# 2 Задача Больца

## 2.1 Постановка задачи

*Задачей Больца* называется следующая экстремальная задача без ограничений в пространстве $C^1([t_0,\, t_1])$:

$$B(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to \text{extr.} \qquad (P)$$

Здесь $L = L(t, x, \dot{x})$ — функция трех, а $l = l(x(t_0), x(t_1))$ — функция двух переменных. Задача Больца — элементарная задача вариационного исчисления. Функционал $B$ называется *функционалом Больца*, функция $l$ — *терминантом* . Любые функции класса $C^1([t_0,\, t_1])$ являются *допустимыми* в задаче.

**Определение.** Говорим, что допустимая функция $\hat{x}$ доставляет *слабый локальный минимум* в задаче (P), и пишем $\hat{x} \in \operatorname{wlocmin} P$, если существует $\delta > 0$ такое, что $B(x(\cdot)) \geq B(\hat{x}(\cdot))$ для любой допустимой функции $x$, для которой $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1([t_0,\, t_1])} < \delta$.

## 2.2 Необходимое условие экстремума

**Теорема.** *Пусть функция $\hat{x}$ доставляет слабый локальный экстремум в задаче $(P)$ ($\hat{x} \in wlocextr\, P$), функции $L, L_x, L_{\dot{x}}$ — непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}$ ($L, L_x, L_{\dot{x}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}))$), функция $l$ — непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$ ($l \in C^1(\mathcal{O}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)))$. Тогда $\hat{L}_{\dot{x}}$ — непрерывно дифференцируемая функция ($\hat{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0,\, t_1])$) и выполнены*

*a) уравнение Эйлера*

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\ t \in [t_0,\, t_1];$$

*b) условия трансверсальности*

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_{x(t_0)},\ \ \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}.$$

**Доказательство.** Возьмем произвольную, но фиксированную функцию $h \in C^1([t_0,\, t_1])$. Поскольку $\hat{x} \in \mathrm{l}ocextrP$, то функция одного переменного

$$\varphi(\lambda) := B(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot)) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, \hat{x}(t) + \lambda h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t))\, dt + l(\hat{x}(t_0) + \lambda h(t_0), \hat{x}(t_1) + \lambda h(t_1))$$

имеет экстремум при $\lambda = 0$. Но тогда по теореме Ферма $\varphi'(0) = 0$. Дифференцируя функцию $\varphi$ и полагая $\lambda = 0$, получаем

$$\varphi'(0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(\hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \hat{L}_x(t)h(t)\Big)\, dt + \hat{l}_{x(t_0)}h(t_0) + \hat{l}_{x(t_1)}h(t_1) = 0$$

$$\forall\ h \in C^1([t_0,\, t_1]). \qquad (1)$$

Равенство (1) выполняется для любой функции $h \in C^1([t_0,\, t_1])$, а значит и для функций $h \in C_0^1([t_0,\, t_1])$. Следовательно, из (1) вытекает, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(\hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \hat{L}_x(t)h(t)\Big)\, dt = 0 \quad \forall\ h \in C_0^1([t_0,\, t_1]).$$

Отсюда по лемме Дюбуа-Реймона функция $\hat{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0,\, t_1])$ и выполняется дифференциальное уравнение

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\ t \in [t_0,\, t_1]$$

— уравнение Эйлера.

Для завершения доказательства теоремы осталось вывести условия трансверсальности. Проинтегрируем по частям первый интеграл в соотношении (1) (оно стало возможным в силу доказанного включения $\hat{L}_{\dot{x}}(t) \in C^1([t_0, t_1])$):

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t)\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \hat{L}_{\dot{x}}(t) dh(t) = \hat{L}_{\dot{x}}(t)h(t)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1} h(t)\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t)\, dt.$$

Подставляя полученное выражение в соотношение (1) и учитывая уже доказанное уравнение Эйлера, получим

$$\varphi'(0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t)\Big) h(t)\, dt +$$

$$+(\hat{L}_{\dot{x}}(t_1) + \hat{l}_{x(t_1)})h(t_1) + (-\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) + \hat{l}_{x(t_0)})h(t_0) =$$

$$= (\hat{L}_{\dot{x}}(t_1) + \hat{l}_{x(t_1)})h(t_1) + (-\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) + \hat{l}_{x(t_0)})h(t_0) = 0$$

$$\forall\ h \in C^1([t_0,\, t_1]). \quad (2)$$

Подставляя в (2) последовательно $h(t) = t - t_1$ и $h(t) = t - t_0$, придем к условиям трансверсальности $\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_{x(t_0)}$ и $\hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}$. Тем самым теорема полностью доказана.

## 2.3 Многомерный случай

Мы сформулировали теорему для одномерной задачи Больца вариационного исчисления. Совершенно аналогично ставится векторная задача Больца и формулируются необходимые условия экстремума.

Пусть $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — $n$-мерная вектор-функция, интегрант $L = L(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ — функция $2n+1$ переменного, терминант $l = l(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0), x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1))$ — функция $2n$ переменных. Рассмотрим задачу в пространстве $C^1([t_0,\, t_1], \mathbb{R}) \times \cdots \times C^1([t_0,\, t_1], \mathbb{R})$:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)\, dt + l(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0), x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)) \to \mathrm{extr}.$$

Укажем на необходимые изменения при формулировке необходимых условий экстремума для векторного случая.

Необходимые условия экстремума в векторной задаче Больца состоят из системы $n$ уравнений Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}_j}(t) + \hat{L}_{x_j}(t) = 0,\ j = 1, \ldots, n,$$

и системы $2n$ условий трансверсальности

$$\hat{L}_{\dot{x}_j}(t_0) = \hat{l}_{x_j(t_0)},\ \hat{L}_{\dot{x}_j}(t_1) = -\hat{l}_{x_j(t_1)},\ j = 1, \ldots, n.$$

Доказательство теоремы в векторном случае тривиально редуцируется к одномерному случаю. Действительно, фиксируем у векторфункции $x(\cdot) = ((x_1(\cdot), \ldots, x_n(\cdot))$ все компоненты кроме $x_i(\cdot)$. Тогда функционал Больца будет зависеть только от одной функции $x_i(\cdot)$: $B(x_i(\cdot)) = B((\hat{x}_1(\cdot), \ldots, \hat{x}_{i-1}(\cdot), x_i(\cdot), \hat{x}_{i+1}(\cdot), \ldots, \hat{x}_n(\cdot))$. А для одномерного случая необходимые условия экстремума — уравнение Эйлера и условия трансверсальности по $x_i(\cdot)$ — уже доказаны.

Каждое уравнение Эйлера — дифференциальное уравнение второго порядка — содержит при интегрировании две константы. Всего — $2n$ констант интегрирования. Для их нахождения у нас есть $2n$ уравнений — условий трансверсальности. В таком случае, когда количество неизвестных совпадает с количеством уравнений для их нахождения, мы говорим о *полноте набора условий* для нахождения экстремали.

Как правило, во всех наших задачах мы имеем полный набор условий для определения неизвестных.

## 2.4 Пример

$$B(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 - x)\,dt + x^2(1) \to \text{extr}.$$

Решение. Необходимые условия экстремума:

a) уравнение Эйлера для интегранта $L = \dot{x}^2 - x$

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \iff -\frac{d}{dt}2\dot{x} - 1 = 0 \iff -2\ddot{x} - 1 = 0 \iff \ddot{x} = -\frac{1}{2};$$

b) условия трансверсальности для терминанта $l = x^2(1)$

$$\begin{cases} L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)}, \\ L_{\dot{x}}(1) = -l_{x(1)}, \end{cases} \iff \begin{cases} 2\dot{x}(0) = 0, \\ 2\dot{x}(1) = -2x(1), \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x}(0) = 0, \\ \dot{x}(1) = -x(1). \end{cases}$$

Решение уравнения Эйлера: $\dot{x} = -\frac{t}{2} + C_1$, $x = -\frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2$. Из условий трансверсальности находим константы $C_1$ и $C_2$:

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = 0, \\ \dot{x}(1) = -x(1), \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 0, \\ -\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - C_2 \Leftrightarrow C_2 = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Значит, имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x}(t) = \dfrac{3-t^2}{4}$.

Проверим, доставляет ли найденная допустимая экстремаль минимум или максимум в задаче. Сравним значение функционала $B(\hat{x})$ со значением функционала $B(x)$ на произвольной допустимой функции $x$. Представим функцию $x$ в виде суммы $x = \hat{x} + h$, где функция $h$ такова, что их сумма $\hat{x} + h$ допустима. Для этого надо взять $h \in C^1([0,\, 1])$. Функционал $J$ с квадратично-линейным интегрантом $L = \dot{x}^2 - x$ и квадратичной терминальной частью $l = x^2(1)$ является квадратично-линейным. Тогда в силу равенства

$$B(\hat{x}+h) - B(\hat{x}) = \frac{1}{2} B''(\hat{x})[h,h] \quad \forall\ h \in C^1([0,\, 1])$$

для квадратично-линейного функционала на экстремали $\hat{x}$ имеем

$$B(\hat{x}+h) - B(\hat{x}) = \int\limits_0^1 \dot{h}^2\, dt + h^2(1) \geq 0.$$

Таким образом, разность всегда неотрицательна, то есть $\hat{x} \in \operatorname{absmin}$,

$$S_{\text{absmin}} = B(\hat{x}) = \int\limits_0^1 \Big(\frac{t^2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{t^2}{4}\Big) dt + \frac{1}{4} = \Big(\frac{t^3}{6} - \frac{3t}{4}\Big)\Big|_0^1 + \frac{1}{4} = \frac{2-9+3}{12} = -\frac{1}{3}.$$

Покажем, что $S_{\text{absmax}} = +\infty$. Действительно, возьмем последовательность допустимых функций $x_n(t) = \hat{x}(t) + nt(t-1) = nt(t-1)$. Тогда

$$J(x_n(\cdot)) = \int\limits_0^1 \dot{x}_n^2\, dt = \int\limits_0^1 n^2(2t-1)\, dt \to +\infty \text{ при } n \to \infty.$$

Ответ. Допустимая экстремаль $\dfrac{3-t^2}{4} \in \operatorname{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = -\dfrac{1}{3}$; $S_{\text{absmax}} = +\infty$.