. *Если $x = a$ является корнем многочлена $P(x)$, то многочлен $P(x)$ можно представить в виде произведения $P(x) = (x - a)Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен степени $n - 1$.*

Многочлен $Q(x)$ можно найти делением многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ “уголком” или соответствующей группировкой слагаемых многочлена и выделением из них множителя $x - a$.

Решить уравнения:

2.15. $x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = 0.$

2.16. $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = 0.$

Домашнее задание

2.17. $x^3 + 3x^2 + x - 5 = 0.$

2.18. $x^3 + 6x^2 - x - 30 = 0.$

2.19. $x^4 - 6x^2 - 7x - 6 = 0.$

2.20. (МГУ, почвоведения, 2005, 1(6))
$(6x - 15)^7 = (x - 1)^{14}.$

2.21. (МГУ, почвоведения, май 2000, 1(6))
$\dfrac{x^{17} - 1}{1 - x^{15}} = \dfrac{1 - x^{15}}{x^{13} - 1}.$ **“Тест”**

2.4 Отыскание рациональных корней

Если у многочлена нет целых корней, то можно попытаться отыскать рациональные корни (вида несократимой дроби $\dfrac{m}{k}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ — множеству натуральных чисел). При отыскании рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

$a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, и $a_n \neq 0$, полезно знать следующий факт:

Теорема 4. *Если $x = \dfrac{m}{k}$ является рациональным корнем многочлена $P(x)$, то число m является делителем свободного члена a_0, а число k является делителем числа a_n — коэффициента при старшем члене.*

Из теоремы 4 следует, что если у многочлена $P(x)$ старший коэффициент равен 1, то любой рациональный корень многочлена $P(x)$ будет целым числом.

При отыскании рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами вначале отыскиваются целые корни уравнения, а затем рациональные корни, не являющиеся целыми.

2.22. $3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0.$

2.23. $2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21 = 0.$

Домашнее задание

2.24. $6x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 2x - 1 = 0.$

2.25. $8x^4 + 6x^3 - 13x^2 - x + 3 = 0.$

2.26. $16x^4 - 5x^2 - 21x - 5 = 0.$

2.5 Разложение многочлена на множители

2.27. $2x^3 + x + \sqrt{2} = 0.$

2.28. $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0.$

2.29.* $x^4 + x^2 + 4x - 3 = 0.$

2.30.* $x^4 + 4x - 1 = 0.$

2.31.* (МГУ, ВМиК, 2000, устный)

$$x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}.$$

Домашнее задание

2.32. $x^3 + 2x + 5\sqrt{3} = 0.$

2.33. $x^3 + 3x + 5\sqrt{2} = 0.$

2.34.* $x^4 + x^2 - 4x - 3 = 0.$

2.35.* $x^4 - 3x^2 + 4x - 3 = 0.$

2.36.* $x^4 - 2x^2 - 12x - 8 = 0.$

2.37.* $x^4 - 4x - 1 = 0.$

2.38.* $y^4 - 4y^3 - 1 = 0.$

2.6 Замена переменных

2.39. $x(x+1)(x+2)(x+3) = 0{,}5625.$

2.40.* $(x+2)^4 + x^4 = 4.$

2.41.* $x^5 - (x-2)^5 = 12.$

2.42.* $x^2 + \dfrac{x^2}{(x+1)^2} = 3.$

Домашнее задание

2.43. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680.$

2.44. $(x-1)(x+1)(x+2)x = 24.$

2.45. $(x^2+x+1)(2x^2+2x+3) = 3(1-x-x^2).$

2.46. $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 5.$

2.47. $(6x+5)^2(3x+2)(x+1) = 35.$

2.48.* Указать замену переменных, позволяющую решить уравнение при любых числах $a, b, c:\quad (x-a)^4 + (x-b)^4 = c.$

2.49.* Указать замену переменных, позволяющую решить уравнение при любых числах $a, b, c:\quad (x-a)^5 - (x+b)^5 = c.$

2.50.* $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0.$

2.51.* $x^2 + \dfrac{9x^2}{(x-3)^2} = 7.$

2.52.* $x^2 + \dfrac{x^2}{(x+1)^2} = 1.$

2.7 Симметрические уравнения

Уравнения вида

$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \ldots + a_nx^{n+1} + a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 = 0, \quad (1)$$

$$a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\ldots+a_{n-1}x^{n+1}+a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 = 0, \quad (2)$$

где $a_0 \neq 0$ называются *симметрическими уравнениями* соответственно нечетной и четной степеней. Симметрическое уравнение нечетной степени (1) всегда имеет корень $x = -1$, поскольку это уравнение можно переписать в виде

$$a_0(x^{2n+1} + 1) + a_1x(x^{2n-1} + 1) + \ldots + a_nx^n(x + 1) = 0.$$

После деления симметрического многочлена нечетной степени на $x+1$ получается симметрический многочлен четной степени. Симметрическое уравнение четной степени решается делением на x^n и последующей заменой $x + \dfrac{1}{x}$ новой переменной.

Уравнения вида

$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \ldots + a_nx^{n+1} - a_nx^n - \ldots - a_1x - a_0 = 0, \quad (1')$$

$$a_0x^{2n} + \ldots + a_{n-1}x^{n+1} + a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_0 = 0, \quad (2')$$

где $a_0 \neq 0$ называются *кососимметрическими уравнениями* соответственно нечетной и четной степеней. Кососимметрическое уравнение нечетной степени $(1')$ всегда имеет корень $x = 1$, поскольку это уравнение можно переписать в виде

$$a_0(x^{2n+1} - 1) + a_1x(x^{2n-1} - 1) + \ldots + a_nx^n(x - 1) = 0.$$

После деления кососимметрического многочлена нечетной степени на $x-1$ получается симметрический многочлен четной степени. Кососимметрическое уравнение четной степени решается делением на x^n и последующей заменой $x - \dfrac{1}{x}$ новой переменной.

Уравнения вида

$$a_0x^{2n+1}+\ldots+a_nx^{n+1}+a_nx^n\lambda+a_{n-1}x^{n-1}\lambda^3+\ldots+a_1x\lambda^{2n-1}+a_0\lambda^{2n+1}=0, \quad (1'')$$

$$a_0x^{2n}+\ldots+a_{n-1}x^{n+1}+a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}\lambda+\ldots+a_1x\lambda^{n-1}+a_0\lambda^n=0, \qquad (2'')$$

где λ — фиксированное число и $a_0 \neq 0$ называются *возвратными уравнениями.* При $\lambda=1$ уравнения $(1'')$ и $(2'')$ являются симметрическими уравнениями соответственно нечетной и четной степеней. Возвратное уравнение нечетной степени $(1'')$ всегда имеет корень $x=-\lambda$, поскольку это уравнение можно переписать в виде

$$a_0(x^{2n+1}+\lambda^{2n+1})+a_1x(x^{2n-1}+\lambda^{2n-1})+\ldots+a_nx^n(x+\lambda)=0.$$

После деления возвратного многочлена нечетной степени на $x+\lambda$ получается возвратный многочлен четной степени. Возвратное уравнение четной степени решается делением на x^n и последующей заменой $x+\dfrac{\lambda}{x}$ новой переменной.

При $\lambda=-1$ уравнения $(1'')$ и $(2'')$ являются кососимметрическими уравнениями соответственно нечетной и четной степеней.

2.53. $x^4-5x^3+6x^2-5x+1=0.$

2.54. $x^6-9x^5+26x^4-33x^3+26x^2-9x+1=0.$

2.55. $x^5+6x^4+11x^3+11x^2+6x+1=0.$

2.56. $x^4-x^3-4x^2+x+1=0.$

2.57. $x^6+2x^5-3x^4-20x^3+3x^2+2x-1=0.$

2.58.* $x^4-5x^3+8x^2-10x+4=0.$

Домашнее задание

2.59. $x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0.$

2.60. $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0.$

2.61. $x^6-8x^5+22x^4-28x^3+22x^2-8x+1=0.$

2.62. $2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0.$

2.63. $x^4-2x^3+3x^2+2x+1=0.$

2.64. $x^6-10x^5+28x^4-10x^3-28x^2-10x-1=0.$

2.65. $x^4-3x^3a+3xa^3+a^4=0.$

2.66. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=10\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right).$

2.67.* $x^5+3x^4-x^3+2x^2-24x-32=0.$

2.8 Однородные уравнения

2.68. $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0.$

2.69.* $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x = 0.$

Домашнее задание

2.70. $(x^2 - 3)^2 - 7(x^4 - 9) + 6(x^2 + 3)^2 = 0.$

2.71. $(x - 2)^2(x + 1)^2 - (x - 2)(x^2 - 1) - 2(x - 1)^2 = 0.$

2.72. $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48 \cdot \dfrac{x^2-4}{x^2-1} = 0.$

2.73. $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{x-2}{x-1} - 3\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2 = 0.$

2.9 Рациональные уравнения

2.74. $\dfrac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \dfrac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1.$

2.75.* (Нерюнгри, 1996, 5)

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 1} + \frac{9}{x^2 - 2x + 1} \leq \frac{8}{x^2 + 1}.$$

Домашнее задание

2.76. $\dfrac{1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{12}.$

2.77. $\dfrac{x}{x^2 - x + 1} + \dfrac{2x}{x^2 + x + 1} = 1.$

2.78. $\dfrac{3x^2 - 1}{x} + \dfrac{5x}{3x^2 - x - 1} = \dfrac{119}{18}.$

2.10 Уравнения, решающиеся введением параметра

2.79. $x^3 - (\sqrt{2}+1)x^2 + 2 = 0.$

2.80. $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 - x + 3 - \sqrt{3} = 0.$

Домашнее задание

2.81. $x^4 + x^3 - 3ax^2 - 2ax + 2a^2 = 0.$

2.82. $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0.$

2.11 Функциональные уравнения

2.83. $(x^2+2x-5)^2 + 2(x^2+2x-5) - 5 = x.$

2.84. $(x^2-4x+6)^2 - 4(x^2-4x+6) + 6 = x.$

Домашнее задание

2.85. $(x^2-x-3)^2 - (x^2-x-3) - 3 = x.$

2.86. (МГУ, химический, заочный тур, 2000, 2(12))
$$(x^2+3x-2)^2 + 3(x^2+3x-2) - 2 = x.$$

2.87. (МГУ, почвоведения, май 2000, 6(6))
Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 8, такая что $f(x) = 8x - x^2$ при $x \in [0; 8]$. Решите уравнение $f(2x+16) + 23 = 5f(x)$.

2.88. (МГУ, мех-мат, 2008, 5(6))
$$f(x) + (x-2)f(1) + 3f(0) = x^3 + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.12 Исследование функций

2.89. $x^4 + x^3 + 1 = 0.$

2.90. $x^9 - x^5 + x - 1 = 0.$

2.91. $x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + 1 = 0.$

2.92. $(x^2+2x+2)(x^2-x+1) = 1.$

2.93.* (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2011, 7(10))
Найдите наибольшее значение выражения $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_{2010}-x_{2011})^2+(x_{2011}-x_1)^2$ при $x_1,\ldots,x_{2011}\in[0,\,1]$.

Домашнее задание

2.94. $(x^2+x+1)(x^2+2x+3)=1$.

2.95. $x^4+x^3+x^2+1=0$.

2.96. $2x^9-x^5+x-2=0$.

2.97.* $(x^2+x+1)(x^4+x^2+4)=x^2+2x+3$.

2.98.* $x^4-x+\dfrac{1}{2}=0$.

2.99. (МГУ, “Ломоносов-2011”, заочный тур, 7(10))
Сколько решений имеет уравнение $\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{2}{x^2}$?

2.13 Уравнения с несколькими переменными

2.100. $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+3=0$.

2.101.* (МГУ, психологический, 1976, 5(5))
Из всех решений (x,y) уравнения $x^2y-x^2+4xy+6y-2x=3$ найти те решения, для которых y принимает наименьшее значение.

2.102.* (МГУ, психологический, 1986, 6(6))
Найти наибольшее из значений, которые принимает выражение $x+3y$, если x и y удовлетворяют неравенству $x^2+xy+4y^2\le 3$.

2.103.* (МГУ, мех-мат, 1989, 6(6))
Найти наибольшее из значений z, для которых существуют числа x,y, удовлетворяющие уравнению $2x^2+2y^2+z^2+xy+xz+yz=4$.

2.104.* (МГУ, биологический, 1989, 5(5))
Числа x,y,z таковы, что $x^2+3y^2+z^2=2$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $2x+y-z$?

2.105. (МГУ, 2011, 8(8))

Решить систему неравенств $\begin{cases} 4x^2 - 2xy + 7y^2 \le 1, \\ 2x - 5y \ge 2. \end{cases}$

Домашнее задание

2.106. $x^2 + 2xy + 2y^2 + 6y + 9 = 0.$

2.107. $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 13 - 2x - 12y - 6z = 0.$

2.108.* (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2011, 8(10))

$$\begin{cases} 5x^2 + 3y^2 + 3xy + 2xz - yz - 10y + 5 = 0, \\ 49x^2 + 65y^2 + 49z^2 - 14xy - 98xz + 14yz - 182x - 102y + 182z + 233 = 0. \end{cases}$$

2.109. (МГУ, ВМиК, Олимпиада “Абитуриент-2005”, 3(6))

Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие равенству

$$4x^2 - 2xy + 2y^2 + y - 2x - 1 = 0.$$

2.110.* (МГУ, мех-мат, 1989, 6(6))

Найти наименьшее из значений x, для которых существуют числа y, z, удовлетворяющие уравнению $x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$

2.111. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2004, 7(8))

Найдите наибольшее значение выражения $3x - 2y$ на множестве переменных x, y, удовлетворяющих условию $4x^2 + y^2 = 16.$

2.112.* (МГУ, биологический, 1989, 5(5))

Числа a, b, c таковы, что $2a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $a - 2b + c$?

2.113.* (МГУ, химический, 1997, 6(6))

Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + 2y^2$, если $x^2 - xy + 2y^2 = 1.$

2.114.* (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2007”, 7(10))

Определить, под каким углом видно из начала координат (т. е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0, 0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством $14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0.$

2.14 Многочлены

2.115. Разложить на множители многочлен x^4+1.

2.116. Найти многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число a) $1+\sqrt{5}$; b) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; c)* $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$.

2.117. Найти сумму: а) всех коэффициентов; б) коэффициентов при четных и нечетных степенях x выражения

$$(x^3-x+1)^{25}(x^2+x-1)^{17}.$$

2.118. Найти остаток от деления многочлена
$x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$ на x^2-1.

Домашнее задание

2.119. Разложить на множители многочлен a) x^8+x^4+1; b)* x^5+x+1.

2.120. Найти многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число a) $\sqrt{2}-1$; b) $\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}$.

2.121. Найти сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1-3x+3x^2)^{743}(1+3x-3x^2)^{744}$.

2.122. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют суммы коэффициентов a и b. Чему равна сумма коэффициентов их произведения?

2.123. Найти остаток от деления многочлена
$P(x)=x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}$ на a) x^2+x; b) x^2-x-2.

2.124. (МГУ, “Ломоносов-2011”, заочный тур, 9(10))
В какую степень надо возвести корень x_0 уравнения $x^{11}+x^7+x^3=1$, чтобы получить число $x_0^4+x_0^3-1$?

2.125.* Найти такие числа a, b, p, q, чтобы равенство $(2x-1)^{20}-(ax+b)^{20}=(x^2+px+q)^{10}$ выполнялось при любых x.

3 Уравнения с модулем

Решение уравнений, содержащих модули, может быть проведено с помощью раскрытия модулей и последующего решения полученных уравнений в каждом из промежутков и выбора тех корней, которые попали в эти промежутки. Иногда более простые решения уравнений получаются, если мы будем заменять наше исходное уравнение некоторой эквивалентной системой или совокупностью уравнений. Для каждого вида уравнений будем в начале пункта предлагать такую эквивалентную систему или совокупность уравнений.

3.1 Уравнения вида $|f| = g$

Решение уравнений вида $|f(x)| = g(x)$ можно проводить по одной из схем, приведенных ниже.

$$|f| = g \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f \geq 0, \\ f = g, \end{cases} \\ \begin{cases} f \leq 0, \\ -f = g; \end{cases} \end{array}\right. \quad (1) \qquad |f| = g \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f = g, \\ f = -g, \end{array}\right. \\ g \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Первая схема решения обычно излагается в школе, поскольку она непосредственно вытекает из определения модуля. Ею удобно пользоваться, если f — простая функция.

Вторая схема во многих случаях позволяет более коротко решать уравнения, поскольку состоит из меньшего числа уравнений и неравенств. Ею удобно пользоваться, если g — простая функция.

Ниже приводятся уравнения, которые решаются по одной из выписанных схем или сводятся к указанному виду уравнений. В некоторых задачах более простое решение получается, если вначале модуль функции взять за новую переменную, найти её, а затем собственно решать уравнение с модулем.

При решении уравнений пытайтесь найти наиболее удобную для данного уравнения схему решения. Правильный выбор метода решения существенно сэкономит время решения и меньше будет возможностей для совершения ошибки.

Решить уравнения:

3.1. $|x-3| = 2x$.

3.2. (МГУ, почвоведения, май 2001, 2(6))
$|2x+3| = x^2$.

3.3. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 1(8))
$|2x-4|+4 = 2x$.

3.4. (МГУ, геологический, 1991, 2(6))
$|x^2-2x-1|-x+1 = 0$.

3.5. (МГУ, экономический, 1978, 1(5))
Найти корни уравнения $2|x^2+2x-5| = x-1$ на промежутке $(-\infty; \sqrt{2})$. **"Тест"**

3.6. (МГУ, экономический (отд. менеджмента), 2000, 1(6))
$3|x+1|+x^2+4x-3 = 0$.

3.7. $x^2-5|x|+6 = 0$.

3.8. (МГУ, биологический, 2005, 1(7))
$x^2+2|x|-3 = 0$.

3.9. (МГУ, геологический, 1975, 1(5))
$(x-1)^2+|x-1|-2 = 0$.

Домашнее задание

3.10. (МГУ, геологический, 1979, 1(6))
$|2x-3| = 3-2x$.

3.11. (МГУ, химический, 2001, 1(6))
$|x| = 2-x$.

3.12. (МГУ, физический, 1995, 3(8))
$2|x+1| = 2-x$.

3.13. $|x| = x^2 + x - 2.$

3.14. $|x^2 - 2x - 1| = 2x + 2.$

3.15. (МГУ, ФББ, 2009, 2(9))

$$|x^2 - 5x + 3| = x - 3.$$

3.16. (МГУ, экономический, 1978, 1(5))

Найти корни уравнения $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$ на промежутке $\big(-\infty; \frac{\sqrt{3}}{3}\big)$. **"Тест"**

3.17. (МГУ, факультет Гос. управления, 2009, 2(7))

$$x^2 + |x| - 6 = 0.$$

3.18. (МГУ, физический, 1990, 1(6))

$$x^2 - 4|x| - 1 = 0.$$

3.19. (МГУ, биологический, 1996, 2(5))

$$(x - 7)^2 - |x - 7| = 30.$$

3.20. (МГУ, ВМиК, май 1994, 1(6))

$$\left(4|x - 1| + \frac{1}{2}\right)^2 = 11(x - 1)^2 + \frac{5}{4}.$$

3.21. (МГУ, геологический, 1990, 1(6))

$$-\frac{|x|}{x} - x = \frac{x^2}{2} + 1.$$

3.22. (Черноморский ф-л МГУ (г. Севастополь), 2007, 3(10))

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} = 2x.$$

3.23. (МГУ, геологический, 1980, 3(5))

$$x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0.$$

3.2 Уравнения вида $|f| = |g|$

Решение уравнений вида $|f(x)| = |g(x)|$ можно проводить по следующей схеме

$$|f| = |g| \iff \left[\begin{array}{l} f = g, \\ f = -g. \end{array} \right.$$

3.24. $|4x - 3| = |x - 5|$.

3.25. (МГУ, экономический, отд. менеджмента, 2001, 2(6))
$|x^2 - 8x + 15| = |15 - x^2|$.

3.26. $|x^3 - 2x - 3| = |x^3 - 2x + 5|$.

Домашнее задание

3.27. (МГУ, химический, 2005, 1(6))
$|2x + 1| = |x + 2|$.

3.28. $|x^2 - 3x + 2| = |x^2 - 5x - 6|$.

3.29. $|x^3 + x + 1| = |x^2 + 3x - 1|$.

3.30. $|x - 2| \cdot |x + 3| \cdot |x + 6| = |x + 1| \cdot |x + 4| \cdot |x + 9|$.

3.3 Уравнения с несколькими отдельно стоящими модулями

Для решения таких уравнений надо найти точки, в которых выражения под знаком модуля меняют знак. Отметить их на числовой прямой. Числовая прямая разобьётся на несколько промежутков. Раскрывая модули, решаем уравнение на каждом из полученных промежутков. При этом удобнее концы промежутков включать в рассмотрение каждый раз.

3.31. (МГУ, психологический, 2005, 4(6))
$2|x + 1| + |x - 2| = 9$.

3.32. $|x-1|+|x-2|=1$.

3.33. (МГУ, ф-т Государственного управления, 2008, 1(7))

$$|1-x|+|x+1|=\frac{2x}{|x|}.$$

3.34. (МГУ, экономический, 1984, 2(6))
Найти наименьшее значение функции $y=2|x-3|+|3x-2|-3$.

3.35. (МГУ, химический, заочный тур, 2000, 1(12))
Найти наименьшее значение функции
$f(x)=|x-3|+|x|+|x+3|+|x+5|-12$.

3.36. (МГУ, филологический, 1984, 3(5))
Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$y=-x^2+3|x-1|+2$ на отрезке $[-2;\,2]$.

3.37.* (МГУ, химический, 2001, 5(7))
$|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|+\dots+|x-100|+|x+100|=200x$.

3.38.* (МГУ, психологический, 2002, 6(6))

$$|x^3+7x^2-11x-6|+|x^3-12x^2-5x+3|=18x^2-2x-13.$$

3.39.* (МГУ, мех-мат, 2006, 6(6))
Найти наименьшее значение выражения $|2x-y-1|+|x+y|+|y|$, где x и y — произвольные действительные числа.

3.40.* (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2007, 7(10))
Решить уравнение $f(x,y,z)+|f(z,y,x)|=0$, где обозначено $f(a,b,c)=(a+b+2c+|a-b|)+|a+b-2c+|a-b||$.

Домашнее задание

3.41. $|x-2|+2|x-3|=4$.

3.42. (МГУ, биологический, 1995, 2(6))

$$|x-1|+|2x-3|=2.$$

3.43. (МГУ, географический, май 1996, 1(6))
$|5x-3|-|7x-4|=2x-1.$

3.44. (МГУ, Элиста, 1996, 2(10))
$|2x-1|+|x+2|-|3-x|=2.$

3.45. $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4.$

3.46. (МГУ, ИСАА, 1997, 2(7))
$4|x+1|-1=3|2x+5|-2|x+5|.$ **“Тест”**

3.47. $|x^2-1|=-|x|+1.$

3.48. (МГУ, ИСАА, 2003, 1(6))
$(|x|-5)^2-|5-x|=30.$

3.49. (МГУ, мех-мат, 1995, устный)
Сколько корней имеет уравнение

$$3-2|x-1|=2\left(\left|x-\frac{1}{4}\right|-\left|x+\frac{1}{4}\right|-\frac{1}{4}\right)?$$ **“Тест”**

3.50. $|x^2-4x+3|+|x^2-5x+6|=1.$ **“Тест”**

3.51. (МГУ, экономический, 1984, 2(6))
Найти наименьшее значение функции $y=|4x+6|+3|x+1|$.

3.52. (МГУ, филологический, 1984, 3(5))
Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$y=x^2-5|x+1|-2$ на отрезке $[-3;\,3]$.

3.53. $\left|\dfrac{x}{x-1}\right|+|x|=\dfrac{x^2}{|x-1|}.$ **“Тест”**

3.54. (МГУ, психологический, 1985, 4(6))
Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$y=|x^2+x|+|x^2-3x+2|$ на отрезке $\left[-\dfrac{1}{2};\,\dfrac{3}{2}\right]$.

3.55.* (МГУ, психологический, 2002, 6(6))

$$|x^3+12x^2-11x+6|+|x^3-7x^2-x-1| = 18x^2-14x+3.$$

3.56.* (МГУ, мех-мат, 2006, 6(6))

Найти наименьшее значение выражения $|y|+|3x-y|+|x+y-1|$, где x и y — произвольные действительные числа.

3.4 Уравнения с модулем в модуле

Решение уравнений с модулем в модуле удобно проводить, раскрывая модули, начиная с внешнего, по схеме (2) решения уравнений вида $|f| = g$ (см. п. 3.1).

3.57. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов, 2007, 1(8))

$$||x-1|-7| = 10.$$

3.58. (МГУ, экономический, 1989, 3(6))

$$||3-x|-x+1|+x = 6.$$

3.59. (МГУ, факультет Гос. управления, 2009, 5(7))

$$\big||x^2-5x|-5\big| = x-2.$$

3.60. (МГУ, мех-мат, 1995, устный)

Сколько корней имеет уравнение $|x^2-2|x|+1| = 3|2-x|-1$?

Домашнее задание

3.61. $||x-1|-2| = 3.$

3.62. $|2-|1-|x||| = 1.$

3.63. (МГУ, филологический, 2005, 1(7))

$$|x^2-3|x|+1| = 1.$$

3.64. (МГУ, факультет Гос. управления, 2009, 5(7))

$$2\big||x|-1\big| = 3|x|-1.$$

3.65. Сколько корней имеет уравнение
$|||x+7|-5|-3|=2$? **"Тест"**

3.66. (МГУ, экономический, 1989, 3(6))
$|x+1+|-x-3||-6=x.$

3.67. (МГУ, экономический, 1989, 3(6))
$|x-2-|4-x||+x=7.$

3.68. $|x-|4-x||-2x=4.$

3.69. (МГУ, психологический, 1998, 1(6))
$|2x-|4-7x|+5|=37.$

3.70. $|x-|2x+1||-4x=3.$ **"Тест"**

3.5 Системы уравнений с модулями

3.71. (МГУ, психологический, 1980, 2(5))

$$\begin{cases} 2x+y=7, \\ |x-y|=2. \end{cases}$$

3.72. $\begin{cases} |x-1|+|y-2|=1, \\ y=3-|x-1|. \end{cases}$

3.73.* (МГУ, мех-мат, март 2003, 4(6))
Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} |y+\log_2 x|+|y+1-2^{x-1}|=|2y-2^{x-1}+1+\log_2 x|, \\ |x|+|y+1|+|y-1|=x+2. \end{cases}$$

3.74.* (МГУ, географический, 1980, 5(5))
Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \left|x+\dfrac{1}{y}\right|+\left|\dfrac{10}{3}-x+y\right|=\dfrac{10}{3}+y+\dfrac{1}{y}, \\ x^2+y^2=\dfrac{82}{9}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $x>0$ и $y<0$.

Домашнее задание

3.75. (МГУ, физический, май 1994, 5(8))

$$\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|. \end{cases}$$

3.76. (МГУ, физический, май 1997, 5(8))

$$\begin{cases} y+|x+1|=1, \\ |y-x|=5. \end{cases}$$

3.77. (МГУ, филологический, 1988, 2(5))

$$\begin{cases} 2|x-2|+3|y-1|=4, \\ 2x-y=3. \end{cases}$$

3.78. $\begin{cases} |x-y|+2x=6, \\ |2x-y|+3x=6. \end{cases}$

3.79. (МГУ, ВМиК, 1974, 3(5))

$$\begin{cases} |x+3|+|x-2|=5, \\ 818-135x \le 137x^2. \end{cases}$$

“Тест”

3.80.* (МГУ, мех-мат, март 2003, 4(6))

Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} |y+3-2^{x-1}|+|y+\log_2 x| = |2^{x-1}-3+\log_2 x|, \\ |x-1|+|x-3|+|y|=2-y. \end{cases}$$

3.81.* (МГУ, географический, 1980, 5(5))

Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \left|y+\dfrac{1}{x}\right|+\left|\dfrac{13}{6}+x-y\right| = \dfrac{13}{6}+x+\dfrac{1}{x}, \\ x^2+y^2=\dfrac{97}{36}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $x<0$ и $y>0$.

4 Неравенства с модулем

Решение неравенств, содержащих модули, может быть проведено аналогично решению уравнений с модулями (с помощью раскрытия модулей) и последующего решения в каждом из промежутков полученных неравенств. Но более простые решения получаются, если мы будем заменять наше исходное неравенство некоторой эквивалентной системой или совокупностью неравенств. Для каждого вида неравенств будем в начале пункта выписывать такую эквивалентную систему или совокупность неравенств.

В некоторых задачах более простое решение получается, если модуль функции (например, $|x|$) взять за новую переменную, решить полученное неравенство, а затем вернуться к исходной переменной.

4.1 Неравенства вида $|f| < g$

Решение неравенств вида $|f(x)| < g(x)$ можно проводить по следующей схеме

$$|f| < g \iff \begin{cases} f < g, \\ f > -g, \end{cases} \qquad \left(|f| \leq g \iff \begin{cases} f \leq g, \\ f \geq -g, \end{cases}\right).$$

Ниже приводятся неравенства, которые решаются по выписанной схеме или сводятся к указанному виду неравенств.

Решить неравенства:

4.1. $|x-2| \leq 0.$

4.2. $|x-3| < 2x-4.$

4.3. $|x^2-1| < 2x.$ **"Тест"**

4.4. (МГУ, географический, 1997, 1(6))
$$\frac{|x-1|+10}{4|x-1|+3} > 2.$$

Домашнее задание

4.5. $|x-3| \leq 1$.

4.6. (МГУ, почвоведения, 2002, 1(7))
$|5-7x| < 2$.

4.7. (Ташкентский ф-л МГУ, 2007, 2(10))
$|2x-3| - x \leq 1$.

4.8. (МГУ, Московская школа экономики, 2007, 3(8))
$\left|\frac{x}{10} - \frac{1}{5}\right| \geq \left|\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right|$.

4.9. (МГУ, химический, 1994, 2(5))
$2x > |x| + 1$.

4.10. (МГУ, географический, 1987, 2(5))
$y^2 + 3|y| < 10$.

4.11. (МГУ, почвоведения, 2003, 3(6))
$\frac{3}{2}x^2 - |x| \geq 0$. **"Тест"**

4.12. (МГУ, физический, 1974, 2(5))
$(|x|-1)^2 > 2$.

4.13. (МГУ, физический, май 1996, 3(8))
$-1 < |x^2-9| < 27$.

4.14. (МГУ, геологический, 1982, 2(6))
$\frac{2x+5}{|x+1|} \geq 1$.

4.15. $|x^2-2x| < x-1$. **"Тест"**

4.16. $|x^3-x+1| < x+1$.

4.17. $3x^2 - |x-3| > 9x-2$.

4.18.* $\left|x^2 - |x|\right| < \frac{1}{4}$.

4.2 Неравенства вида $|f| > g$

Решение неравенств вида $|f(x)| > g(x)$ можно проводить по следующей схеме

$$|f| > g \iff \left[\begin{array}{l} f > g, \\ f < -g, \end{array}\right. \qquad \left(|f| \geq g \iff \left[\begin{array}{l} f \geq g, \\ f \leq -g, \end{array}\right.\right).$$

4.19. $|x-3| > 0$.

4.20. (МГУ, географический, 1977, 1(5))
$2|x+1| > x+4$.

4.21. (Черноморский ф-л МГУ (г. Севастополь), 2007, 2(10))
Найдите все целые значения x, для которых справедливо неравенство $\left|\dfrac{3}{x-2}\right| \geq \dfrac{9}{7}$.

4.22. (МГУ, геологический, 1995, 2(8))
$x^2 - 6 > |x|$.

4.23. $2|x^2-1| > x+1$.

Домашнее задание

4.24. $|x-3| \geq 2x$.

4.25. (МГУ, почвоведения, 2002, 1(7))
$|9-5x| > 1$.

4.26. (МГУ, физический, 1974, 2(5))
$|x| - 2 > (x-2)^2$.

4.27. (МГУ, физический, 1974, 2(5))
$x^2 - 2|x+1| < 0$.

4.28. $|x^2-1| > x+100$.

4.29. $|x^2-2x-8| > 2x$.

4.30. $2|x-2| > x^2+x-10.$ **"Тест"**

4.31. (МГУ, геологический, 1977, 2(5))
$x^2-|5x-3|-x<2.$

4.32. (МГУ, ИСАА, 2000, 1(7))
$|2x-1| > \dfrac{1}{x-2}.$

4.33. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2006, 3(8))
$\dfrac{|x^2+x-12|}{x-3} \geq 1.$

4.34. $x^2-5|x|+6<0.$

4.35. (МГУ, физический, 1974, 2(5))
$3|x-1| > (x-1)^2+1.$

4.36. $\dfrac{|x-2|}{x-2} > 0.$

4.37. $\dfrac{1}{|x|-3} < \dfrac{1}{2}.$

4.38. (МГУ, почвоведения, 2005, 3(6))
$\dfrac{1}{|x+1|-1} \geq \dfrac{2}{|x+1|-2}.$

4.3 Неравенства вида $|f| > |g|$

Решение неравенств вида $|f(x)| > |g(x)|$, а также $|f(x)| \geq |g(x)|$ можно проводить по следующему методу

$$|f| > |g| \iff f^2 > g^2 \iff f^2-g^2>0 \iff (f-g)(f+g)>0.$$

Последнее неравенство решаем методом интервалов.

Если $g(x)$ — неотрицательная функция (например, положительная константа), то $g(x) = |g(x)|$ и по описанному методу можно проводить также решения неравенств вида $|f| > g$ или $|f| < g$.

4.39. $|3x-4|>|2x-3|$.

4.40. $\left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|\geq 2$.

4.41. (Черноморский ф-л МГУ (г. Севастополь), 2001, 3(8))
$\dfrac{|x-1|-|2x+1|}{|x-2|-|2x+2|}\geq 0$.

4.42.* $\dfrac{x^2-6x+5}{|x^2+4x-12|-|3x^2-18x+24|}\geq 0$.

Домашнее задание

4.43. (МГУ, почвоведения, 2005, 3(6))
$|x-1|\leq |x|$.

4.44. $|4x-3|<|3x-4|$.

4.45. $|x+2|\geq |x-2|$.

4.46. (МГУ, экономический, 2001, 1(7))
$|x^2-8x+15|\leq |15-x^2|$.

4.47. $|3x^2-7x-6|<|x^2+x|$. **“Тест”**

4.48. (МГУ, химический, 2001, 1(7))
$\dfrac{1}{|x-1|}>\dfrac{1}{|x+1|}$.

4.49. (МГУ, тест, 1995, 2(8))
$\left|\dfrac{x^2-x-6}{x+2}\right|\geq 2$.

4.50. $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leq 1$.

4.51. $\left|\dfrac{x}{x+1}\right|>x^2$.

4.4 Неравенства с несколькими отдельно стоящими модулями

Неравенства с несколькими отдельно стоящими модулями решаются по той же схеме, что и уравнения с несколькими отдельно стоящими модулями. Надо найти точки, в которых выражения под знаком модуля меняют знак. Отметить их на числовой прямой. Числовая прямая разобьётся на несколько промежутков. Раскрывая модули, решаем неравенство на каждом из полученных промежутков. При этом удобнее концы промежутков включать в рассмотрение каждый раз.

4.52. (МГУ, ВМиК (отд. бакалавров), 2003, 1(7))
$5|x-2|-2|x-3|\le 1.$

4.53. (МГУ, химический, физико-химический, ФНМ, биолог., ФФМ, ФБиБ, географический, психологический, 2007, 2(8))

$$\frac{x^2+4x+4}{2x+12}\le 1-\frac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4}.$$

4.54. (МГУ, экономический, 1987, 3(5))

$$\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1}\le 2.$$

“Тест”

4.55. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2005, 2(10))
$|\sqrt{x+3}-2|+\sqrt{x+3}+|x+1|\le x+3.$

4.56. (МГУ, мех-мат, 2008, 1(6))
$\big||1-x^2|-|x^2-3x+2|\big|\ge 3|x-1|.$

Домашнее задание

4.57. (МГУ, геологический, май 2001, 1(8))

$$\frac{|x-3|+2}{|2x-3|-5}\le 0.$$

4.58. (МГУ, социологический, филологический, 2006, 1(6))

$$\frac{5-4x}{|x-2|}\le |2-x|.$$

4.59. (МГУ, социологический, 2008, 1(7))
$|x| \leq \dfrac{18 - 3x}{|x|}$.

4.60. (МГУ, геологический, 2003, 1(7))
$\dfrac{x - 2}{|x + 2|} + \dfrac{2x + 5}{x + 2} \leq 0$.

4.61. (МГУ, геологический, 2002, 1(8))
$\dfrac{x|x| + 1}{x - 2} + 1 \geq x$.

4.62. (МГУ, геологический, май 2002, 1(8))
$\dfrac{x + 1}{|2 - x|} + \dfrac{x + 1}{x - 5} \leq 0$.

4.63. $|x - 1| + 2|x - 2| \leq 3$.

4.64. $|2x - 3| + |x - 1| < 5$.

4.65. (МГУ, факультет Гос. управления, 2003, 2(7))
$|2x + 8| \geq 8 - |1 - x|$.

4.66. (МГУ, биологический, ФФМ, 1998, 2(5))
$|x^2 + x - 2| + |x + 4| \leq x^2 + 2x + 6$.

4.67. (МГУ, географический, 2003, 2(5))
$\dfrac{6}{|x|} \geq 7 + x$.

4.68. $\dfrac{1}{2 - |x|} \leq \dfrac{3}{x}$.

4.69. (МГУ, мех-мат, 1985, 2(5))
$\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{3}{|x| + 1} \geq \dfrac{1}{|x| - 1}$.

4.70. (МГУ, ИСАА, 1998, 3(7))
$\dfrac{3|x| - 11}{x + 3} \geq \dfrac{3x - 14}{x + 6}$. **“Тест”**

4.71. (МГУ, ИСАА, 1992, 3(6))

$$\frac{2|x-1|}{3-|x+2|} \leq 1.$$

4.72. (МГУ, филологический, 1991, 3(6))

$$\frac{|x+1|+|x-2|}{x+199} \leq 1.$$

4.73. (МГУ, психологический, 1979, 3(5))

$$\frac{9}{|x-5|-3} \geq |x-2|.$$

4.74. (МГУ, психологический, 1979, 3(5))

$$\frac{3}{|x+3|-1} \geq |x+2|.$$

4.75. (МГУ, ВМиК, 1993, 3(6))

$$|2^x-4|+|x^2-4x+3| \leq 2^x+4x-x^2-7.$$

4.76.* (МГУ, мех-мат, май 1999, 3(6))

Найти все x, при которых хотя бы одно из двух выражений $|x-3|(|x-5|-|x-3|)-6x$ и $|x|(|x|-|x-8|)+24$ неположительно и при этом его модуль не меньше модуля другого.

4.77. (МГУ, мех-мат, 2002, 6(6))

Найдите минимальное значение выражения $(x+y-z)^2$ при условии, что числа x, y и z удовлетворяют одновременно каждому из неравенств: $8 \leq (y+z)^2 \leq 9$; $10 \leq (z+x)^2 \leq 11$; $1 \leq (x+y)^2 \leq \frac{4}{3}$.

4.5 Неравенства с модулем в модуле

Решение неравенств с модулем в модуле удобно проводить, раскрывая модули, начиная с внешнего, по схеме решений неравенств с модулями $|f| < g$ или $|f| > g$.

4.78. (МГУ, химический, май 1996, 3(5))

$$\big|x+|1-x|\big| > 3.$$

4.79. $\big||x^2-3x+2|-1\big| > x-2.$

Домашнее задание

4.80. (МГУ, химический, май 1996, 3(5))
$\big|x-1+|x-2|\big|>7.$

4.81. $\big|x-2|x-2|\big|<x-1.$

4.82. $\big||x^2-x|-1\big|\leq x.$

4.83. (МГУ, ВМиК, апрель 2000, 1(6))
$\big||x^2-8x+2|-x^2\big|\geq 2x+2.$

4.84. $\big||x^2-1|-x\big|\geq 1.$ **"Тест"**

4.6 Метод интервалов в неравенствах с модулями

4.85. (МГУ, ИСАА, 2007, 1(7))
$|x+3|\cdot(|x-1|-3)\leq 0.$

Домашнее задание

4.86. (МГУ, геологический, 1994, 6(8))
$|x|(x^4-2x^2-3)\geq 0.$ **"Тест"**

4.87. (Черноморский ф-л МГУ, май 2001, 2(9))
$\dfrac{|x-1|}{3-x}\geq\dfrac{|x-1|}{3-2x}.$

4.88. (МГУ, геологический, 2005, 1(8))
$(|x|-1)(2x^2+x-1)\leq 0.$ **"Тест"**

4.89. $\big(|x-1|-3\big)\big(|x+2|-5\big)<0.$

4.90. (МГУ, геологический, 2006, 1(8))
$\dfrac{x^2-9}{|x|-3}\cdot(x+4)\geq 0.$

Ответы, указания, решения

1.1. *Решение.* Решаем неравенство методом интервалов.

Перенесём единицу в левую часть неравенства.

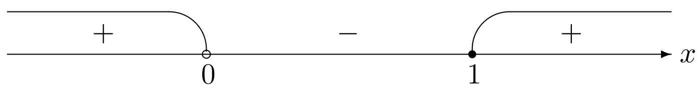
Приведём слагаемые к общему знаменателю.

Удобно определять знаки дроби, когда перед x стоит знак "+". Поэтому умножаем обе части неравенства на -1, чтобы коэффициент при x в числителе был со знаком плюс. Знак неравенства при этом меняется на противоположный.

$$\frac{1}{x} \leq 1 \iff \frac{1}{x} - 1 \leq 0 \iff \frac{1-x}{x} \leq 0 \iff \frac{x-1}{x} \geq 0.$$

Отметим корень числителя $x = 1$ и корень знаменателя $x = 0$ на числовой прямой. Поскольку неравенство нестрогое, то корень числителя $x = 1$ входит в решение неравенства, поэтому его обозначаем жирной точкой. Корень знаменателя $x = 0$ не может являться решением, поэтому его обозначаем кружочком (выколотая точка).

Внутри полученных трёх интервалах знак дроби не меняется. Определим знак дроби в каждом из интервалов. Для этого возьмём точки внутри интервалов, например, рассматривая интервалы справа налево, точки 2, $\frac{1}{2}$, -1, подставим их в дробь и найдём знак дроби.



В ответ выписываем те промежутки, в которых дробь имеет положительный знак: от $-\infty$ до нуля и от единицы до $+\infty$. Особое внимание при этом обращаем на концы промежутков, исключая выколотую точку $x = 0$ и включая жирную точку $x = 1$.

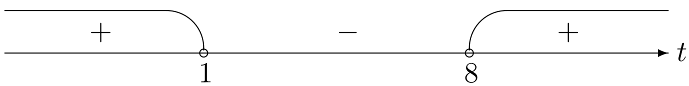
Ответ. $(-\infty;\, 0) \cup [1;\, +\infty)$.

1.2. $[-2; -1) \bigcup \left(0; \dfrac{3}{2}\right]$. **1.3.** $(-\infty; 1) \bigcup \left(\dfrac{4}{3}; 2\right)$. **1.6.** $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$.
1.7. $(-3;\, +\infty)$. **1.8.** $[-3;\, 0)$. **1.9.** $(-\infty;\, 1] \cup (1996;\, +\infty)$.
1.10. $(-\infty;\, -1] \cup (1;\, +\infty)$. **1.11.** $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \bigcup [2;\, +\infty)$.

1.12. $\left(0;\ \dfrac{1}{3}\right]\bigcup(1;\ +\infty)$. **1.13.** $(-\infty;\ 0)\bigcup\left[\dfrac{2}{3};\ 1\right)$.
1.14. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **1.15.** $[-5;\ 1]\cup(2;\ 3)$.
1.16. $(-\infty;\ 1]\cup[4;\ 5)$. **1.17.** $(-\infty;\ -2)\cup(-1;\ 0]$.
1.18. $(-\infty;\ -1]\cup(1;2)\cup[4;\ +\infty)$.
1.19. $\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{2};\ 1\right)\bigcup\left[\dfrac{1+\sqrt{7}}{2};\ +\infty\right)$.
1.20. $(-\infty;-8)\cup(-5;-2)\cup[0;+\infty)$. **1.21.** $(-\infty;-3)\cup(-2;-1)$.
1.22. $(-\infty;-9)\bigcup\left(\dfrac{2}{3};\ 1\right)\bigcup\left[\dfrac{11}{2};\ +\infty\right)$. **1.23.** $(0;\ +\infty)$.
1.24. $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 5]$. **1.25.** -6. **1.26.** 1.
1.29. $(-\infty;\ -\sqrt{17})\cup[-4;\ -3)\cup(-3;\ 3)\cup(\sqrt{17};\ 5]$.
1.32. $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right]\bigcup[3;5)\cup(5;+\infty)$.
1.34. $(-\infty;-7]\bigcup\left\{-\dfrac{10}{3}\right\}\bigcup\left[\dfrac{5}{2};6\right]$.
1.35. $(-\infty;-2]\cup\{-1\}\cup[0;\ 1)\cup(1;\ 2)$.
1.37. $\left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\ -1\right)\bigcup(-1;\ 0)\bigcup\left(0;\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$.
1.38. $(-1;\ 2)\cup(2;\ 3)$. **1.39.** $(-\infty;\ 2)\cup(2;3)\cup(5;\ +\infty)$.
1.40. $\{0\}\cup(1;\ +\infty)$. **1.41.** $(-\infty;\ 1)\cup\{2\}$. **1.42.** $\{-5\}\cup(-2;\ 3)$.
1.43. $\left(-2;\dfrac{3}{2}\right)\bigcup\{3\}$. **1.44.** $\left[-\dfrac{5}{2};-2\right]\bigcup\left[-1;\dfrac{1}{3}\right]\bigcup\{1\}\cup[2;+\infty)$.
1.46. $[-1;\ 2]\cup[3;\ 4]$. **1.47.** $(-1;\ 5)$. **1.48.** $[-2;\ -1)\cup(-1;\ 2]$.
1.49. $0;\ \pm4;\ \pm5;\ \pm9$. **1.50.** $[0;1]\cup(2;+\infty)$. **1.52.** $\left\{\dfrac{3}{2}\right\}\bigcup[8;+\infty)$.
1.53. $\{-1\}\cup[2;+\infty)$. **1.55.** $[2;4]$. **1.56.** $[1;4)$. **1.58.** $\{-1\}\cup[1;+\infty)$.
1.59. $\{-4\}\cup[-3;+\infty)$. **1.60.** $\{-2\}\cup[2;6]$.
1.61. $(-\infty;1]\cup\{3\}\cup[7;+\infty)$. **1.63.** $(-2;0)\cup[2;3)$. **1.64.** $[-4;1]\cup\{2\}$.

1.65. *Решение.* Обозначим $t=x^3$. Полученное относительно t неравенство решаем методом интервалов. Ответ для t выписываем в виде неравенства.

$$x^6-9x^3+8>0 \iff t^2-9t+8>0 \iff (t-1)(t-8)>0$$



$$\iff \left[\begin{array}{l} t<1,\\ t>8,\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x^3<1,\\ x^3>8,\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x<1,\\ x>2.\end{array}\right.$$

Подставляем $t = x^3$ и извлекаем кубический корень из обеих частей неравенств.

Ответ. $(-\infty;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$.

1.66. $(-\infty;\ -4] \cup [-2;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$. **1.68.** $(2;\ +\infty)$.
1.69. $\left(\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{5}};+\infty\right)$. **1.70.** $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \cup [\sqrt{3}; +\infty)$.
1.72. $(-2;-1) \cup (2;3)$. **1.73.** $(-1;1)$. **1.74.** $(-2;-1) \cup (1;+\infty)$.
1.76. $[-2;\ 0) \cup (0;\ 1]$. **1.77.** $(-1-\sqrt{2};\ -1+\sqrt{2})$.

2.1. $\dfrac{1}{2}$. **2.2.** 2. **2.3.** $-\dfrac{7}{288}$. **2.5.** $\dfrac{1}{2}$. **2.6.** 18.

2.7. *Решение.* Деление “уголком” этих многочленов осуществляется так:

$$\begin{array}{l|l}
-\,x^5 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1 & x^2 - x \\ \cline{2-2}
\underline{\ \ x^5 - x^4} & x^3 + x^2 + 2 \\
\quad -\,x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1 & \\
\quad\ \ \underline{\ \ x^4 - x^3} & \\
\qquad\quad -\,2x^2 - 3x + 1 & \\
\qquad\quad\ \ \underline{\ \ 2x^2 - 2x} & \\
\qquad\qquad\quad -x + 1 &
\end{array}$$

При делении в остатке получился многочлен $-x+1$.

Ответ. $x^5 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^2 - x)(x^3 + x^2 + 2) - x + 1$.

2.8. *Решение.*

$$\begin{array}{l|l}
-\,x^4 + 2x^2 - 3x - 6 & x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{\ \ x^4 + x^3} & x^3 - x^2 + 3x - 6 \\
\quad -\,-x^3 + 2x^2 - 3x - 6 & \\
\quad\ \ \underline{\ \ -x^3 - x^2} & \\
\qquad\quad -\,3x^2 - 3x - 6 & \\
\qquad\quad\ \ \underline{\ \ 3x^2 + 3x} & \\
\qquad\qquad -\,-6x - 6 & \\
\qquad\qquad\ \ \underline{\ \ -6x - 6} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

В данном случае многочлен x^4+2x^2-3x-6 разделился на многочлен $x+1$ без остатка.

Ответ. $x^4+2x^2-3x-6=(x+1)(x^3-x^2+3x-6)$.

2.9. $x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)$.

2.10. $x^3-2x^2+4x-1=(x^2-1)(x-2)+5x-3$.

2.11. $x^3-1=(x^2+1)x-x-1$. **2.12.** $x^4-x^2=(x+1)(x^3-x^2)$.

2.13. $x^5-x^2+x+3=(x^3+1)x^2-2x^2+x+3$.

2.14. $x^4-x^3+x^2+3x-4=(x^2-1)(x^2-x+2)+2x-2$. **2.15.** 3.

2.16. *Решение.* Если уравнение

$$x^4-5x^3+7x^2-5x+6=0$$

имеет целый корень, то он содержится во множестве $\{\pm1;\ \pm2; \pm3; \pm6\}$. Подставляя эти числа в указанном порядке в уравнение, проверяем, являются ли эти числа корнями уравнения. Оказывается, что первым корнем является число $x=2$. Разделим исходный многочлен на множитель $x-2$ "уголком":

$$x^4-5x^3+7x^2-5x+6=(x-2)(x^3-3x^2+x-3)=0.$$

Найдем целые корни уравнения

$$x^3-3x^2+x-3=0.$$

Они должны содержаться во множестве $\{\pm1;\ \pm3\}$. Поскольку числа ±1 не являлись корнями исходного уравнения, то они не являются и корнями последнего уравнения. Осталось проверить числа ±3. Оказывается, что корнем является число $x=3$. Разделим многочлен x^3-3x^2+x-3 на множитель $x-3$ "уголком" и найдем оставшиеся корни квадратного трехчлена:

$$x^3-3x^2+x-3=(x-3)(x^2+1)=0.$$

Таким образом,

$$x^4-5x^3+7x^2-5x+6=(x-2)(x-3)(x^2+1)=0.$$

Уравнение $x^2+1=0$ корней не имеет.

Ответ. 2; 3.

2.17. 1. **2.18.** -5; -3; 2. **2.19.** -2; 3. **2.20.** 4. **2.22.** $\frac{1}{3}$.

2.23. *Решение.* Если уравнение

$$2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21 = 0$$

имеет рациональный корень, то он содержится во множестве $\left\{\pm 1; \pm 3; \pm 7; \pm 21; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{3}{2}; \pm\frac{7}{2}; \pm\frac{21}{2}\right\}$. Подставляя эти числа указанном порядке в в уравнение, проверяем, являются ли эти числа корнями уравнения. Оказывается, что первым корнем является число $x = -3$. Разделим исходный многочлен на множитель $x + 3$ “уголком”:

$$2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21 = (x + 3)(2x^3 + x^2 - 15x + 7) = 0.$$

Найдем рациональные корни уравнения

$$2x^3 + x^2 - 15x + 7 = 0.$$

Они должны содержаться во множестве $\left\{\pm 1; \pm 7; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{7}{2}\right\}$. Поскольку числа ± 1 не являлись корнями исходного уравнения, то они не являются и корнями последнего уравнения. Осталось проверить числа ± 7; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{7}{2}$. Оказывается, что корнем является число $x = \frac{1}{2}$. Разделим многочлен $2x^3 + x^2 - 15x + 7$ на множитель $x - \frac{1}{2}$, а лучше на $2x - 1$, “уголком” и найдем оставшиеся корни квадратного трехчлена:

$$2x^3 + x^2 - 15x + 7 = (2x - 1)(x^2 + x - 7) = 0.$$

$$x^2 + x - 7 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}.$$

Таким образом,

$$2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21 =$$

$$= (x + 3)(2x - 1)\left(x - \frac{-1 - \sqrt{29}}{2}\right)\left(x - \frac{-1 + \sqrt{29}}{2}\right) = 0.$$

Ответ. -3; $\frac{1}{2}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$.

2.24. $-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}$. **2.25.** $-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. **2.26.** $-\frac{1}{4}; \frac{5}{4}$. **2.27.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2.28. $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. **2.29.** $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. **2.30.** $\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$.
2.31. $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$. **2.32.** $-\sqrt{3}$. **2.33.** $-\sqrt{2}$. **2.34.** $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
2.35. $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$. **2.36.** $1\pm\sqrt{3}$. **2.37.** $\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$.
2.38. $\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2(\sqrt{2}-1)}$. **2.39.** $-\frac{3}{2}; \frac{-3\pm\sqrt{10}}{2}$. **2.40.** $\pm\sqrt{\sqrt{10}-3}-1$.
2.41. $\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}+1$. **2.42.** $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. **2.43.** $-1; 12$. **2.44.** $-3; 2$.
2.45. $-1; 0$. **2.46.** $-\frac{1}{12}; \frac{1}{2}$. **2.47.** $\frac{-5\pm\sqrt{21}}{6}$. **2.48.** $t=x-\frac{a+b}{2}$.
2.49. $t=x-\frac{a-b}{2}$. **2.50.** $\pm\sqrt{\frac{4\sqrt{2}-3}{4}}+\frac{1}{2}$. **2.51.** $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.
2.52. $\frac{\sqrt{2}-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

2.53. *Решение.* Имеем симметрическое уравнение четвёртой степени. Перепишем уравнение, сгруппировав слагаемые с одинаковыми коэффициентами:

$$x^4-5x^3+6x^2-5x+1=0 \iff x^4+1-5(x^3+x)+6x^2=0.$$

Разделим обе части уравнения на x^2:

$$x^2+\frac{1}{x^2}-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0. \qquad (*)$$

Обозначим $x+\dfrac{1}{x}=t$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим, что $x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=t^2$. Отсюда $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$. Подставим полученные выражения в уравнение $(*)$:

$$t^2-2-5t+6=0 \iff t^2-5t+4=0 \iff t=1;\ 4.$$

Значит,

$$x+\frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x+1=0 \Leftrightarrow x\in\emptyset \ (D=1-4=-3<0);$$
$$x+\frac{1}{x}=4 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{3}.$$

Ответ. $2\pm\sqrt{3}$.

2.54. $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. **2.55.** -1; $-2\pm\sqrt{3}$. **2.56.** $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; $1\pm\sqrt{2}$.

2.57. $1\pm\sqrt{2}$. **2.58.** $2\pm\sqrt{2}$. **2.59.** $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. **2.60.** 1; $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

2.61. $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; $2\pm\sqrt{3}$. **2.62.** -1; $\frac{1}{2}$; 2; $-2\pm\sqrt{3}$. **2.63.** $\emptyset$.

2.64. $1\pm\sqrt{2}$; $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$; $\frac{5\pm\sqrt{29}}{2}$. **2.65.** $a(1\pm\sqrt{2})$; $a\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

2.66. -2; 6; $3\pm\sqrt{21}$. **2.67.** 2; $\frac{-5-\sqrt{21}\pm\sqrt{10\sqrt{21}-18}}{4}$.

2.68. ±1; $2\pm\sqrt{3}$. **2.69.** -4; -2. **2.70.** $\emptyset$. **2.71.** 0; $\pm\sqrt{3}$; 3. **2.72.** $\frac{2}{3}$; 3.

2.73. $\frac{1}{2}$; 5. **2.74.** $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{2}$. **2.75.** $-2\pm\sqrt{3}$. **2.76.** -3; 1. **2.77.** $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

2.78. $-\frac{1}{6}$; 2; $\frac{19\pm\sqrt{1333}}{54}$. **2.79.** $\sqrt{2}$; $\frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$.

2.80. $\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{3}+1}}{2}$; $\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$.

2.81. $\begin{cases} a<-\frac{1}{4}, \\ x\in\emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} -\frac{1}{4}\le a<0, \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} 0\le a, \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}; \pm\sqrt{2a}. \end{cases}$

2.82. $\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{2}+1}}{2}$; $\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$.

2.83. *Решение* I. В уравнении

$$(x^2+2x-5)^2+2(x^2+2x-5)-5=x$$

обозначим $f(x)=x^2+2x-5$. Тогда оно перепишется в виде

$$f^2+2f-5=x \iff f(f(x))=x.$$

Ясно, что корни уравнения $f(x) = x$ являются корнями исходного уравнения $(f(x_0) = x_0 \Rightarrow f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0)$. Решим уравнение

$$f(x) = x \iff x^2 + 2x - 5 = x \iff x^2 + x - 5 = 0 \iff$$

$$x^2 + x - 5 = (x - x_1)(x - x_2) = 0, \text{ где } x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Найдем остальные корни исходного уравнения. Преобразуем исходное уравнение к обычному виду, возведя первое слагаемое в квадрат и приведя свободные члены:

$$x^4 + 4x^2 + 25 + 4x^3 - 10x^2 - 20x + 2x^2 + 4x - 10 - 5 - x = 0 \iff$$

$$x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 17x + 10 = 0.$$

У полученного многочлена уже найдены два корня: x_1 и x_2. Для нахождения остальных корней надо разделить многочлен на $x - x_1$ и $x - x_2$. Удобно разделить сразу на произведение $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + x - 5$. Разделим многочлен $x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 17x + 10$ на трехчлен $x^2 + x - 5$ "уголком" и найдем оставшиеся корни квадратного трехчлена:

$$x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 17x + 10 = (x^2 + x - 5)(x^2 + 3x - 2) = 0.$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0 \iff x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$; $\dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Решение II. Обозначим $x^2 + 2x - 5 = y$. Тогда исходное уравнение будет эквивалентно системе

$$\begin{cases} y^2 + 2y - 5 = x, \\ x^2 + 2x - 5 = y. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе уравнение:

$$y^2 - x^2 + 2y - 2x = x - y \iff (y - x)(y + x + 3) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} y = x, \\ y = -x - 3. \end{array}\right.$$

Подставляя найденные значения y в первое уравнение системы, найдем x:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y = x, \\ x^2 + 2x - 5 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -x - 3, \\ x^2 + 2x - 5 = -x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}. \end{cases}\end{array}\right.$$

2.84. 2; 3. **2.85.** -1; $\pm\sqrt{3}$; 3. **2.86.** $-1 \pm \sqrt{3}$; $-2 \pm \sqrt{2}$.
2.87. $1 + 8n$, $7 + 8m$, $n, m \in \mathbb{Z}$. **2.88.** $f(x) = x^3 - x + 1$.
2.89. $\emptyset$. **2.90.** 1. **2.91.** $\emptyset$. **2.92.** $\emptyset$. **2.93.** 2010. **2.94.** $\emptyset$. **2.95.** $\emptyset$.
2.96. 1. **2.97.** $\emptyset$. **2.98.** $\emptyset$. **2.99.** 1. **2.100.** $(0, -1)$. **2.101.** $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.
2.102. $2\sqrt{2}$. **2.103.** $\sqrt{5}$. **2.104.** $4\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **2.105.** $\left(\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{3}\right)$.
2.106. $(3, -3)$. **2.107.** $\left(1, \dfrac{3}{2}, 1\right)$. **2.108.** $(0, 1, -2)$; $\left(\dfrac{2}{7}, 1, -\dfrac{12}{7}\right)$.
2.109. $(0, -1)$. **2.110.** $-\sqrt{\dfrac{7}{5}}$. **2.111.** 10. **2.112.** $-\sqrt{\dfrac{33}{2}}$.
2.113. $\dfrac{8 + 2\sqrt{2}}{7}$, $\dfrac{8 - 2\sqrt{2}}{7}$. **2.114.** $\operatorname{arctg} \dfrac{7}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.
2.115. $x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.
2.116. a) $x^2 - 2x - 4$; b) $x^4 - 10x^2 + 1$; c) $x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125$.
2.117. а) 1; б) $0; 1$. **2.118.** $6x$.
2.119. a) $x^8 + x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$; b) $x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$.
2.120. a) $x^2 + 2x - 1$; b) $x^6 - 9x^4 - 10x^3 + 27x^2 - 90x - 2$.
2.121. 1. **2.122.** ab. **2.123.** a) $5x$; b) $\frac{15+2^9+2^{27}+2^{81}}{3}x + \frac{2^9+2^{27}+2^{81}}{3}$.
2.124. 15. **2.125.** $a = \mp\sqrt[20]{2^{20} - 1}$, $b = \pm\dfrac{\sqrt[20]{2^{20} - 1}}{2}$, $p = -1$, $q = \dfrac{1}{4}$.

3.1. *Решение* I. Уравнение вида $|f| = g$ решим по схеме (1) п. 3.1

$$|x-3| = 2x \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x-3 = 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 \leq 0, \\ -x+3 = 2x, \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 3, \\ x = -3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 3, \\ x = 1, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x \in \emptyset, \\ x = 1, \end{array}\right. \iff x = 1.$$

Ответ. 1.

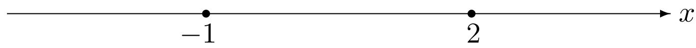
Решение II. Уравнение вида $|f| = g$ решим по схеме (2) п. 3.1

$$|x-3| = 2x \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-3 = 2x, \\ x-3 = -2x, \end{array}\right. \\ 2x \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ x \geq 0, \end{cases} \iff x = 1.$$

Видно, что в данном примере вторая схема решения оказалась существенно проще первой.

3.2. -1, 3.**3.3.** $[2; +\infty)$.**3.4.** $2; 3$.**3.6.** $-3; 0$.**3.7.** $\pm 2; \pm 3$.**3.8.** ± 1. **3.9.** $0; 2$.**3.10.** $\left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right]$.**3.11.** 1.**3.12.** $-4; 0$.**3.13.** $-1-\sqrt{3}; \sqrt{2}$. **3.14.** $2\pm\sqrt{7}$.**3.15.** 4, $3+\sqrt{3}$.**3.17.** ± 2.**3.18.** $\pm(2+\sqrt{5})$.**3.19.** $1; 13$. **3.20.** $\dfrac{4}{5}; \dfrac{6}{5}$. **3.21.** -2. **3.22.** $-\dfrac{1}{2}$. **3.23.** $\dfrac{11-\sqrt{29}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$. **3.24.** $-\dfrac{2}{3}; \dfrac{8}{5}$. **3.25.** $0; \dfrac{15}{4}; 4$. **3.26.** $1; \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. **3.27.** ± 1. **3.28.** $-4; 2\pm\sqrt{6}$. **3.29.** $0;\ 1; \pm\sqrt{2}$. **3.30.** $-7; -\dfrac{7}{2}; 0; \dfrac{-49\pm\sqrt{385}}{14}$.

3.31. *Решение.* Найдем точки, в которых выражения под знаком модуля меняют знак: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$; $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$. Отметим их на числовой прямой. Числовая прямая разобьётся на три промежутка. Раскрывая модули, решаем уравнение на каждом из полученных промежутков. При этом концы промежутков включаем в рассмотрение каждый раз.



$2|x+1|+|x-2|=9 \iff$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le -1,\\ -2x-2-x+2=9 \Leftrightarrow -3x=9 \Leftrightarrow x=-3,\end{cases} \Leftrightarrow x=-3,\\ \begin{cases} -1\le x\le 2,\\ 2x+2-x+2=9 \Leftrightarrow x=5,\end{cases} \Leftrightarrow x\in\emptyset,\\ \begin{cases} x\ge 2,\\ 2x+2+x-2=9 \Leftrightarrow 3x=9 \Leftrightarrow x=3,\end{cases} \Leftrightarrow x=3,\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=-3,\\ x=3.\end{array}\right.$$

Ответ. ± 3.

3.32. $[1;\ 2]$. **3.33.** $(0;\ 1]$. **3.34.** $\dfrac{5}{3}$. **3.35.** $f_{\min}=-1$.
3.36. $y_{\min}=1$, $y_{\max}=\dfrac{29}{4}$. **3.37.** $[100;\ +\infty)$. **3.38.** 2. **3.39.** $\dfrac{1}{3}$.
3.40. $x,y,z\le 0$. **3.41.** $\dfrac{4}{3}$; 4. **3.42.** $\dfrac{2}{3}$; 2. **3.43.** $\left(-\infty;\ \dfrac{4}{7}\right]$.
3.44. -3; 1.**3.45.** $[1;\ 2]\cup\{5\}$.**3.47.** 0; ± 1.**3.48.** 11; $\dfrac{-11-\sqrt{161}}{2}$.
3.51. $f_{\min}=\dfrac{3}{2}$. **3.52.** $y_{\min}=-13\dfrac{1}{4}$, $y_{\max}=-1$.
3.54. $y_{\max}=4$, $y_{\min}=\dfrac{3}{2}$. **3.55.** -2. **3.56.** $\dfrac{3}{4}$. **3.57.** -16; 18.
3.58. -2; 4. **3.59.** $3+\sqrt{7}$; 3; $2+\sqrt{11}$; $3+\sqrt{2}$. **3.60.** 2 корня.
3.61. -4; 6. **3.62.** 0; ± 2; ± 4. **3.63.** $0;\pm 1;\pm 2;\pm 3$. **3.64.** $\pm\dfrac{3}{5}$.
3.66. -4; 2. **3.67.** -1; 5. **3.68.** 0. **3.69.** $-\dfrac{38}{9}$; $\dfrac{46}{5}$.
3.71. $(3,\ 1)$; $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{11}{3}\right)$. **3.72.** $\left[\begin{array}{l} x=4-y,\\ x=y-2,\end{array}\right.$ при $2\le y\le 3$.
3.73. 2. **3.74.** $\left(\dfrac{1}{3},\ -3\right)$; $\left(3,\ -\dfrac{1}{3}\right)$. **3.75.** $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{11}{2}\right)$; $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{11}{2}\right)$.
3.76. $\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{5}{2}\right)$. **3.77.** $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$; $\left(\dfrac{5}{2},\ 2\right)$.
3.78. $(0,-6)$; $(x,6-x)$ при $x\le 2$. **3.80.** 2.

3.81. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right); \left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

4.1. 2. **4.2.** $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$. **4.4.** $\left(\frac{3}{7}; \frac{11}{7}\right)$. **4.5.** $[2; 4]$. **4.6.** $\left(\frac{3}{7}; 1\right)$.

4.7. $\left[\frac{2}{3}; 4\right]$. **4.8.** 2. **4.9.** $(1; +\infty)$. **4.10.** $(-2; 2)$.

4.12. $(-\infty; -1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}; +\infty)$. **4.13.** $(-6; 6)$.

4.14. $[-2; -1) \cup (-1; +\infty)$. **4.16.** $(0; \sqrt{2})$.

4.17. $\left(-\infty; \frac{4-\sqrt{19}}{3}\right) \bigcup \left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}; +\infty\right)$.

4.18. $\left(-\frac{1+\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

4.19. $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. **4.20.** $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. **4.21.** $0; 1; 3; 4$.

4.22. $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. **4.23.** $(-\infty; -1) \bigcup \left(-1; \frac{1}{2}\right) \bigcup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

4.24. $(-\infty; 1]$. **4.25.** $\left(-\infty; \frac{8}{5}\right) \bigcup (2; +\infty)$. **4.26.** $(2; 3)$.

4.27. $(1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3})$. **4.28.** $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{405}}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1+\sqrt{405}}{2}; +\infty\right)$.

4.29. $(-\infty; 2\sqrt{2}) \cup (2+2\sqrt{3}; +\infty)$. **4.31.** $(-5; 3+\sqrt{8})$.

4.32. $(-\infty; 2) \bigcup \left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}; +\infty\right)$. **4.33.** $(3; +\infty)$. **4.34.** $(-3; -2) \cup (2; 3)$.

4.35. $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \bigcup \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$.

4.36. $(2; +\infty)$. **4.37.** $(-\infty; -5) \cup (-3; 3) \cup (5; +\infty)$.

4.38. $(-3; -2) \cup \{-1\} \cup (0; 1)$.

4.39. *Решение.* Решаем неравенство по методу решения неравенств вида $|f| > |g|$ (см. п. 4.3).

$|3x-4| > |2x-3| \iff (3x-4)^2 > (2x-3)^2 \iff (3x-4)^2 - (2x-3)^2 > 0 \iff (3x-4-(2x-3))(3x-4+(2x-3)) > 0$

$$\iff (x-1)(5x-7) > 0 \iff x \in (-\infty; 1) \bigcup \left(\frac{7}{5}; +\infty\right).$$

Ответ. $(-\infty; 1) \bigcup \left(\frac{7}{5}; +\infty\right)$.

4.40. $\left[\frac{3}{4};1\right)\bigcup(1;+\infty)$. **4.41.** $(-\infty;-4)\cup[-2;0)\cup(0;+\infty)$.

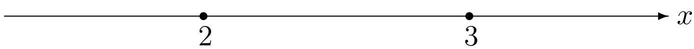
4.42. $\left[1;\frac{3}{2}\right)\bigcup[5;9)$. **4.43.** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **4.44.** $(-1;1)$. **4.45.** $[0;+\infty)$.

4.46. $\left[0;\ \frac{15}{4}\right]\bigcup[4;\ +\infty)$. **4.48.** $(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

4.49. $(-\infty;-2)\cup(-2;1]\cup[5;+\infty)$. **4.50.** $\left[0;\frac{8}{5}\right]\bigcup\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$.

4.51. $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\ -1\right)\bigcup(-1;\ 0)\bigcup\left(0;\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

4.52. *Решение.* Найдем точки, в которых выражения под знаком модуля меняют знак: $x-2=0\Leftrightarrow x=2$; $x-3=0\Leftrightarrow x=3$. Отметим их на числовой прямой. Числовая прямая разобьётся на три промежутка. Раскрывая модули, решаем неравенство на каждом из полученных промежутков. При этом концы промежутков включаем в рассмотрение каждый раз.



$5|x-2|-2|x-3|\le 1 \iff$

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x\le 2,\\ -5x+10+2x-6\le 1\Leftrightarrow -3x\le -3\Leftrightarrow 1\le x,\end{cases} & \Leftrightarrow 1\le x\le 2,\\ \begin{cases}2\le x\le 3,\\ 5x-10+2x-6\le 1\Leftrightarrow 7x\le 17\Leftrightarrow x\le\frac{17}{7},\end{cases} & \Leftrightarrow 2\le x\le\frac{17}{7},\\ \begin{cases}3\le x,\\ 5x-10-2x+6\le 1\Leftrightarrow 3x\le 5\Leftrightarrow x\le\frac{5}{3},\end{cases} & \Leftrightarrow x\in\emptyset,\end{array}\right.$$

$$\iff 1\le x\le\frac{17}{7}.$$

Ответ. $\left[1;\ \frac{17}{7}\right]$.

4.53. $(-\infty;\ -6)\cup[-2\sqrt{5};\ -4)\cup\{-2\}$. **4.55.** $[-1;\ 1]$.

4.56. $(-\infty;\ -1]\cup\{1\}\cup[2;\ +\infty)$. **4.57.** $(-1;\ 4)$.

4.58. $(-\infty;\ -1] \cup [1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$. **4.59.** $(-6;\ 0) \cup (0;\ 3)$.
4.60. $[-7;\ -2) \cup (-2;\ -1]$. **4.61.** $\left(-\infty;\ \dfrac{1}{3}\right] \bigcup (2;\ +\infty)$.
4.62. $(-\infty;-1] \bigcup \left[\dfrac{7}{2};5\right)$. **4.63.** $\left[\dfrac{2}{3};\ \dfrac{8}{3}\right]$. **4.64.** $\left(-\dfrac{1}{3};\ 3\right)$.
4.65. $(-\infty;\ -5] \cup [-1;\ +\infty)$. **4.66.** $[-6;\ -1] \cup [0;\ +\infty)$.
4.67. $(-\infty;\ -6] \cup [-1;\ 0) \bigcup \left(0;\ \dfrac{-7+\sqrt{73}}{2}\right]$.
4.68. $[-3;-2) \bigcup \left(0;\dfrac{3}{2}\right] \bigcup (2;+\infty)$. **4.69.** $(-\infty;-3] \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.
4.71. $(-\infty;\ -5) \cup (1;\ +\infty)$. **4.72.** $(-\infty;\ -199) \cup [-66;\ 200]$.
4.73. $[-1;\ 2) \cup (8;\ 5+3\sqrt{2}]$. **4.74.** $[-5;\ -4) \cup (-2;\ -2+\sqrt{3}]$.
4.75. $[2;\ 3]$. **4.76.** $[3;\ 5]$. **4.77.** $\dfrac{1}{4}(3+\sqrt{8}-\sqrt{11}\,)^2$.

4.78. *Решение.* Заменим для удобства $|1-x|$ на $|x-1|$. Далее раскрываем внешний модуль, применяя схему решения неравенств вида $|f| > g$ п. 4.2

$$\big|x+|x-1|\big| > 3 \iff \left[\begin{array}{l} x+|x-1| > 3, \\ x+|x-1| < -3, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} |x-1| > 3-x, \\ |x-1| < -3-x, \end{array}\right.$$

(для первого неравенства в последней совокупности применяем схему решения неравенств вида $|f| > g$ п. 4.2, для второго неравенства применяем схему решения неравенств вида $|f| < g$ п. 4.1)

$$\iff \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x-1 > 3-x, \\ x-1 < x-3, \end{array}\right. \\ \begin{cases} x-1 < -3-x, \\ x-1 > 3+x, \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 2x > 4, \\ -1 < -3, \\ \begin{cases} 2x < -2, \\ -1 > 3, \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x \in \emptyset, \\ \begin{cases} x < -1, \\ x \in \emptyset, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x \in \emptyset, \end{array}\right. \iff x > 2.$$

4.79. $(-\infty;\ 1+\sqrt{2}) \bigcup (3;\ +\infty)$. **4.80.** $(5;\ +\infty)$.
4.81. $\left(\dfrac{5}{4};\ \dfrac{3}{2}\right) \bigcup \left(\dfrac{5}{2};\ +\infty\right)$. **4.82.** $[1;\ 1+\sqrt{2}]$.
4.83. $(-\infty;\ 0] \cup [1;\ 2] \cup [5;\ +\infty)$. **4.85.** $\{-3\} \cup [-2;\ 4]$.
4.87. $(-\infty;\ 0] \cup \{1\} \bigcup \left(\frac{3}{2};\ 3\right)$. **4.89.** $(-7;\ -2) \cup (3;\ 4)$.
4.90. $[-4;\ -3) \cup (-3;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

Литература

[1] Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Пособие для учащихся 10-11 классов. М.: Изд-во “Наука”, 1987.

[2] Задачник по элементарной математике для программируемого обучения. Алгебра 1–3. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2001.

[3] Моденов В. П. Пособие по математике. Часть I. М.: Изд-во МГУ, 1977.

[4] Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. Алгебра и начала анализа. Уравнения и неравенства. Пособие для учащихся 10-11 классов. М.: Изд-во “Экзамен”, 1998.

[5] Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Учебное пособие. /Под редакцией Сканави М. И., М.: Изд-во “Высшая школа”, 1980.

[6] Ципкин А. Г., Пинский А. И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. М.: Изд-во“Наука”, 1989.

[7] Черкасов О. Ю., Якушев А. Г. Математика. Интенсивный курс подготовки к экзамену. М.: Изд-во Рольф: Айрис пресс, 1999.

[8] Якушева Е. В., Попов А. В., Якушев А. Г. Математика. Все для экзамена. М.: Изд-во “Экономика”, 2000.

Сведения об авторе

Галеев Эльфат Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Специалист в области теории аппроксимации, функционального анализа, теории экстремальных задач и методики преподавания элементарной математики. Автор более 150 научных работ, в том числе ряда монографий по теории экстремальных задач и учебно-методических пособий по подготовке к вступительным экзаменам по математике в МГУ. Неоднократно участвовал в составлении вариантов и приеме вступительных экзаменов на различные факультеты МГУ.

Замечания и предложения по улучшению содержания книги можно направлять по адресу:

119992, Москва, МГУ, механико-математический факультет,
кафедра общих проблем управления,
профессору Галееву Эльфату Михайловичу.
моб. тел. 8-926-266-02-87.

e-mail: galeevem@mail.ru

Учебно-методическое пособие

Галеев Эльфат Михайлович

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ (типы задач и методы их решений).

Часть 1

- **Рациональные неравенства (метод интервалов)**
- **Уравнения высших степеней**
- **Уравнения и неравенства с модулем**

Издание десятое, дополненное

М.: Издательство “Попечительский совет мех-мат. ф-та МГУ”, 2012.—64 с.

Подписано в печать 15.06.2012 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 4 п.л.
Заказ 1. Тираж 300 экз.

Издательство “Попечительский совет механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова”.
119992, г. Москва, Ленинские Горы, д.1.

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета.