5 Транспортная задача

Важный частный случай задач линейного программирования — транспортные задачи. Это математические модели разнообразных прикладных задач по оптимизации перевозок. Распространенность в приложениях задач транспортного типа оправдывает неослабевающее внимание к ним. Транспортные задачи решаются методом потенциалов, который является усовершенствованием симплекс-метода, примененного к данному более узкому типу задач. В этом параграфе мы приведем постановку транспортной задачи, методы отыскания исходной крайней точки, решение задачи методом потенциалов, двойственную к транспортной задаче, обоснование метода потенциалов, задачу о назначении, примеры.

5.1 Постановка задачи

Транспортной задачей по критерию стоимости называется следующая задача о минимизации стоимости перевозок.

Пусть в пунктах отправления $A_1, ..., A_m$ сосредоточено соответственно $a_1, ..., a_m$ единиц некоторого однородного груза. Этот груз следует перевезти в n пунктов назначения $B_1, ..., B_n$, причем в каждый из них надлежит завезти соответственно $b_1, ..., b_n$ единиц груза. Стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j равна c_{ij}.

Обозначая через x_{ij} количество единиц груза, предназначенного к отправке из пункта A_i в пункт B_j, получим задачу нахождения плана перевозок, при котором общая стоимость окажется минимальной:

$$\langle c, x\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min;\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n, \tag{P}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, \ldots, m, \quad (a) \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, \ldots, n. \quad (b)$$

В матричном виде ограничения задачи (a)–(b) имеют вид:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1\\
1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_{11}\\ x_{12}\\ \vdots\\ x_{1n}\\ x_{21}\\ x_{22}\\ \vdots\\ x_{2n}\\ \vdots\\ x_{m1}\\ x_{m2}\\ \vdots\\ x_{mn}\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_m\\ b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}.$$

План перевозок и стоимость перевозок представляются в виде векторов $x = (x_{ij},\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n)$, $c = (c_{ij},\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n)$ соответственно, или матриц $X = \{x_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n}}$, $C = \{c_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m.\\ j=1,\dots,n}}$

Уравнения (a) означают, что из пункта отправления A_i весь груз вывезен в пункты назначения (потребления). Уравнения (b) означают, что количество груза, завезенного в пункт B_j со всех пунктов отправления, соответствует требуемому.

Естественно считать, что общий запас груза на всех пунктах отправления равен суммарной потребности всех пунктов назначения, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M.$$

В этом случае говорят, что имеется *замкнутая модель* транспортной задачи.

Рассмотрим *незамкнутые модели* транспортной задачи. И покажем, как они могут быть сведены к замкнутой модели.

Если суммарные запасы отправителей больше суммарной потребности пунктов назначения, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i > \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, то равенства (a) заменяются неравенствами

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ i = 1, \ldots, m,$$

а условие (b) остается без изменений. В этом случае вводится фиктивный пункт назначения B_{n+1} с требуемой величиной завоза $b_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ и нулевыми стоимостями перевозок в этот пункт. Добавляя новые неотрицательные переменные $x_{i\,n+1}$, $i = 1, \ldots, m$, приходим к замкнутой модели транспортной задачи с ограничениями в виде равенств (a)–(b).

Если суммарные запасы отправителей меньше суммарных запросов пунктов назначения, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i < \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, то равенства (b) заменяются неравенствами

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j,\ j = 1, \ldots, n,$$

а условие (a) остается без изменений. В этом случае вводится фиктивный пункт отправления A_{m+1} с требуемой величиной вывоза $a_{m+1} = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j - \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$ и нулевыми стоимостями перевозок из этого пункта. Добавляя новые неотрицательные переменные $x_{m+1\,j}$, $j = 1, \ldots, n$, приходим к замкнутой модели транспортной задачи с ограничениями в виде равенств (a)–(b).

5.2 Особенности задачи

Транспортная задача является задачей линейного программирования и может быть решена симплекс-методом, который значительно упрощается в виду простого строения системы ограничений (a)–(b).

Этот упрощенный метод мы и опишем ниже. Предварительно докажем некоторые утверждения, имеющие место для транспортных задач.

Лемма 1. *Для любой транспортной задачи существует допустимый план перевозок ($D_P \neq \emptyset$).*

Доказательство. Положим $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{M}$, тогда уравнения (a) будут выполняться:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{M} = \frac{a_i}{M} \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{M} M = a_i, \; i = 1, \ldots, m.$$

Аналогично показывается выполнение уравнений (b). Значит x_{ij} — допустимый план перевозок. $\triangleright$

Отметим, что поскольку значение задачи ограничено снизу нулем и допустимый план перевозок имеется по лемме 1, то в задаче (P) по теореме существования решения п. 3.1 ($|S_P| < +\infty \Rightarrow \operatorname{Arg} P \neq \emptyset$) оптимальный план существует. $\square$

Лемма 2. *Ранг системы ограничений (a)–(b) равен $m + n - 1$.*

Доказательство. Если сложить первые m строк матрицы ограничений A и вычесть из них последние n строк, то получим нулевую строку. Следовательно, ранг матрицы $\operatorname{rg} A \leq m + n - 1$.

С другой стороны, располагая $m - 1$ строку матрицы A (начиная со второй), под n последними строками, получим треугольную матрицу из $m + n - 1$ строк, ранг которой равен количеству уравнений $(m + n - 1)$. Значит, $\operatorname{rg} A \geq m + n - 1$

Таким образом, ранг матрицы A равен $m + n - 1$. $\square$

По предложению 1 п. 3.2 (столбцы матрицы ограничений, соответствующие положительным координатам крайней точки, линейно независимы) и лемме 2 (количество линейно-независимых столбцов не превышает $m+n-1$) крайняя точка в задаче может иметь не более $m + n - 1$ положительных координат.

Лемма 3. *Любые $m + n - 1$ строк матрицы A линейно независимы.*

Доказательство. Любая строка матрицы A (для определенности возьмем строку из системы уравнений (a)) равна сумме всех строк системы уравнений (b) минус сумма всех строк уравнений (a) без этой строки, то есть является линейной комбинацией оставшихся $m+n-1$ строк. А так как ранг матрицы A равен $m+n-1$, то оставшиеся строки линейно независимы. $\square$

Упражнение.

Приведите пример, показывающий, что не любые $m+n-1$ столбцов матрицы A являются линейно независимыми.
Решение. Пусть $m = n = 3$. Тогда матрица A размера 6×9 будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Возьмем последние $m+n-1 = 3+3-1 = 5$ столбцов матрицы A:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Посчитаем ранг полученной матрицы B. Если из 2-ого столбца матрицы B вычесть последний столбец, то новый 2-й, 3-й, 4-й и 5-й столбцы (4 столбца) линейно независимы, как столбцы треугольной матрицы. Значит, $\operatorname{rg} B \geq 4$.

С другой стороны, если взять сумму двух первых (ненулевых) строк и вычесть из нее сумму последних трех строк, то получим вторую нулевую строку. Значит, $\operatorname{rg} B \leq 4$. Таким образом, $\operatorname{rg} B = 4$.

5.3 Методы нахождения первоначальной крайней точки

Рассмотрим замкнутую модель транспортной задачи. Как мы уже знаем, незамкнутая модель может быть легко сведена к замкнутой введением фиктивного поставщика или фиктивного потребителя.

1. *Метод "Северо-западного угла".* Назначим максимально возможную перевозку из пункта отправления A_1 в пункт назначения B_1. То есть заполняем верхний левый элемент матрицы X первоначальной крайней точки. При этом либо пункт отправления A_1, либо пункт назначения B_1, либо оба эти пункта окажутся полностью обслуженными.

Если пункт отправления A_1 оказался полностью обслуженным, то в дальнейшем при нахождении первоначального плана перевозок выводим из рассмотрения первую строку матрицы X и рассматриваем только оставшуюся часть матрицы. Если пункт назначения B_1 оказался полностью обслуженным, то аналогично выводим первый столбец из дальнейшего рассмотрения. Если же и пункт отправления, и пункт назначения оказались полностью обслуженными (так может случиться только в вырожденной задаче), то вывести из рассмотрения следует или первый столбец, или первую строку матрицы X. Условимся для определенности выводить из рассмотрения первый столбец матрицы. В этом случае в число базисных элементов на следующем этапе введем элемент с нулевым значением перевозки, стоящий в северо-западном углу оставшейся части матрицы X, т. е. в базис войдет второй элемент в строке, считая вычеркиваемый элемент первым.

Эту процедуру продолжаем до тех пор, пока все пункты отправления и пункты назначения не будут обслужены. Последней перевозкой будет перевозка из пункта отправления A_m в пункт назначения B_n.

На каждом шаге обслуживается один из пунктов отправления или назначения (их в сумме $m + n$), а на последнем шаге обслуживаются и последний пункт отправления и последний пункт назначения. Поэтому число базисных элементов будет ровно $m + n - 1$. Найденный план будет допустимым планом перевозок, содержащим не более $m+n-1$ положительных координат и являющийся (как будет показано ниже) крайней точкой множества допустимых элементов.

Отметим, что данный метод нахождения первоначальной крайней точки не учитывает стоимости перевозок. Поэтому начальный план может оказаться далеко не оптимальным. Приведем другие методы нахождения начальной крайней точки, учитывающие стоимости перевозок.

2. *Минимум по матрице.* Выберем в платежной матрице C минимальный элемент. Пусть $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{i_0 j_0}$. Назначим максимально возможную перевозку из пункта отправления A_{i_0} в пункт назначения B_{j_0}. Если минимальная стоимость перевозки достигается на нескольких элементах, то выбираем любой из них. Тем самым пункт отправления A_{i_0} или пункт назначения B_{j_0} (или оба пункта одновременно) будет обслужен. А в платежной матрице соответствующая строка или столбец выводятся из дальнейшего рассмотрения. Если они одновременно обслужились, то для определенности будем выводить из рассмотрения столбец матрицы X. При этом в дальнейшем возникнет базисный элемент с нулевым значением перевозки. В оставшейся части матрицы вновь ищется минимальный элемент и процедура повторяется до тех пор, пока первоначальный план перевозок не будет получен.

Найденный план будет допустимым планом перевозок, содержащим не более $m + n - 1$ положительных координат с числом базисных элементов $m+n-1$ и являющийся крайней точкой множества допустимых элементов.

3. *Минимум по строке.* Выберем в первой строке платежной матрицы C минимальный по величине элемент. Предположим $\min\limits_{j} c_{1j} = c_{1j_0}$. Назначим максимально возможную перевозку из пункта отправления A_1 в пункт назначения B_{j_0}. Если мини-

мум достигается на нескольких элементах, то выбираем любой из них. Тем самым пункт отправления A_1 или пункт назначения B_{j_0} (или оба пункта одновременно) будут обслужены. А в платежной матрице первая строка или столбец j_0 выводятся из дальнейшего рассмотрения. Если же и пункт отправления, и пункт назначения оказались полностью обслуженными (так может случиться только в вырожденной задаче), то для определенности будем выводить из рассмотрения столбец матрицы X. При этом в дальнейшем возникнет базисный элемент с нулевым значением перевозки.

В первой строке оставшейся части платежной матрицы вновь ищется минимальный элемент и процедура повторяется до тех пор пока первоначальный план перевозок не будет получен (первой строкой может оказаться вновь первая строка исходной матрицы без какого-то элемента или вторая строка исходной матрицы без какого-то элемента).

В итоге получаем крайнюю точку множества допустимых элементов задачи.

4. *Минимум по столбцу.* Выберем в первом столбце платежной матрицы C минимальный по величине элемент. Предположим $\min\limits_i c_{i1} = c_{i_0 1}$. Назначим максимально возможную перевозку из пункта отправления A_{i_0} в пункт назначения B_1. Если минимум достигается на нескольких элементах, то выбираем любой из них. Тем самым пункт отправления A_{i_0} или пункт назначения B_1 будет обслужен. А в платежной матрице соответствующая строка или первый столбец выводятся из дальнейшего рассмотрения. Если же и пункт отправления, и пункт назначения оказались полностью обслуженными (так может случиться только в вырожденной задаче), то для определенности будем выводить из рассмотрения столбец матрицы X. При этом в дальнейшем возникнет базисный элемент с нулевым значением перевозки.

В первом столбце оставшейся части платежной матрицы вновь ищется минимальный элемент и процедура повторяется до тех пор пока первоначальный план перевозок не будет получен (первым столбцом может оказаться вновь первый столбец исходной матрицы без какого-то элемента или второй столбец исходной матрицы без какого-то элемента).

В итоге получаем первоначальную крайнюю точку множества допустимых элементов задачи.

Лемма 4. *Описанные выше методы нахождения первоначального плана перевозок, приводят к первоначальной крайней точке множества допустимых элементов.*

Доказательство. По предложению 1 достаточно доказать, что соответствующие базисным элементам столбцы матрицы A линейно независимы.

Отметим, что описанные методы нахождения первоначального плана перевозок содержат общий элемент действия: на каждом этапе мы выводим из рассмотрения либо столбец, либо строку матрицы X.

Доказательство можно провести индукцией по числу $m+n=k$. Пусть $m+n=2$ — минимально возможное число. Матрица A состоит из единственного элемента и утверждение очевидно. Предположим, что для $m+n=k$ получаемые этим методом столбцы линейно независимы. Докажем соответствующее утверждение для $m+n=k+1$. Не ограничивая общности, считаем, что на первом этапе выводится из рассмотрения первая строка или первый столбец (в противном случае мы можем строки или столбцы переобозначить и поменять местами).

Если мы выводим из рассмотрения первую строку матрицы, то это означает, что первый пункт отправления A_1 обслужен полностью, x_{11} — базисный элемент, а все элементы $x_{1j}=0$, $j=2,\ldots,n$. Первое ограничение уравнений (а) выполнено, в матрице ограничений A можно убрать первую строку и первые n столбцов. Получилась меньшая матрица размера $(m-1+n)\times(m-1)n$, а для нее по предположению индукции соответствующие столбцы являются линейно независимыми. Добавление столбца с единицей на первом месте (и еще на одном из последних n мест) к $m+n-2$ столбцам, расширенным и начинающимся с нуля образует систему $m+n-1$ линейно независимых столбцов.

Если мы выводим из рассмотрения первый столбец матрицы, то это означает, что первый пункт назначения обслужен полностью, x_{11} — базисный элемент, а все элементы $x_{i1} = 0$, $i = 2, \ldots, m$. Первое ограничение уравнений (b) выполнено, в матрице ограничений A можно убрать $m+1$-ю строку и соответствующие m столбцов. Получилась подобная меньшая матрица размера $(m + n - 1) \times (n - 1)m$, а для нее по предположению индукции соответствующие столбцы являются линейно независимыми. Добавление столбца с единицей на $m + 1$-ом месте (и еще на одном из первых m мест) к $m + n - 2$ линейно независимым столбцам, расширенным и имеющим на $m + 1$-ом месте нули образует систему из $m+n-1$ линейно независимых столбцов. Индукция закончена. $\square$

Примеры нахождения начальной крайней точки

Пример 1. *Метод "Северо-западного угла".* Зададим транспортную задачу в виде платежной матрицы.

	$b_1 = 40$	$b_2 = 15$	$b_3 = 42$	$b_4 = 13$
$a_1 = 10$	2	1	5	11
$a_2 = 80$	4	3	4	2
$a_3 = 20$	6	2	7	8

Построим по методу "Северо-западного угла" первоначальный план перевозок. Назначим максимально возможную перевозку равную 10 из пункта отправления A_1 в пункт назначения B_1. То есть заполняем верхний левый элемент матрицы X первоначального плана перевозок. При этом из пункта отправления A_1 весь груз окажется вывезенным. В пункт назначения B_1 остается привести 30 единиц груза. В дальнейшем при нахождении первоначального плана перевозок выводим из рассмотрения первую строку матрицы 3×4 и рассматриваем только оставшуюся матрицу 2×4.

Назначим максимально возможную перевозку равную 30 из пункта отправления A_2 в пункт назначения B_1. То есть заполняем верхний левый элемент оставшейся матрицы X. При этом пункт назначения B_1 окажется полностью обслуженным. В пункте отправления A_2 останется 50 единиц груза. Выводим из рассмотрения первый столбец матрицы 2×4 и рассматриваем только оставшуюся матрицу 2×3.

Назначим максимально возможную перевозку равную 15 из пункта отправления A_2 в пункт назначения B_2. То есть заполняем верхний левый элемент оставшейся матрицы 2×3. При этом пункт назначения B_2 окажется полностью обслуженным. В пункте отправления A_2 останется 35 единиц груза. Выводим из рассмотрения первый столбец матрицы 2×3 и рассматриваем только оставшуюся матрицу 2×2.

Назначим максимально возможную перевозку равную 35 из пункта отправления A_2 в пункт назначения B_3. То есть заполняем верхний левый элемент матрицы 2×2. При из пункта отправления A_2 весь груз оказался вывезенным. В пункт назначения B_3 остается привезти 7 единиц груза, которые привозятся из пункта отправления A_3. После этого в пункте отправления A_3 остается 13 единиц груза, который перевозится в пункт назначения B_4.

	$b_1 = 40$	$b_2 = 15$	$b_3 = 42$	$b_4 = 13$
$a_1 = 10$	**10**			
$a_2 = 80$	**30**	**15**	**35**	
$a_3 = 20$			**7**	**13**

Для краткости в матрице плана перевозок не пишем нулевые значения небазисных перевозок. Число ненулевых элементов в первоначальном плане перевозок $m + n - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$. Значение функционала $\langle c, x^1 \rangle = 2 \cdot 10 + 4 \cdot 30 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 35 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 13 = 478$.

Пример 2. *Метод "Минимума по матрице".* Рассмотрим транспортную задачу из примера 1.

	$b_1 = 40$	$b_2 = 15$	$b_3 = 42$	$b_4 = 13$
$a_1 = 10$	2	1	5	11
$a_2 = 80$	4	3	4	2
$a_3 = 20$	6	2	7	8

Выберем в платежной матрице C минимальный элемент. Им является стоимость $c_{12} = 1$. Назначим максимально возможную перевозку равную 10 из пункта отправления A_1 в пункт назначения B_2. При этом из пункта отправления A_1 весь груз окажется вывезенным. В платежной матрице первая строка выводится из дальнейшего рассмотрения.

В оставшейся части платежной матрицы 2×4 вновь ищется минимальный элемент. Минимальная стоимость перевозки достигается на двух элементах $c_{32} = c_{24} = 2$. Выбираем любой из них. Для определенности c_{32}. Назначим максимально возможную перевозку равную 5 из пункта отправления A_3 в пункт назначения B_2. При этом пункт назначения B_2 окажется полностью обслуженным. В платежной матрице 2×4 второй столбец выводится из дальнейшего рассмотрения.

	40	15	42	13
10		**10**		
80	**40**		**27**	**13**
20		**5**	**15**	

В оставшейся части платежной матрицы 2×3 вновь ищется минимальный элемент. Им является стоимость $c_{24} = 2$. Назначим максимально возможную перевозку равную 13 из пункта отправления A_2 в пункт назначения B_4. При этом пункт назначения B_4 окажется полностью обслуженным. В платежной матрице последний столбец выводится из дальнейшего рассмотрения.

В оставшейся части платежной матрицы 2×2 вновь ищется минимальный элемент. Минимальная стоимость перевозки достигается на двух элементах $c_{21} = c_{23} = 4$. Выбираем любой из них. Для определенности c_{21}. Назначим максимально возможную перевозку равную 40 из пункта отправления A_2 в пункт назначения B_1. При этом пункт назначения B_1 окажется полностью обслуженным. В платежной матрице первый столбец выводится из дальнейшего рассмотрения.

Остается привезти 42 единицы груза в пункт назначения B_3. Оставшиеся 27 единиц груза в пункте отправления A_2 и 15 единиц груза в пункте отправления A_3 остается привезти в пункт назначения B_3.

Значение функционала $\langle c, x^2 \rangle = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 13 + 4 \cdot 40 + 4 \cdot 27 + 7 \cdot 15 = 419$. Метод "Минимума по матрице", учитывающий стоимости перевозок, в данном примере оказался более эффективным по сравнению с методом "Северо-западного угла".

5.4 Метод потенциалов

Сформулируем правило решения транспортной задачи методом потенциалов (обоснование этого метода будет дано в п. 5.7). Для решения транспортной задачи следует:

1. *Привести задачу к замкнутой модели* (см. п. 5.1).

2. *Найти первоначальный план перевозок x, являющийся крайней точкой множества допустимых элементов.* Он содержит $m+n-1$ положительных компонент, назовем их *базисными.* При нахождении мы можем использовать любой из описанных выше методов нахождения первоначального плана перевозок.

3. *Исследование плана перевозок x.* Для найденного плана x построить матрицу $\overline{C} := \{\bar{c}_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n}}$ $\bar{c}_{ij} := u_i + v_j$, определяя $m+n$ потенциалов u_i, v_j из системы $m+n-1$ уравнений:

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{для базисных индексов } i, j.$$

Эти уравнения линейно независимы (поскольку по лемме 3 любые $m+n-1$ строк матрицы A линейно независимы и, следовательно, любые $m+n-1$ столбцов матрицы A^*, являющейся матрицей системы $(*)$ также линейно независимы).
Для однозначного определения u_i, v_j положим заранее один из потенциалов заданной величине, например, $u_1 = 0$.

Замечание. *Элементы $\bar{c}_{ij}$ матрицы $\overline{C}$ и величина $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j v_j$ не зависят от первоначального выбора u_1.*

Доказательство. Действительно. Предположим, что вместо первоначального потенциала u_1 мы бы взяли потенциал $\tilde{u}_1 = u_1 + t$. Тогда $\tilde{v}_1 = v_1 - t$ и все $\tilde{u}_i = u_i + t$, $\tilde{v}_j = v_j - t$ при базисных i, j, поскольку $u_i + v_j = c_{ij}$ при базисных i, j. Следовательно, сумма $\tilde{u}_i + \tilde{v}_j = u_i + t + v_j - t = u_i + v_j = \bar{c}_{ij}$ не зависит от выбора первоначального потенциала u_1.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \tilde{u}_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \tilde{v}_j = \sum_{i=1}^{m} a_i (u_i + t) + \sum_{j=1}^{n} b_j (v_j - t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + t \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - t \sum_{j=1}^{n} b_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + tM + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - tM = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j. \qquad \square$$

4. *Провести исследование матрицы* $\Delta := C - \overline{C}$.

Если $\Delta \geq 0$, то исследуемый план x является решением задачи (P), а потенциалы u_i, v_j являются решением двойственной задачи (P^{**}).

Если среди элементов матрицы Δ есть отрицательные, то выберем элемент с наименьшим значением. Пусть, например, $\Delta_{i_0 j_0} = \min\limits_{i,j} \Delta_{ij} < 0$.

5. *Построить новый план перевозок, являющийся крайней точкой множества допустимых элементов.*

Положим $x'_{i_0 j_0} = t$, $x'_{ij} = x_{ij} \pm t$ для базисных индексов i, j, где t — некоторая положительная величина (не изменяя остальные небазисные компоненты x_{ij} равные нулю) так, чтобы x'_{ij} по-прежнему были неотрицательны, но одна из базисных компонент обратилась бы в ноль. Вектор матрицы A, соответствующий этой компоненте, выводим из числа базисных, а вектор матрицы A, соответствующий переменной $x_{i_0 j_0}$, вводим в число базисных векторов. Далее вновь начинаем исследование полученной крайней точки x', т. е. возвращаемся к п. 3.

В невырожденной задаче в ноль может обратиться только одна из компонент вектора x. В вырожденной задаче в ноль может обратиться несколько компонент. В этом случае из числа базисных векторов исключается любой вектор с нулевым значением, как правило исключается вектор с наибольшей стоимостью перевозок.

5.5 Примеры транспортных задач

Пример 1. $2x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + 8x_{14}+$
$+4x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 6x_{24} + 6x_{31} + 3x_{32} + 4x_{33} + 9x_{34} \to \min;$

$$\begin{array}{rcl} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & = & 14, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & = & 18, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & = & 16, \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} x_{11} + x_{21} + x_{31} & \leq & 22, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} & \leq & 2, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} & \leq & 17, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} & \leq & 11, \end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = 1, 2, 3, \ j = 1, 2, 3, 4.$$

Решение. Поскольку суммарные запасы груза на всех пунктах отправления меньше суммарных запросов пунктов назначения, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i = 14 + 18 + 16 = 48 < \sum\limits_{j=1}^{4} b_j = 22 + 2 + 17 + 11 = 52$, то надо привести задачу к замкнутой модели. Введем фиктивный пункт отправления A_4 с требуемой величиной вывоза $a_4 = \sum\limits_{j=1}^{4} b_j - \sum\limits_{i=1}^{3} a_i = 4$ и нулевыми стоимостями перевозок из этого пункта. Зададим транспортную задачу в виде платежной матрицы.

	$b_1 = 22$	$b_2 = 2$	$b_3 = 17$	$b_4 = 11$
$a_1 = 14$	2	2	4	8
$a_2 = 18$	4	5	7	6
$a_3 = 16$	6	3	4	9
$a_4 = 4$	0	0	0	0

Построим по методу “Северо-западного угла” первоначальное распределение:

	22	2	17	11
14	**14**			
18	**8**	**2**	**8**	
16			**9**	**7**
4				**4**

Для краткости в матрице плана перевозок не пишем нулевые значения небазисных перевозок. Число ненулевых элементов в первоначальном плане перевозок $m+n-1=4+4-1=7$. Значение функционала $\langle c, x^1\rangle = 2\cdot 14+4\cdot 8+5\cdot 2+7\cdot 8+4\cdot 9+9\cdot 7+0\cdot 4 = 28+32+10+56+36+63 = 225$. Перейдем к исследованию на оптимальность найденного плана. Построим матрицу $\overline{C}^1$ такую, что $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j \ \forall\ i, j,\ u_1 = 0$:

	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 5$	$v_4 = 10$
$u_1 = 0$	**2**	3	5	10
$u_2 = 2$	**4**	**5**	**7**	12
$u_3 = -1$	1	2	**4**	**9**
$u_4 = -10$	-8	-7	-5	**0**

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -1 & -1 & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -6 \\ 5 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 8 & 7 & 5 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ минимальный элемент $\min\limits_{i,j} \Delta_{ij} = \Delta_{24} = -6 < 0$. Добавляя в первоначальный план распределения на место нулевого небазисного элемента x_{24} величину t, получим второй план возможных перевозок

$$x^1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 14 & & & \\ \hline 8 & 2 & 8-t & t \\ \hline & & 9+t & 7-t \\ \hline & & & 4 \\ \hline \end{array} \quad \xrightarrow{t=7} \quad x^2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 14 & & & \\ \hline 8 & 2 & 1 & 7 \\ \hline & & 16 & \\ \hline & & & 4 \\ \hline \end{array}$$

Значение функционала $\langle c, x^2\rangle = \langle c, x^1\rangle - 6\cdot 7 = 225 - 42 = 183$. Исследуем на оптимальность план x^2. Построим матрицу $\overline{C}$ такую, что $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j \ \forall\ i, j,\ u_1 = 0$:

	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 5$	$v_4 = 4$
$u_1 = 0$	**2**	3	5	4
$u_2 = 2$	**4**	**5**	**7**	**6**
$u_3 = -1$	1	2	**4**	3
$u_4 = -4$	-2	-1	1	**0**

[1]В матрице $\overline{C}$ базисные элементы будем выделять полужирным шрифтом.

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -1 & -1 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 5 & 1 & \mathbf{0} & 6 \\ 2 & 1 & -1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ минимальные элементы $\min\limits_{i,j} \Delta_{ij} = \Delta_{12} = \Delta_{13} = \Delta_{43} = -1 < 0$. Во множество базисных элементов включим элемент x_{43} с наименьшей стоимостью перевозок. Добавляя во второй план перевозок на место нулевого небазисного элемента x_{43} величину t, получим третий план возможных перевозок

$$x^2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 14 & & & \\ \hline 8 & 2 & 1-t & 7+t \\ \hline & & 16 & \\ \hline & & t & 4-t \\ \hline \end{array} \xrightarrow{t=1} x^3 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 14 & & & \\ \hline 8 & 2 & & 8 \\ \hline & & 16 & \\ \hline & & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Значение функционала $\langle c, x^3 \rangle = \langle c, x^2 \rangle - 1 \cdot 1 = 183 - 1 = 182$. Исследуем на оптимальность план x^3. Построим матрицу $\overline{C}$ такую, что $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j \ \forall \ i, j,\ u_1 = 0$:

	$v_1 = 2$	$v_2 = 3$	$v_3 = 4$	$v_4 = 4$
$u_1 = 0$	$\mathbf{2}$	3	4	4
$u_2 = 2$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{5}$	6	$\mathbf{6}$
$u_3 = 0$	2	3	$\mathbf{4}$	4
$u_4 = -4$	-2	-1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -1 & 0 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ 4 & 0 & \mathbf{0} & 5 \\ 2 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ минимальный элемент $\min\limits_{i,j} \Delta_{ij} = \Delta_{12} = -1 < 0$. Добавляя в третий план распределения на место нулевого небазисного элемента x_{12} величину t, получим четвертый план возможных перевозок

$$x^3 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 14-t & t & & \\ \hline 8+t & 2-t & & 8 \\ \hline & & 16 & \\ \hline & & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{t=2} x^4 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 12 & 2 & & \\ \hline 10 & & & 8 \\ \hline & & 16 & \\ \hline & & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Значение функционала $\langle c, x^4\rangle = \langle c, x^3\rangle - 1\cdot 2 = 182 - 2 = 180$. Построим матрицу $\overline{C}$ такую, что $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j \ \forall\ i, j,\ u_1 = 0$:

	$v_1 = 2$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 4$
$u_1 = 0$	**2**	**2**	4	4
$u_2 = 2$	**4**	4	6	**6**
$u_3 = 0$	2	2	**4**	4
$u_4 = -4$	-2	-2	**0**	**0**

Поскольку $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 4 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 & \mathbf{0} \\ 4 & 1 & \mathbf{0} & 5 \\ 2 & 2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \geq 0$, то найденный четвертый план перевозок $x_{11} = 12$, $x_{12} = 2$, $x_{21} = 10$, $x_{24} = 8$, $x_{33} = 16$, $x_{43} = 1$, $x_{44} = 3$ (остальные перевозки нулевые), является оптимальным и суммарная стоимость всех перевозок равняется 180. Отметим, что возможны и другие, также являющиеся оптимальными, планы перевозок с той же суммарной стоимостью перевозок.

Пример 2. $x_{11}+2x_{12}+3x_{13}+4x_{14}+4x_{21}+3x_{22}+2x_{23}+ \\ +2x_{32}+2x_{33}+x_{34}\to\min;$

$$\begin{array}{rcl} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &=& 3,\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &=& 4,\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &=& 5, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_{11}+x_{21}+x_{31} &=& 2,\\ x_{12}+x_{22}+x_{32} &=& 3,\\ x_{13}+x_{23}+x_{33} &=& 4,\\ x_{14}+x_{24}+x_{34} &=& 3, \end{array}$$

$$x_{ij}\geq 0,\ i=1,2,3,\ j=1,2,3,4.$$

Решение. Поскольку суммарные запасы отправителей равны суммарным запросам потребителей, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{3}a_i=\sum\limits_{j=1}^{4}b_j=12$, то данная задача является замкнутой моделью транспортной задачи.

Зададим задачу виде платежной матрицы:

	$b_1=2$	$b_2=3$	$b_3=4$	$b_4=3$
$a_1=3$	1	2	3	4
$a_2=4$	4	3	2	0
$a_3=5$	0	2	2	1

Построим по методу “Северо-западного угла” первоначальное распределение:

	2	3	4	3
3	2	1		
4		2	2	
5			2	3

Для краткости в матрице плана перевозок не пишем нулевые значения небазисных перевозок. Число элементов в базисе $m+n-1=3+4-1=6$, $\langle c,x^1\rangle=1\cdot2+2\cdot1+3\cdot2+2\cdot2+2\cdot2+1\cdot3=2+2+6+4+4+3=21$. Исследуем на оптимальность план x^1. Построим матрицу $\overline{C}$ такую, что $\bar{c}_{ij}=u_i+v_j\ \forall\ i,j$, $u_1=0$:

	$v_1=1$	$v_2=2$	$v_3=1$	$v_4=0$
$u_1=0$	**1**	**2**	1	0
$u_2=1$	2	**3**	**2**	1
$u_3=1$	2	3	**2**	**1**

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2 & 4 \\ 2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 \\ -2 & -1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ минимальный элемент $\min\limits_{i,j} \Delta_{ij} = \Delta_{31} = -2 < 0$. Добавляя в первоначальный план распределения на место нулевого небазисного элемента x_{31} величину t, получим второй план возможных перевозок

$$x^1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2-t & 1+t & & \\ \hline & 2-t & 2+t & \\ \hline t & & 2-t & 3 \\ \hline \end{array} \quad \overset{t=2}{\rightarrow} \quad x^2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 3 & & \\ \hline & & 4 & \\ \hline 2 & & 0 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Из трех обнулившихся базисных элементов в базисе оставили два элемента с наименьшими стоимостями перевозок. Значение функционала $\langle c, x^2 \rangle = \langle c, x^1 \rangle - 2 \cdot 2 = 21 - 4 = 17$. Исследуем на оптимальность план x^2. Построим матрицу $\overline{C}$ такую, что $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j \ \forall \ i, j, \ u_1 = 0$:

	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 3$	$v_4 = 2$
$u_1 = 0$	**1**	**2**	3	2
$u_2 = -1$	0	1	**2**	1
$u_3 = -1$	**0**	1	**2**	**1**

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 2 \\ 4 & 2 & \mathbf{0} & -1 \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ минимальный элемент $\min\limits_{i,j} \Delta_{ij} = \Delta_{24} = -1 < 0$. Добавляя в первоначальный план распределения на место нулевого небазисного элемента x_{24} величину t, получим третий план возможных перевозок

$$x^2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 3 & & \\ \hline & & 4-t & t \\ \hline 2 & & 0+t & 3-t \\ \hline \end{array} \quad \overset{t=3}{\rightarrow} \quad x^3 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 3 & & \\ \hline & & 1 & 3 \\ \hline 2 & & 3 & \\ \hline \end{array}$$

Значение функционала $\langle c, x^3 \rangle = \langle c, x^2 \rangle - 1 \cdot 3 = 17 - 3 = 14$. Исследуем на оптимальность план x^3. Построим матрицу $\overline{C}$ такую, что $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j \ \forall\ i, j,\ u_1 = 0$:

	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 3$	$v_4 = 1$
$u_1 = 0$	**1**	**2**	3	1
$u_2 = -1$	0	1	**2**	**0**
$u_3 = -1$	**0**	1	**2**	0

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 3 \\ 4 & 2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$ все элементы неотрицательны. Значит найденный третий план перевозок $x_{11} = 0$, $x_{12} = 3$, $x_{23} = 1$, $x_{24} = 3$, $x_{31} = 2$, $x_{33} = 3$ (остальные небазисные перевозки нулевые), является оптимальным и суммарная стоимость всех перевозок равняется 14.

Пример 3. $5x_{11}+4x_{12}+13x_{13}+9x_{14}+2x_{21}+7x_{22}+6x_{23}+8x_{24}+$ $+9x_{31}+7x_{32}+11x_{33}+7x_{34}+x_{41}+6x_{42}+x_{43}+x_{44} \to \min;$

$$\begin{array}{rclrcl} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &=& 19, & x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} &=& 9,\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &=& 7, & x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} &=& 17,\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &=& 11, & x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} &=& 15,\\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44} &=& 15, & x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} &=& 11, \end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ \ i,j = 1,2,3,4.$$

Решение. Поскольку суммарные запасы отправителей равны суммарным запросам потребителей, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{4} a_i = 19+7+11+15 = 52$, $\sum\limits_{j=1}^{4} b_j = 9+17+15+11 = 52$, то данная задача является замкнутой моделью транспортной задачи. Зададим задачу виде платежной матрицы:

	$b_1 = 9$	$b_2 = 17$	$b_3 = 15$	$b_4 = 11$
$a_1 = 19$	5	4	13	9
$a_2 = 7$	2	7	6	8
$a_3 = 11$	9	7	11	7
$a_4 = 15$	1	6	1	1

Построим по методу “Северо-западного угла” первоначальный план:

	9	17	15	11
19	**9**	**10**		
7		**7**	**0**	
11			**11**	
15			**4**	**11**

Для краткости в матрице плана перевозок не пишем нулевые значения небазисных перевозок. Число элементов в базисе $m+n-1 = 4+4-1 = 7$. Один базисный элемент оказался нулевым. Это означает, что задача является вырожденной. Значение функционала $\langle c, x^1 \rangle = 5\cdot 9+4\cdot 10+7\cdot 7+6\cdot 0+11\cdot 11+1\cdot 4+1\cdot 11 =$

$45+40+49+0+121+4+11=270$. Исследуем на оптимальность план x^1. Построим матрицу $\overline{C}$ такую, что $\bar{c}_{ij}=u_i+v_j\ \forall\, i,j$, $u_1=0$:

	$v_1=5$	$v_2=4$	$v_3=3$	$v_4=3$
$u_1=0$	**5**	**4**	3	3
$u_2=3$	8	**7**	**6**	6
$u_3=8$	13	12	**11**	11
$u_4=-2$	3	2	**1**	**1**

В матрице $\Delta=C-\overline{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&10&6\\-6&\mathbf{0}&\mathbf{0}&2\\-4&-5&\mathbf{0}&-4\\-2&4&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$ минимальный элемент $\min\Delta_{ij}=\Delta_{21}=-6<0$. Добавляя в первоначальный план распределения на место нулевого небазисного элемента x_{21} величину t, получим второй план возможных перевозок

$$x^1=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 9-t&10+t&&\\\hline t&7-t&0&\\\hline &&11&\\\hline &&4&11\\\hline\end{array}\quad\xrightarrow{t=7}\quad x^2=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2&17&&\\\hline 7&&0&\\\hline &&11&\\\hline &&4&11\\\hline\end{array}$$

Значение функционала $\langle c,x^2\rangle=\langle c,x^1\rangle-6\cdot7=270-42=228$. Построим матрицу $\overline{C}$ такую, что $\bar{c}_{ij}=u_i+v_j\ \forall\ i,j$, $u_1=0$:

	$v_1=5$	$v_2=4$	$v_3=9$	$v_4=9$
$u_1=0$	**5**	**4**	9	9
$u_2=-3$	**2**	1	**6**	6
$u_3=2$	7	6	**11**	11
$u_4=-8$	−3	−4	**1**	**1**

В матрице $\Delta=C-\overline{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&4&0\\\mathbf{0}&6&\mathbf{0}&2\\2&1&\mathbf{0}&-4\\4&10&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$ минимальный элемент $\min\Delta_{ij}=\Delta_{34}=-4<0$. Добавляя в план на место нулевого небазисного элемента x_{34} величину t, получим третий план перевозок

$$x^2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 17 & & \\ \hline 7 & & 0 & \\ \hline & & 11-t & \color{red}{t} \\ \hline & & 4+t & 11-t \\ \hline \end{array} \quad \xrightarrow{t=11} \quad x^3 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 17 & & \\ \hline 7 & & 0 & \\ \hline & & & 11 \\ \hline & & 15 & 0 \\ \hline \end{array}$$

В этом случае обнуляются сразу два базисных элемента. Оставим из них в базисе элемент x_{44} с наименьшей стоимостью перевозок. Значение функционала $\langle c, x^3\rangle = \langle c, x^2\rangle - 4\cdot 11 = 228 - 44 = 184$. Построим матрицу $\overline{C}$ такую, что $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j \ \forall\ i, j,\ u_1 = 0$:

	$v_1 = 5$	$v_2 = 4$	$v_3 = 9$	$v_4 = 9$
$u_1 = 0$	**5**	**4**	9	9
$u_2 = -3$	**2**	1	**6**	6
$u_3 = -2$	3	2	7	**7**
$u_4 = -8$	-3	-4	**1**	**1**

Матрица $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 & 0 \\ \mathbf{0} & 6 & \mathbf{0} & 2 \\ 6 & 5 & 4 & \mathbf{0} \\ 4 & 10 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \geq 0$. Значит третий план перевозок является оптимальным и стоимость всех перевозок равна 184.

5.6 Задача двойственная к транспортной задаче

Рассмотрим транспортную задачу:

$$\langle c, x\rangle := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min;\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n, \tag{P}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, \ldots, m, \quad (a) \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, \ldots, n, \quad (b)$$

замкнутого типа $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j = M\right)$. Выпишем к ней двойственную. Напомним, что для задачи

$$\langle c, x\rangle \to \min; \quad Ax = b,\ x \geq 0,$$

двойственной является задача

$$\langle b, y\rangle \to \max; \quad A^* y \leq b.$$

Поэтому двойственной к транспортной задаче будет задача

$$\langle a, u\rangle + \langle b, v\rangle := \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to \max; \quad u_i + v_j \leq c_{ij},$$
$$i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n, \quad (P^{**})$$

в которой двойственными переменными являются потенциалы $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$.

В матричном виде ограничения задачи (P^{**}) имеют вид:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\
0 & 1 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_m\\ v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n
\end{pmatrix}
\leq
\begin{pmatrix}
c_{11}\\ c_{12}\\ \vdots\\ c_{1n}\\ c_{21}\\ c_{22}\\ \vdots\\ c_{2n}\\ \vdots\\ \vdots\\ c_{m1}\\ c_{m2}\\ \vdots\\ c_{mn}
\end{pmatrix}.$$

Матрица ограничений является транспонированной по отношению к матрице ограничений исходной транспортной задачи (P).

5.7 Обоснование метода потенциалов решения транспортной задачи

Теорема. *Крайняя точка x является решением в невырожденной транспортной задаче (P) тогда и только тогда, когда вектор $\Delta \geq 0$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\Delta = C - \overline{C} \geq 0$. Это означает, что для точки x найдены потенциалы u_i, v_j такие, что $\Delta_{ij} := c_{ij} - \bar{c}_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$, причем $u_i + v_j = c_{ij}$ для базисных i, j (множество базисных индексов обозначим B). Следовательно, $u_i + v_j \leq c_{ij},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$. Таким образом, условие $\Delta \geq 0$ равносильно тому, что вектор (u, v) является допустимым в двойственной задаче (P^{**}).

С другой стороны, поскольку $x_{ij} = 0$ при $(i, j) \notin B$ и
$u_i + v_j = c_{ij}\ \forall\ (i, j) \in B$, то

$$\langle c, x\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = \sum_{i,j \in B} c_{ij} x_{ij} = \sum_{i,j \in B} (u_i + v_j) x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (u_i + v_j) x_{ij}.$$

Разбивая последнюю сумму на две и учитывая условия (a) и (b), продолжим последнее равенство

$$\langle c, x\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_j x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j = \langle a, u\rangle + \langle b, v\rangle.$$

Отсюда по критерию решения п. 3.1 x — решение в прямой задаче (P), а (u, v) — решение в двойственной задаче (P^{**}).

Необходимость. Пусть x — оптимальный план. Докажем, что тогда $\Delta \geq 0$. Проведем доказательство от противного. Допустим, что это условие не выполняется, т. е. существует $\Delta_{i_0 j_0} < 0$. Поскольку $\Delta_{ij} = 0$ для $(i, j) \in B$, то $(i_0, j_0) \notin B$. Возьмем достаточно малое $t > 0$ так, чтобы $x + \bar{t} \geq 0$, где вектор $\bar{t} = \{t_{ij}\}$ выбирается по методу потенциалов, $t_{ij} = \begin{cases} \pm t \text{ или } 0, & i,j \in B, \\ t, & i = i_0,\ j = j_0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ Условия (a)–(b) допустимости вектора $x + \bar{t}$ в задаче (P) равносильны условиям:

$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij} = 0,\ j = 1, \ldots, n; \quad \sum_{j=1}^{n} t_{ij} = 0,\ i = 1, \ldots, m. \qquad (*)$$

Поскольку $c_{ij} = \Delta_{ij} + \bar{c}_{ij} = \Delta_{ij} + (u_i + v_j)$, то

$$\langle c, x + \bar{t} \rangle - \langle c, x \rangle = \langle c, \bar{t} \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\Delta_{ij} + (u_i + v_j)) t_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} t_{ij} + \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} t_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} t_{ij} \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} t_{ij} = \Delta_{i_0 j_0} t_{i_0 j_0}.$$

Две суммы равняются нулю в силу соотношения $(*)$. Слагаемые $\Delta_{ij} t_{ij} = 0$ при $(i,j) \neq (i_0, j_0)$, так как в этом произведении один из сомножителей равен нулю: $\Delta_{ij} = 0$ при $(i,j) \in B$, $t_{ij} = 0$ при $(i,j) \notin B$, $(i,j) \neq (i_0, j_0)$. Таким образом,

$$\langle c, x + \bar{t} \rangle - \langle c, x \rangle = \Delta_{i_0 j_0} t_{i_0 j_0} < 0,$$

значит, x не является оптимальным планом. Получили противоречие. Следовательно, наше допущение, что существует $\Delta_{i_0 j_0} < 0$ неверно и, если x — оптимальный план, то обязательно $\Delta \geq 0$. $\square$

5.8 Задача о назначении. Пример

Пусть некоторая фирма нанимает m служащих на n вакантных мест. Известно, что при назначении i-ого служащего на j-е место фирма получит c_{ij} прибыли. На какие должности кого надо назначить, чтобы общая прибыль фирмы после назначений была наибольшей?

Таким образом, задача о назначении является частным случаем транспортной задачи о максимуме функционала, когда $a_i = b_j = 1$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$:

$$\langle c, x\rangle := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max;\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ j = 1, \ldots, n; \quad \sum_{j=1} x_{ij} = 1,\ i = 1, \ldots, m.$$

Задачи о назначении также решаются методом потенциалов, предварительно перейдя от задачи на максимум к задаче на минимум

$$-\langle c, x\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} -c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

Поэтому, если в платежной матрице задачи о назначении стоимости были c_{ij}, то при решении методом потенциалов берутся стоимости $-c_{ij}$.

Пример.

$$5x_{11}+4x_{12}+7x_{13}+6x_{21}+7x_{22}+3x_{23}+8x_{31}+11x_{32}+2x_{33}\to \max;$$

$$\begin{array}{rclrcl} x_{11}+x_{12}+x_{13} &=& 1, & x_{11}+x_{21}+x_{31} &=& 1,\\ x_{21}+x_{22}+x_{23} &=& 1, & x_{12}+x_{22}+x_{32} &=& 1,\\ x_{31}+x_{32}+x_{33} &=& 1, & x_{13}+x_{23}+x_{33} &=& 1, \end{array}$$

$$x_{ij}\geq 0,\ \ i,j=1,2,3.$$

Решение. Задачу о назначении можно задать в виде платежной матрицы, не указывая величины a_i, b_j, поскольку они равны 1:

5	4	7
6	7	3
8	11	2

Перейдем от задачи на максимум к задаче на минимум, при этом в платежной матрице стоимости поменяют свой знак:

$$C=\begin{array}{|c|c|c|}\hline -5 & -4 & -7\\ \hline -6 & -7 & -3\\ \hline -8 & -11 & -2\\ \hline \end{array}$$

Построим по методу "Северо-западного угла" первоначальное распределение. Два нулевых элемента будем считать базисными, чтобы число элементов в базисе было $m+n-1=3+3-1=5$. Выберем их так, чтобы они имели минимальные стоимости.

$$x^1=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 1\\ \hline \end{array}$$

Значение функционала $\langle c, x^1\rangle=-14$. Построим матрицу $\overline{C}$ такую, что $\bar{c}_{ij}=u_i+v_j\ \forall\ i,j,\ u_1=0$:

	$v_1=-5$	$v_2=-8$	$v_3=1$
$\mathbf{u_1=0}$	$\mathbf{-5}$	-8	1
$u_2=1$	-4	$\mathbf{-7}$	2
$u_3=-3$	$\mathbf{-8}$	$\mathbf{-11}$	$\mathbf{-2}$

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 4 & -8 \\ -2 & \mathbf{0} & -5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ минимальный элемент $\min\limits_{i,j} \Delta_{ij} = \Delta_{13} = -8 < 0$. Добавляя в первоначальный план распределения на место нулевого небазисного элемента x_{13} величину t, получим второй план распределения должностей

$$x^1 = \begin{array}{|r|r|r|} \hline 1-t & & \color{red}{t} \\ \hline & 1 & \\ \hline 0+t & 0 & 1-t \\ \hline \end{array} \quad \overset{t=1}{\rightarrow} \quad x^2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline 1 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

Из двух обнулившихся базисных элементов в базисе оставили элемент с наименьшей стоимостью. Значение функционала $\langle c, x^2 \rangle = \langle c, x^1 \rangle - 8 \cdot 1 = -14 - 8 = -22$. Построим матрицу $\overline{C}$ такую, что $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j \ \forall\ i, j,\ u_1 = 0$:

	$v_1 = -5$	$v_2 = -8$	$v_3 = -7$
$u_1 = 0$	$\mathbf{-5}$	-8	$\mathbf{-7}$
$u_2 = 1$	-4	$\mathbf{-7}$	-6
$u_3 = -3$	$\mathbf{-8}$	$\mathbf{-11}$	-10

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ минимальный элемент $\min\limits_{i,j} \Delta_{ij} = \Delta_{21} = -2 < 0$. Добавляя во второй план распределения на место нулевого небазисного элемента x_{21} величину t, получим третий план распределения должностей

$$x^2 = \begin{array}{|r|r|r|} \hline 0 & & 1 \\ \hline \color{red}{t} & 1-t & \\ \hline 1-t & 0+t & \\ \hline \end{array} \quad \overset{t=1}{\rightarrow} \quad x^3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline 0 & 1 & \\ \hline \end{array}$$

Из двух обнулившихся базисных элементов в базисе оставили элемент с наименьшей стоимостью. Значение функционала $\langle c, x^3 \rangle = \langle c, x^2 \rangle - 2 \cdot 1 = -22 - 2 \cdot 1 = -24$. Построим матрицу $\overline{C}$

такую, что $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j \; \forall \; i, j, \; u_1 = 0$:

	$v_1 = -5$	$v_2 = -8$	$v_3 = -7$
$u_1 = 0$	$\mathbf{-5}$	-8	$\mathbf{-7}$
$u_2 = -1$	$\mathbf{-6}$	-9	-8
$u_3 = -3$	$\mathbf{-8}$	$\mathbf{-11}$	-10

В матрице $\Delta = C - \overline{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2 & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 8 \end{pmatrix}$ все элементы неотрицательны. Значит найденное распределение является оптимальным и значение исходной задачи равняется 24.

Упражнение.

Приведите пример, показывающий, что строить начальную крайнюю точку, сначала определив все ее ненулевые элементы, а потом дополнять до $m + n - 1$ элемента в базисе любыми нулевыми элементами нельзя.

5.9 Задачи

5.1. $2x_{11}+3x_{12}+4x_{13}+x_{14}+3x_{21}+4x_{22}+2x_{23}+5x_{24}+x_{31}+$ $+7x_{32}+5x_{33}+7x_{34}+5x_{41}+2x_{42}+8x_{43}+2x_{44}\to\min;$

$$\begin{array}{rclrcl} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &=& 7, & x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} &=& 11,\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &=& 8, & x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} &=& 2,\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &=& 5, & x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} &=& 6,\\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44} &=& 6, & x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} &=& 7, \end{array}$$

$$x_{ij}\ge 0,\ \ i,j=1,2,3,4.$$

5.2. $x_{11}+3x_{12}+10x_{13}+6x_{14}+7x_{21}+2x_{22}+5x_{23}+8x_{24}+5x_{31}+$ $+2x_{32}+2x_{33}+9x_{34}+2x_{41}+x_{42}+3x_{43}+4x_{44}\to\min;$

$$\begin{array}{rclrcl} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &=& 6, & x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} &=& 14,\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &=& 18, & x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} &=& 11,\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &=& 14, & x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} &=& 8,\\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44} &=& 10, & x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} &=& 15, \end{array}$$

$$x_{ij}\ge 0,\ \ i,j=1,2,3,4.$$

5.3. $4x_{11}+3x_{12}+3x_{13}+6x_{21}+4x_{22}+5x_{23}+5x_{31}+4x_{32}+6x_{33}+$ $6x_{41}+9x_{42}+10x_{43}\to\min;$

$$\begin{array}{rcl} x_{11}+x_{12}+x_{13} &\le& 8,\\ x_{21}+x_{22}+x_{23} &\le& 17,\\ x_{31}+x_{32}+x_{33} &\le& 7,\\ x_{41}+x_{42}+x_{43} &\le& 4, \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} &=& 5,\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} &=& 15,\\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} &=& 10, \end{array}$$

$$x_{ij}\ge 0,\ \ i,=1,2,3,4,\ \ j=1,2,3.$$

5.4. $2x_{11}+6x_{12}+2x_{13}+x_{14}+2x_{15}+9x_{21}+4x_{22}+3x_{23}+4x_{24}+$ $3x_{25}+5x_{31}+2x_{32}+8x_{33}+2x_{34}+5x_{35}\to\min;$

$$\begin{array}{rcl} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15} &=& 13,\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25} &=& 11,\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35} &=& 27, \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x_{11}+x_{21}+x_{31} &=& 15,\\ x_{12}+x_{22}+x_{32} &=& 7,\\ x_{13}+x_{23}+x_{33} &=& 14,\\ x_{14}+x_{24}+x_{34} &=& 9,\\ x_{15}+x_{25}+x_{35} &=& 6, \end{array}$$

$$x_{ij}\ge 0,\ \ i=1,2,3,\ \ j=1,2,3,4,5.$$

5.5. Решить транспортную задачу, находя первоначальную крайнюю точку по методу a) “Северо-Западного угла”; b) “Минимума по матрице”; c) “Минимума по строке”; d) “Минимума по столбцу”:
$x_{11}+2x_{12}+3x_{13}+4x_{14}+5x_{15}+2x_{21}+3x_{22}+4x_{23}+5x_{24}+x_{25}+3x_{31}+4x_{32}+5x_{33}+x_{34}+2x_{35}+4x_{41}+5x_{42}+x_{43}+2x_{44}+3x_{45}\to\max;$

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15} &= 13,\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25} &= 12,\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35} &= 7,\\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45} &= 5, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} &= 6,\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} &= 9,\\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} &= 4,\\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} &= 9,\\ x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45} &= 9, \end{aligned}$$

$$x_{ij}\ge 0,\ i=1,2,3,4,\ j=1,2,3,4,5.$$

5.6. Решить задачу о назначении: $9x_{11}+3x_{12}+5x_{13}+x_{14}+2x_{21}+10x_{22}+11x_{23}+6x_{24}+7x_{31}+8x_{32}+x_{33}+3x_{34}+5x_{41}+9x_{42}+4x_{43}+7x_{44}\to\max;$

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &= 1,\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &= 1,\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &= 1,\\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44} &= 1, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} &= 1,\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} &= 1,\\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} &= 1,\\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44} &= 1, \end{aligned}$$

$$x_{ij}\ge 0,\ i,j=1,2,3,4.$$