$f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая функция.

Выпуклая задача без ограничений: $f(x) \to \min. \quad (P)$

Теорема (аналог теоремы Ферма)

$\hat{x} \in \operatorname{absmin} P \Leftrightarrow 0 \in \partial f(\hat{x})$.

$\lhd$ $\hat{x} \in \operatorname{absmin} P \Leftrightarrow f(x) - f(\hat{x}) \geq 0 = \langle 0, x - \hat{x} \rangle \ \forall\, x \in X$
$\Leftrightarrow 0 \in \partial f(\hat{x})$. $\rhd$

Поскольку из выпуклости f не следует, вообще говоря, выпуклость $-f$, то существенно, что рассматривается задача на минимум, а не на максимум.

$f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая функция, $D \subset X$ — выпуклое множество. Выпуклая задача с ограничением (выпуклая задача): $$f(x) \to \min; \quad x \in D. \quad (P)$$

Теорема

$\hat{x} \in \operatorname{locmin} P \Leftrightarrow \hat{x} \in \operatorname{absmin} P.$

$\lhd$ $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P \Rightarrow \exists\ U = U(\hat{x}) : \quad f(\hat{x}) \le f(x)\ \forall\ x \in U \cap D.\ (*)$

Возьмем $x \in D \overset{x,\hat{x} \in D}{\Rightarrow} \bar{x} = (1-\alpha)\hat{x} + \alpha x \in U \cap D$ при достаточно малом $\alpha > 0 \Rightarrow$

$$f(\hat{x}) \overset{(*)}{\le} f(\bar{x}) \overset{\text{def } \bar{x}}{=} f((1-\alpha)\hat{x} + \alpha x) \overset{\substack{\text{по неравенству}\\ \text{Иенсена}}}{\le} (1-\alpha)f(\hat{x}) + \alpha f(x)$$

$\Rightarrow \alpha f(\hat{x}) \le \alpha f(x) \Leftrightarrow f(\hat{x}) \le f(x)\ \forall\ x \in D \Rightarrow \hat{x} \in \operatorname{absmin} P.$ $\rhd$

$f_i \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, — выпуклые функции,
$A \subset X$ — выпуклое множество.
Задача выпуклого программирования:

$$f_0(x) \to \min; \quad f_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m, \; x \in A. \qquad (P)$$

Допустимая точка, множество допустимых элементов $D(P)$.
Упражнение. Докажите, что (P) является выпуклой задачей, т. е., что $D(P)$ является выпуклым множеством.

Определение

$D(P)$ удовлетворяет условию Слейтера, если $\exists \; \bar{x} \in A : f_i(\bar{x}) < 0$, $i = 1, \ldots, m$.

$$f_0(x) \to \min; \quad f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ x \in A. \qquad (P)$$

Теорема (Каруш–Кун–Таккер)

1. $\hat{x} \in \operatorname{absmin} P \Rightarrow \exists\, \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1},\ \lambda \neq 0$: для функции Лагранжа $\mathscr{L}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$ выполняются условия:

a) принцип минимума функции Лагранжа:

$$\min_{x \in A} \mathscr{L}(x) = \mathscr{L}(\hat{x});$$

b) дополняющей нежесткости: $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m$;

c) неотрицательности: $\lambda_i \geq 0,\ i = 0, 1, \ldots, m$.

2. Для $\hat{x} \in D(P)$ выполнены a) – c) с $\lambda_0 \neq 0 \Rightarrow \hat{x} \in \operatorname{absmin} P$.

3. Для $\hat{x} \in D(P)$ выполнены a) – c), $D(P)$ удовлетворяет условию Слейтера $\Rightarrow \hat{x} \in \operatorname{absmin} P$.

$\lhd$ 1. Пусть $\hat{x} \in \operatorname{absmin} P$. НеОО $f_0(\hat{x}) = 0$.

$B := \{b = (b_0, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \exists\, x \in A : f_i(x) \le b_i,\ i = 0, \ldots, m\}$.

B — непустое выпуклое множество.

Непустота: $b \in \mathbb{R}^{m+1}_+ \Rightarrow b \in B$ (в определении B $x = \hat{x}$).

Выпуклость: $b, b' \in B \overset{\text{def B}}{\Rightarrow} \exists\, x, x' \in A : f_i(x) \le b_i,\ f_i(x') \le b'_i$.

Положим $x_\alpha = \alpha x + (1 - \alpha)x'$ $\forall\, \alpha \in [0, 1] \overset{A\text{—выпукло}}{\Rightarrow} x_\alpha \in A$.

В силу выпуклости f_i по неравенству Йенсена

$$f_i(x_\alpha) = f_i\big(\alpha x + (1-\alpha)x'\big) \le \alpha f_i(x) + (1-\alpha) f_i(x') \le \alpha b_i + (1-\alpha) b'_i.$$

Значит, $\alpha b + (1 - \alpha)b' \in B$ $\forall\, \alpha \in [0, 1]$.

$0 \notin \operatorname{int} B$. Докажем утверждение от противного.

Если $0 \in \operatorname{int} B \Rightarrow$ при достаточно малом $\varepsilon < 0$ $(\varepsilon, 0, \ldots, 0) \in B$

$\Rightarrow \exists\, \tilde{x} \in A : f_0(\tilde{x}) \le \varepsilon < 0 = f_0(\hat{x}),\ f_i(\tilde{x}) \le 0,\ i = 1, \ldots, m$

$\Rightarrow \tilde{x} \in D(P)$ и $f_0(\tilde{x}) < f_0(\hat{x})$, т. е. $\hat{x} \notin \operatorname{absmin} P$ —

противоречие. Значит, $0 \notin \operatorname{int} B$.

$B := \{b = (b_0, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \exists\, x \in A : f_i(x) \le b_i,\ i = 0, \dots, m\}.$

По теореме отделимости в $\mathbb{R}^{m+1}$ множество B и точку 0 можно отделить $\Rightarrow \exists\ \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \ne 0$:

$$\inf_{b \in B} \langle \lambda, b \rangle \ge \langle \lambda, 0 \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i b_i \ge 0 \quad \forall\ b \in B. \qquad (*)$$

Условие неотрицательности. $\mathbb{R}^{m+1}_+ \subset B \Rightarrow (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in B$, $i = 0, 1, \dots, m \overset{(*)}{\Rightarrow} \lambda_i \ge 0.$

Условие дополняющей нежесткости.

$(0, \dots, 0, f_i(\hat{x}), 0, \dots, 0) \in B$, $i = 1, \dots, m$ $\big($в определении B $x = \hat{x} \Rightarrow \hat{x} \in A,\ f_j(\hat{x}) \le 0,\ j \ne i,\ f_i(\hat{x}) \le f_i(\hat{x})\big) \overset{(*)}{\Rightarrow} \lambda_i f_i(\hat{x}) \ge 0.$

Если $\lambda_i f_i(\hat{x}) > 0 \overset{\lambda_i \ge 0}{\Rightarrow} \lambda_i > 0 \Rightarrow f_i(\hat{x}) > 0 \Rightarrow \hat{x} \notin D(P)$ — противоречие. Значит, $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0$.

Принцип минимума. $x \in A \Rightarrow (f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)) \in B$

$$\Rightarrow \mathscr{L}(x) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) \overset{(*)}{\ge} 0 = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(\hat{x}) = \mathscr{L}(\hat{x}),$$

так как $f_0(\hat{x}) = 0$ и $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

2. Пусть для $\hat{x} \in D(P)$ выполнены $a) - c)$ с $\lambda_0 \neq 0$.
Положим $\lambda_0 = 1$. Возьмем $x \in D(P) \Rightarrow$

$$f_0(\hat{x}) \overset{b}{=} f_0(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\hat{x}) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{L}(\hat{x}) \overset{a}{\leq} \mathscr{L}(x) \overset{\text{def}}{=} f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \overset{c}{\leq} f_0(x)$$

(в последней сумме все слагаемые $\lambda_i f_i(x) \leq 0$: $\lambda_i \geq 0$, $f_i(x) \leq 0$).
Итак, $f_0(\hat{x}) \leq f_0(x)\ \forall\ x \in D(P) \Rightarrow \hat{x} \in \text{absmin}\, P$.
3. Пусть для $\hat{x} \in D(P)$ выполнены $a) - c)$ и $D(P)$ удовлетворяет условию Слейтера в точке $\bar{x}$ ($\bar{x} \in A$, $f_i(\bar{x}) < 0$, $i = 1, \ldots, m$). Предположим, что $\lambda_0 = 0 \overset{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} \exists$ хотя бы одно $\lambda_j > 0$, $j \in \{1, \ldots, m\}$. Следовательно,

$$\mathscr{L}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\bar{x}) \overset{c}{\leq} \lambda_j f_j(\bar{x}) < 0 \overset{b}{=} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\hat{x}) = \mathscr{L}(\hat{x})$$

(в первой сумме $\lambda_i f_i(\bar{x}) \leq 0$, так как $\lambda_i \overset{c}{\geq} 0$, а $f_i(\bar{x}) < 0$).
Неравенство $\mathscr{L}(\bar{x}) < \mathscr{L}(\hat{x})$ противоречит выполненному п. a).
Значит, наше предположение, что $\lambda_0 = 0$ неверно $\Rightarrow \lambda_0 \neq 0$ $\overset{2.}{\Rightarrow} \hat{x} \in \text{absmin}\, P$. $\triangleright$

Достаточные условия абсолютного минимума в выпуклой задаче с неравенствами без ограничения типа включения

$f_i\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, — выпуклые функции.

$$f_0(x) \to \min; \quad f_i(x) \le 0, \ i = 1, \ldots, m. \qquad (P')$$

Теорема

$\hat{x} \in D(P')$, для $\mathscr{L} = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i$ с $\lambda_0 > 0$ в точке $\hat{x}$ выполняются:

$a)$ условие стационарности: $0 \in \partial \mathscr{L}(\hat{x})$;

$b)$ дополняющей нежесткости: $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0, \ i = 1, \ldots, m$;

$c)$ неотрицательности: $\lambda_i \ge 0, \ i = 1, \ldots, m \Rightarrow \hat{x} \in \operatorname{absmin} P'$.

$\triangleleft$ f_i — выпуклые, $\lambda_i \ge 0 \Rightarrow \mathscr{L}$ выпуклая функция.

По условию $0 \in \partial \mathscr{L}(\hat{x}) \overset{\text{аналогу теоремы Ферма для выпуклых функций}}{\Leftrightarrow} \hat{x} \in \operatorname{absmin} \mathscr{L} \Leftrightarrow$ $\min \mathscr{L}(x) = \mathscr{L}(\hat{x})$ — условие $a)$ теоремы ККТ. Значит, для (P') выполняются $a) - c)$ с $\lambda_0 \ne 0$ теоремы ККТ $\overset{2.}{\Rightarrow} \hat{x} \in \operatorname{absmin} P'$. $\triangleright$

Замечание

Предыдущая теорема остается верной и для задачи

$$f_0(x)\to\min;\ \ f_i(x)\le 0,\ i=1,\dots,m',\ \ f_i(x)=0,\ i=m'+1,\dots,m,$$

где f_i, $i=0,1,\dots,m'$, — выпуклые функции,
$i=m'+1,\dots,m$, — аффинные функции.

$\lhd$ В этом случае равенства $f(x)=0 \Leftrightarrow 0\le f(x)\le 0$ можно заменить двумя неравенствами $f(x)\le 0$, $-f(x)\le 0$.
Из аффинности f следует выпуклость функций f и $-f$. $\rhd$

4.3.4 Пример. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + 3|x_1 + x_2 - 2| \to \min$.

Решение.

Обозначим $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$, $h(x_1, x_2) = |x_1 + x_2 - 2|$.

g выпукла по теореме о выпуклости функций нескольких переменных, так как по критерию Сильвестра

$$g''(x) = \left(\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2_{i,j=1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0 \qquad \forall\ x.$$

h — модуль аффинной функции — выпукла

$\Rightarrow f$ выпукла как сумма выпуклых функций.

Необходимое и достаточное условие экстремума в выпуклой задаче без ограничений:

$$0 \in \partial f(\hat{x}) \overset{\text{т. Моро-Рокафеллара}}{=} \partial g(\hat{x}) + 3\partial h(\hat{x}). \qquad (1)$$

Найдем субдифференциалы функций g и h.

Для дифференцируемой функции $g(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, $\partial g(x) = g'(x) = (2x_1+x_2, x_1+2x_2)$.

По формуле субдифференциала модуля

$$\partial|h| = \begin{cases} -h'(x), & h(x) < 0, \\ \{\alpha h'(x),\ \alpha \in [-1;\ 1]\}, & h(x) = 0, \\ h'(x), & h(x) > 0, \end{cases}$$

для $h(x) = x_1 + x_2 - 2$ имеем:

$$\partial|h(x)| = \begin{cases} (-1,-1), & x_1 + x_2 - 2 < 0, \\ (\alpha,\alpha),\ |\alpha| \le 1, & x_1 + x_2 - 2 = 0, \\ (1,1), & x_1 + x_2 - 2 > 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \partial f(x) = \partial g(x) + 3\partial h(x) =$$

$$= (2x_1+x_2, x_1+2x_2)+3\begin{cases} (-1,-1), & x_1 + x_2 - 2 < 0, \\ (\alpha,\alpha),\ |\alpha| \le 1, & x_1 + x_2 - 2 = 0, \\ (1,1), & x_1 + x_2 - 2 > 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\partial f(x) = \begin{cases} (2x_1 + x_2 - 3, x_1 + 2x_2 - 3), & x_1 + x_2 - 2 < 0, \\ (2x_1 + x_2 + 3\alpha, x_1 + 2x_2 + 3\alpha),\ |\alpha| \le 1, & x_1 + x_2 - 2 = 0, \\ (2x_1 + x_2 + 3, x_1 + 2x_2 + 3), & x_1 + x_2 - 2 > 0. \end{cases}$$

Следовательно, соотношение $0 \in \partial f(x)$ запишется в виде

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3 = 0, \end{cases} \quad \text{при} \quad x_1 + x_2 - 2 < 0, \qquad (i)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3\alpha = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3\alpha = 0, \end{cases} \quad \text{при} \quad x_1 + x_2 - 2 = 0, \quad (|\alpha| \le 1) \qquad (ii)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3 = 0, \end{cases} \quad \text{при} \quad x_1 + x_2 - 2 > 0. \qquad (iii)$$

$(i) \Rightarrow x_1 + x_2 = 2$ — противоречие с условием $x_1 + x_2 - 2 < 0$.
$(iii) \Rightarrow x_1 + x_2 = -2$ — противоречие с условием $x_1 + x_2 - 2 > 0$.
$(ii) \Rightarrow$ система из трех уравнений с тремя неизвестными имеет единственное решение $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 1$, $\alpha = -1$.

Ответ. $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1, 1) \in \text{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = 3$.