Глава 5

Условия второго порядка в вариационном исчислении

В этой главе даны необходимые и достаточные условия экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления и задаче Больца. Это классические условия — условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса и другие. Причем эти условия будут выведены как следствия принципа максимума. Условие Вейерштрасса будет также выведено без принципа максимума с помощью игольчатых вариаций. При выводе достаточных условий в простейшей задаче вариационного исчисления будет строиться поле экстремалей, выводиться основная формула Вейерштрасса. Формулируется и доказывается отдельно теорема о необходимых и достаточных условиях экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления и задаче Больца с квадратичным функционалом. Аналогичные необходимые и достаточные условия экстремума могут быть получены и в других задачах (изопериметрической задаче, задаче со старшими производными, задаче Лагранжа).

1 Простейшая задача вариационного исчисления

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления (для определенности задачу на минимум)

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \min;\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1.\ (P)$$

1.1 Сильный и слабый экстремум

Задачу (P) мы рассматривали на слабый экстремум. Иногда чтобы подчеркнуть, что задача рассматривается на слабый экстремум, мы будем писать $P(W)$. Множество допустимых элементов в задаче на слабый экстремум $D(P(W))$ составляют непрерывно дифференцируемые функции класса $C^1([t_0,\, t_1])$ с заданными условиями на концах.

Напомним, что функция $\hat{x} \in D(P(W))$ доставляет *слабый локальный минимум* в задаче (P) ($\hat{x} \in \mathrm{wlocmin} P$), если она доставляет локальный минимум в пространстве $C^1([t_0,\, t_1])$, т. е. если существует $\delta > 0$ такое, что $J(x) \geq J(\hat{x})$ для любой функции $x \in D(P(W))$, для которой $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1([t_0,\, t_1])} < \delta$.

Наряду со слабым экстремумом простейшую задачу вариационного исчисления будем рассматривать на сильный экстремум $P(S)$ (буква S — начальная буква слова strong — сильный). Множество допустимых элементов в задаче на сильный экстремум $D(P(S))$ составляют кусочно-дифференцируемые функции класса $PC^1([t_0,\, t_1])$ с заданными условиями на концах.

Функция $\hat{x} \in D(P(S))$ доставляет *сильный локальный минимум* в задаче (P) ($\hat{x} \in \mathrm{strlocmin}\, P$), если она доставляет локальный минимум в пространстве $C([t_0,\, t_1])$, т. е. если существует $\delta > 0$ такое, что $J(x) \geq J(\hat{x})$ для любой функции $x \in D(P(S))$, для которой $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C([t_0,\, t_1])} < \delta$.

Так как множество функций, среди которых доставляется сильный экстремум, шире, чем для слабого экстремума, то если функция $\hat{x} \in C^1([t_0,\, t_1])$ доставляет сильный, то она доставляет и слабый экстремум. Поэтому для функций $\hat{x} \in C^1([t_0,\, t_1])$ необходимое условие слабого экстремума является необходимым условием сильного, а достаточное условие сильного экстремума является достаточным условием слабого.

1.2 Пример слабого, но не сильного экстремума

Приведем пример задачи, в которой допустимая экстремаль доставляет слабый локальный минимум, но не доставляет сильного локального минимума.

Пример. $$\int\limits_0^1 \dot{x}^3\, dt \to \min;\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

Необходимое условие слабого, а значит и сильного экстремума — уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \iff \frac{d}{dt}3\dot{x}^2 = 0 \iff 3\dot{x}^2 = C \iff \dot{x} = \mathrm{const}.$$

Общее решение уравнения Эйлера: $x = C_1 t + C_2$. Из условий на концах находим, что $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = t$. Покажем, что она доставляет слабый локальный минимум в задаче ($\hat{x} \in \mathrm{wlocmin}$). Действительно, если $h \in C_0^1([0,1])$, то для функционала $J(x) = \int\limits_0^1 \dot{x}^3\, dt$ имеем

$$J(\hat{x}+h) - J(\hat{x}) = \int\limits_0^1 (\dot{\hat{x}} + \dot{h})^3\, dt - \int\limits_0^1 \dot{\hat{x}}^3\, dt = \int\limits_0^1 (1+\dot{h})^3\, dt -$$

$$- \int\limits_0^1 1^3\, dt = \int\limits_0^1 (3\dot{h} + 3\dot{h}^2 + \dot{h}^3)\, dt = \int\limits_0^1 \dot{h}^2(3+\dot{h})\, dt, \qquad (*)$$

так как $\int\limits_0^1 \dot h\,dt = h(1)-h(0)=0$. Отсюда видно, что если $\|h\|_1 < 3$, то $3+\dot h(t) > 0$ и, значит, $J(\hat x + h) \geq J(\hat x)$, т. е. $\hat x \in \mathrm{wlocmin}$.

Покажем, что $\hat x$ не доставляет сильного локального минимума ($\hat x \notin \mathrm{strlocmin}$). Рассмотрим последовательность функций h_n $(n > 1)$ такую, что

$$\dot h_n(t) = \begin{cases} -\sqrt{n}, & t \in \left[0,\, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & t \in \left(\frac{1}{n},\, \frac{1}{2}\right), \\ \frac{2}{\sqrt{n}}, & t \in \left[\frac{1}{2},\, 1\right]. \end{cases}$$

Тогда

$$h_n(t) = \int\limits_0^t \dot h_n(\tau) d\tau = \begin{cases} -\sqrt{n}\, t, & t \in \left[0,\, \frac{1}{n}\right], \\ -\frac{1}{\sqrt{n}}, & t \in \left(\frac{1}{n},\, \frac{1}{2}\right), \\ \frac{2t}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}}, & t \in \left[\frac{1}{2},\, 1\right]. \end{cases}$$

Легко понять, что $h_n \in PC_0^1([0,\,1])$ и $\|h_n\|_{C([0,\,1])} \to 0$ при $n \to \infty$. Положим $x_n = \hat x + h_n$. Получим последовательность допустимых (в задаче на сильный экстремум) функций x_n, $x_n(\cdot) \to \hat x(\cdot)$ в метрике пространства $C([0,\,1])$, для которых в силу $(*)$

$$J(x_n) - J(\hat x) = \int\limits_0^1 \dot h_n^2 (3 + \dot h_n)\, dt = \int\limits_0^{1/n} n(3-\sqrt{n})\, dt + \int\limits_{1/2}^1 \frac{4}{n}\Bigl(3 + \frac{2}{\sqrt{n}}\Bigr)\, dt =$$

$$= 3 - \sqrt{n} + \frac{6}{n} + \frac{4}{n\sqrt{n}} \to -\infty,$$

при $n \to \infty$, т. е. функция $\hat x$ не доставляет сильного локального минимума ($\hat x \notin \mathrm{strlocmin}$), более того $S_{\mathrm{strabsmin}} = -\infty$.

Ниже в п. 1.4.3 в лемме о скруглении углов покажем, $S_{\mathrm{strabsmin}P} = S_{\mathrm{wabsmin}P}$. В нашей задаче можно было построить последовательность допустимых функций $\tilde x_n$ класса C^1 такую, что $J(\tilde x_n) \to -\infty$, т. е. сгладить функции x_n.

1.3 Условия Лежандра, Якоби, Вейерштрасса

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления, для определенности задачу на минимум

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt \to \inf; \; x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1. \quad \text{(P)}$$

Пусть $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0,\, t_1])$ — некоторая фиксированная допустимая ($\hat{x}(t_0) = x_0$, $\hat{x}(t_1) = x_1$) экстремаль (т. е. функция $\hat{x}$ удовлетворяет уравнению Эйлера). Далее предполагаем, что интегрант L по меньшей мере дважды непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}$ ($L \in C^2(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}))$).

Возьмем функцию $h \in C_0^1([t_0,\, t_1])$. Пусть $\hat{x} \in \mathrm{wlocmin} P$, тогда функция одного переменного

$$\varphi(\lambda) = J(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\big(t, \hat{x}(t) + \lambda h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t)\big)\, dt$$

имеет минимум при $\lambda = 0$. Из условий, наложенных на гладкость функции L, следует, что функция $\varphi(\lambda)$ дважды дифференцируема в нуле. Поэтому по необходимому условию минимума первого порядка (по теореме Ферма) $\varphi'(0) = 0$, т. е.

$$\varphi'(0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(\hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \hat{L}_x(t) h(t)\Big)\, dt = 0 \quad \forall\, h \in C_0^1([t_0,\, t_1]). \quad (1)$$

В главе 3 п. 1.3 было показано, что из соотношения (1) следует уравнение Эйлера — необходимое условие первого порядка слабого экстремума.

По необходимому условию второго порядка минимума для функции одной переменной $\varphi''(0) \geq 0$, т. е.

$$\varphi''(0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}^2(t) + 2\hat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t)h(t) + \hat{L}_{xx}(t)h^2(t)\Big)\,dt \geq 0$$

$$\forall\ h \in C_0^1([t_0,\, t_1]). \qquad (2)$$

Из соотношения (2) выводятся условия второго порядка минимума в простейшей задаче вариационного исчисления. Важную роль играет коэффициент $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)$ при $\dot{h}^2$.

Говорим, что на экстремали $\hat{x}$ выполнено *условие Лежандра*, если $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geq 0\ \forall\ t \in [t_0,\, t_1]$ и *усиленное условие Лежандра*, если $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0\ \ \forall\ t \in [t_0,\, t_1]$.

В векторном случае $x = (x_1, \ldots, x_n) \in C^1([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^n)$,

$$L_{\dot{x}\dot{x}} = \begin{pmatrix} L_{\dot{x}_1\dot{x}_1} & \ldots & L_{\dot{x}_1\dot{x}_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{\dot{x}_n\dot{x}_1} & \ldots & L_{\dot{x}_n\dot{x}_n} \end{pmatrix}, \quad L_{\dot{x}x} = \begin{pmatrix} L_{\dot{x}_1x_1} & \ldots & L_{\dot{x}_1x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{\dot{x}_nx_1} & \ldots & L_{\dot{x}_nx_n} \end{pmatrix},$$

$$L_{x\dot{x}} = \begin{pmatrix} L_{x_1\dot{x}_1} & \ldots & L_{x_1\dot{x}_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{x_n\dot{x}_1} & \ldots & L_{x_n\dot{x}_n} \end{pmatrix}, \quad L_{xx} = \begin{pmatrix} L_{x_1x_1} & \ldots & L_{x_1x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{x_nx_1} & \ldots & L_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

— матрицы размера $n \times n$. Отметим, что матрица $L_{\dot{x}x}(t)$ является транспонированной к матрице $L_{x\dot{x}}(t)$ и $\langle L_{x\dot{x}}\dot{h}, h\rangle = \langle \dot{h}, L^*_{x\dot{x}}h\rangle = \langle \dot{h}, L_{\dot{x}x}h\rangle$. Условие $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geq 0$ означает неотрицательную определенность матрицы, условие $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0$ — положительную определенность матрицы. Соотношение (2) можно переписать в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(\big\langle \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}, \dot{h}\big\rangle + 2\big\langle \hat{L}_{x\dot{x}}\dot{h}, h\big\rangle + \big\langle \hat{L}_{xx}h, h\big\rangle\Big)\,dt \geq 0 \quad \forall\, h \in C_0^1([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^n).$$

Пусть далее $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}, \hat{L}_{\dot{x}x}, \hat{L}_{xx} \in C^1([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^{n^2})$ и выполнено усиленное условие Лежандра. Уравнение Эйлера по h для интегранта $\tilde{L}=\tilde{L}(t,h,\dot{h}):=\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}^2(t)+2\hat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t)h(t)+\hat{L}_{xx}(t)h^2(t)$

$$-\frac{d}{dt}\tilde{L}_{\dot{h}}(t)+\tilde{L}_h(t)=0 \iff$$
$$-\frac{d}{dt}\left(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t)+\hat{L}_{\dot{x}x}(t)h(t)\right)+\hat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t)+\hat{L}_{xx}(t)h(t)=0$$

называется *уравнением Якоби* для исходной задачи на экстремали $\hat{x}$.

Точка τ называется *сопряженной к точке* t_0, если для решения уравнения Якоби $h(\cdot)$ с начальными данными $h(t_0)=0$, $\dot{h}(t_0)=1$ (или $\dot{h}(t_0)\neq 0$), функция h в точке τ обращается в ноль ($h(\tau)=0$). Говорят, что на $\hat{x}$ выполнено *условие Якоби*, если в интервале $(t_0,\,t_1)$ нет точек, сопряженных с t_0, и *усиленное условие Якоби*, если в полуинтервале $(t_0,\,t_1]$ нет точек, сопряженных с t_0.

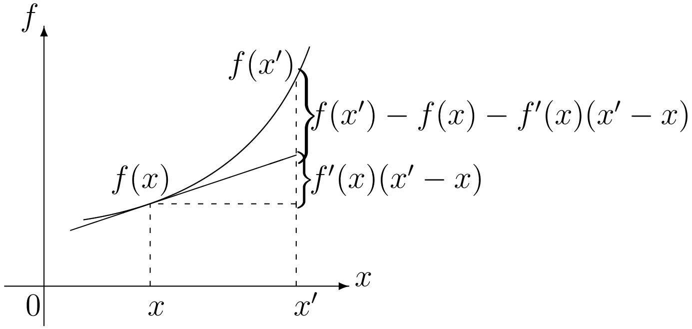
Уравнение Якоби — линейное дифференциальное уравнение второго порядка, которое (из-за усиленного условия Лежандра) можно разрешить относительно второй производной.

Для вектор-функций $x=(x_1,\ldots,x_n)$ ищется фундаментальная система решений уравнения Якоби — матрица $H(t)=\big(h^1(t)\ \ldots\ h^n(t)\big)=\begin{pmatrix} h_1^1(t) & \ldots & h_1^n(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ h_n^1(t) & \ldots & h_n^n(t)\end{pmatrix}$ с начальными условиями $H(t_0)=0$ (нулевая матрица), $\dot{H}(t_0)=I$ (единичная матрица) или $\det\dot{H}(t_0)\neq 0$. Вектор-столбцы $h^i=\begin{pmatrix} h_1^i\\ \vdots\\ h_n^i\end{pmatrix}$ — решения системы уравнений Якоби. Точка τ называется *сопряженной к точке* t_0, если матрица $H(\cdot)$ является вырожденной, т. е. $\det H(\tau)=0$.

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ — дифференцируемая функция n переменных. Функцию

$$\mathcal{E}(x,x'):=f(x')-f(x)-f'(x)(x'-x)$$

назовем *функцией Вейерштрасса* функции f. Геометрический смысл функции $\mathcal{E}$ таков: $\mathcal{E}(x,x')$ — разность в точке x' между значением f и значением аффинной функции, касательной к графику f в точке x. Отсюда ясно, что если f выпукла, то $\mathcal{E}(x, x') \geq 0$. Можно показать, что верно и обратное.



Пусть $L(t, x, \dot{x})$ — интегрант простейшей задачи вариационного исчисления. Функция

$$\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) := L(t, x, u) - L(t, x, \dot{x}) - L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})(u - \dot{x})$$

называется *функцией Вейерштрасса интегранта* L. Таким образом, $\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u)$ — функция Вейерштрасса функции $\dot{x} \to L(t, x, \dot{x})$, где t, x играют роль параметров. Говорят, что на экстремали $\hat{x}$ выполнено *условие Вейерштрасса*, если

$$\mathcal{E}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), u) - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - \hat{L}_{\dot{x}}(t)(u - \dot{\hat{x}}(t)) \geq 0 \quad \forall\ u \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ t \in [t_0,\, t_1].$$

Геометрический смысл условия Вейерштрасса на экстремали $\hat{x}$: для любого фиксированного $t \in [t_0,\, t_1]$ график функции $L = L(\dot{x}) = L(t, \hat{x}(t), \dot{x})$ (как функции от $\dot{x}$) лежит выше касательной к кривой L в точке $\dot{\hat{x}}(t)$.

Если функция $L(\dot{x})$ выпуклая по $\dot{x}$ для любых t, x, то условие Вейерштрасса выполняется на любой экстремали$\hat{x}$.

1.4 Необходимые и достаточные условия слабого и сильного экстремума

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления для вектор-функций $x = (x_1, \ldots, x_n)$ (для определенности задачу на минимум)

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)\, dt \to \inf;\; x(t_0) = x_0,\; x(t_1) = x_1. \quad \text{(P)}$$

1.4.1 Игольчатые вариации. Условие Вейерштрасса

Понятие сильного экстремума ввел в вариационное исчисление Вейерштрасс. Для доказательства необходимого условия сильного минимума Вейерштрасс употребил специальные вариации экстремальной функции $\hat{x}$ вида $x_\lambda(t) = \hat{x}(t) + h_\lambda(t)$, где $\lambda \geq 0$,

$$h_\lambda(t) = h_\lambda(t;\tau,\xi) = \begin{cases} \xi\lambda + (t-\tau)\xi, & t \in [\tau-\lambda,\, \tau], \\ \xi\lambda - (t-\tau)\xi\sqrt{\lambda}, & t \in [\tau,\, \tau+\sqrt{\lambda}], \\ 0, & t \notin [\tau-\lambda,\, \tau+\sqrt{\lambda}], \end{cases} \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

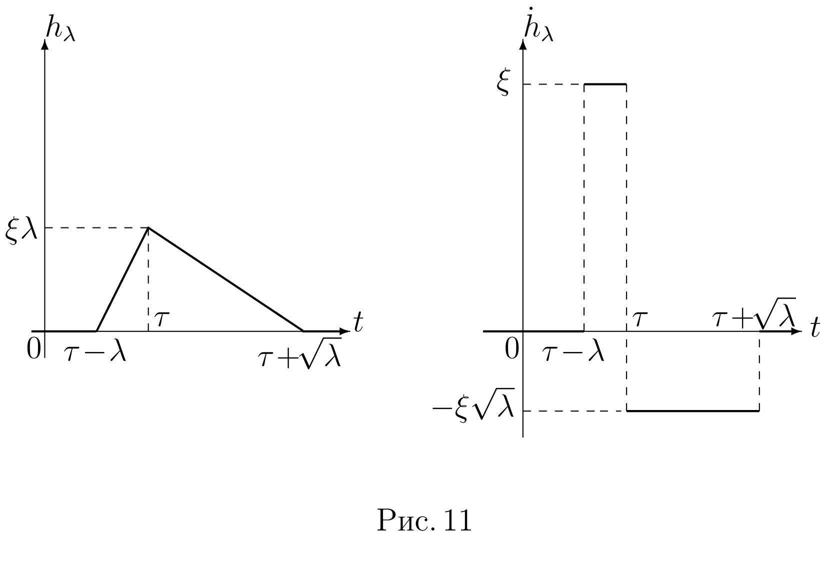


Рис. 11

Производная вариации $h_\lambda(t)$ имеет вид, изображенный на рис. 11 (для удобства изображения взято $n = 1$, $\xi > 0$). При малом λ изменение функции $\hat{x}$ производится на очень маленьком отрезке, в связи с чем подобные вариации называют “игольчатыми”. Эти вариации приспособлены к исследованию задач на сильный экстремум. Игольчатые вариации несколько иного вида использовались при доказательстве принципа максимума Понтрягина.

Очевидно, что $x_\lambda(\cdot) \to \hat{x}(\cdot)$ в метрике пространства $C([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^n)$ при $\lambda \to 0$.

С помощью игольчатых вариаций докажем условие Вейерштрасса — необходимое условие сильного минимума в простейшей задаче вариационного исчисления на классе кусочно-гладких функций.

Теорема. *Пусть функция $\hat{x}$ доставляет сильный локальный минимум в задаче (P) ($\hat{x} \in \mathit{strlocmin}\, P$), интегрант L непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}} = \{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \mid t \in [t_0,\, t_1]\}$, $T \subset [t_0,\, t_1]$ — множество точек непрерывности функции $\dot{\hat{x}}$. Тогда на $\hat{x}$ выполняется условие Вейерштрасса*

$$\mathcal{E}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), u) - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - \hat{L}_{\dot{x}}(t)(u - \dot{\hat{x}}(t)) \geq 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, t \in T.$$

Доказательство. Возьмем точку $\tau \in (t_0,\, t_1) \cap T$ (случаи $\tau = t_0, t_1$ доказываются предельными переходами $\tau \to t_0$, $\tau \to t_1$ в неравенстве). Рассмотрим выписанную выше игольчатую вариацию $x_\lambda(t) = \hat{x}(t) + h_\lambda(t)$ функции $\hat{x}$. При достаточно малых $\lambda \geq 0$ отрезок $[\tau - \lambda,\, \tau + \sqrt{\lambda}] \subset T$, функция x_λ допустима в задаче на сильный экстремум $\big(x_\lambda \in D(P(S))\big)$: $x_\lambda \in PC^1([t_0,\, t_1])$, $x_\lambda(t_i) = \hat{x}(t_i) + h_\lambda(t_i) = x_i$, $i = 0, 1$. Очевидно, что функция $x_\lambda(\cdot) \to \hat{x}(\cdot)$ в метрике пространства $C([t_0,\, t_1])$ при $\lambda \to 0$.

Поскольку $\hat{x} \in \mathrm{strlocmin}\, P$, то функция одного переменного $\varphi(\lambda) = J(x_\lambda) = J(\hat{x} + h_\lambda)$ имеет минимум при $\lambda = 0$, т. е. $\varphi(\lambda) \geq \varphi(0)$. Отсюда следует, что если производная справа в нуле $\varphi'(+0)$ существует, то $\varphi'(+0) \geq 0$. Вычислим $\varphi'(+0)$. Поскольку функции $\hat{x}(t)$ и $x_\lambda(t)$ совпадают при $t \in [t_0,\, \tau - \lambda]$ и $t \in [\tau + \sqrt{\lambda},\, t_1]$ то, разбивая отрезок интегрирования $[t_0,\, t_1]$ на четыре отрезка, имеем

$$\varphi'(+0) = \lim_{\lambda \to +0} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to +0} \frac{J(x_\lambda) - J(\hat{x})}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda \to +0} \frac{1}{\lambda} \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(L(t, x_\lambda, \dot{x}_\lambda) - L(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) \Big) dt =$$

$$= \lim_{\lambda \to +0} \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\tau-\lambda}^{\tau} \Big(L(t, x_\lambda, \dot{\hat{x}} + \xi) - \hat{L}(t) \Big) dt +$$

$$+ \lim_{\lambda \to +0} \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} \Big(L(t, x_\lambda, \dot{x}_\lambda) - L(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) \Big) dt =: J_1 + J_2.$$

По теореме о среднем для определенных интегралов $J_1 = L(\tau, \hat{x}(\tau), \dot{\hat{x}}(\tau) + \xi) - \hat{L}(\tau)$.

Из условий гладкости, наложенных на интегрант L, вытекает дифференцируемость по Фреше отображения $L\colon C^1([\tau,\, \tau + \sqrt{\lambda}], \mathbb{R}^n) \to C([\tau,\, \tau + \sqrt{\lambda}], \mathbb{R}^n)$, действующего по формуле $L(x(\cdot)) = L(t, x(t), \dot{x}(t))$. По определению дифференцируемости по Фреше

$$L(x_\lambda) - L(\hat{x}) = L(\hat{x} + h_\lambda) - L(\hat{x}) = L'(\hat{x})[h_\lambda] + r(h_\lambda) = \hat{L}_x h_\lambda + \hat{L}_{\dot{x}} \dot{h}_\lambda + r(h_\lambda),$$

где $\|r(h_\lambda)(\cdot)\|_{C([\tau,\, \tau+\sqrt{\lambda}])} = o(\|h_\lambda(\cdot)\|_{C^1([\tau,\, \tau+\sqrt{\lambda}])}) = o(\sqrt{\lambda})$, так как $\|h_\lambda(\cdot)\|_{C^1([\tau,\, \tau+\sqrt{\lambda}])} \overset{\mathrm{d}ef}{=} \max\Big\{ \|h_\lambda\|_{C([\tau,\, \tau+\sqrt{\lambda}])}, \|\dot{h}_\lambda\|_{C([\tau,\, \tau+\sqrt{\lambda}])} \Big\} = \max\Big\{ |\xi|\lambda, |\xi|\sqrt{\lambda} \Big\} = |\xi|\sqrt{\lambda}$. Поэтому

$$J_2 = \lim_{\lambda \to +0} \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} \Big(\hat{L}_x h_\lambda + \hat{L}_{\dot{x}} \dot{h}_\lambda + r(h_\lambda) \Big) dt =$$

$$= \lim_{\lambda \to +0} \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} \hat{L}_x (\xi\lambda - (t - \tau)\xi\sqrt{\lambda}) dt + \lim_{\lambda \to +0} \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} \hat{L}_{\dot{x}} (-\xi\sqrt{\lambda}) dt +$$

$$+\lim_{\lambda\to+0}\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} r(h_\lambda)dt =: A_1+A_2+A_3.$$

Используя теорему о среднем для определенных интегралов, найдем величины A_1, A_2, A_3 :

$$A_1=\lim_{\lambda\to+0}\int\limits_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} \hat{L}_x\xi\,dt-\lim_{\lambda\to+0}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} \hat{L}_x\cdot(t-\tau)\xi\,dt=0,$$

$$A_2=-\lim_{\lambda\to+0}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} \hat{L}_{\dot{x}}\xi\,dt=-\hat{L}_{\dot{x}}(\tau)\xi,$$

$$|A_3|\le\lim_{\lambda\to+0}\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} |r(h_\lambda)|\,dt\le\lim_{\lambda\to+0}\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\tau}^{\tau+\sqrt{\lambda}} \|r(h_\lambda)(\cdot)\|_{C([\tau,\,\tau+\sqrt{\lambda}])}dt=$$

$$=\frac{o(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}\to 0\Rightarrow A_3=0.$$

В итоге, $J_2=-\hat{L}_{\dot{x}}(\tau)\xi$ и

$$\varphi'(+0)=L(\tau,\hat{x}(\tau),\dot{\hat{x}}(\tau)+\xi)-\hat{L}(\tau)-\hat{L}_{\dot{x}}(\tau)\xi\ge 0.$$

Нетрудно видеть, что выписанное условие Вейерштрасса является тем же самым, что и в формулировке теоремы, где $t=\tau$, $u=\dot{\hat{x}}(\tau)+\xi$. Условие Вейерштрасса доказано. $\triangleright$

В задаче на максимум условие Вейерштрасса меняет свой знак.

1.4.2 Необходимое условие сильного экстремума — неравенство (γ)

Выведем еще одно неравенство, которое назовем неравенством (γ), являющееся необходимым условием сильного минимума. При этом доказательство неравенства будет существенно проще доказательства условия Вейерштрасса, а условием гладкости является просто непрерывность интегранта L. Для функции L, дифференцируемой по $\dot{x}$ в точке $\dot{\hat{x}}(t)$, неравенство будет совпадать с условием Вейерштрасса.

Рассмотрим следующие вариации допустимой экстремали $\hat{x}$. Пусть точка $\tau \in (t_0,\, t_1)$ и произвольные числа $\xi, \eta > 0$ фиксированы. Положим $x_\lambda(t) = \hat{x}(t) + h_\lambda(t)$, где $\lambda \geq 0$,

$$h_\lambda(t) = \begin{cases} \xi\lambda + (t-\tau)\xi, & t \in [\tau-\lambda,\, \tau], \\ \xi\lambda - (t-\tau)\eta, & t \in \left[\tau,\, \tau + \frac{\lambda\xi}{\eta}\right], \\ 0, & t \notin \left[\tau-\lambda,\, \tau + \frac{\lambda\xi}{\eta}\right]. \end{cases}$$

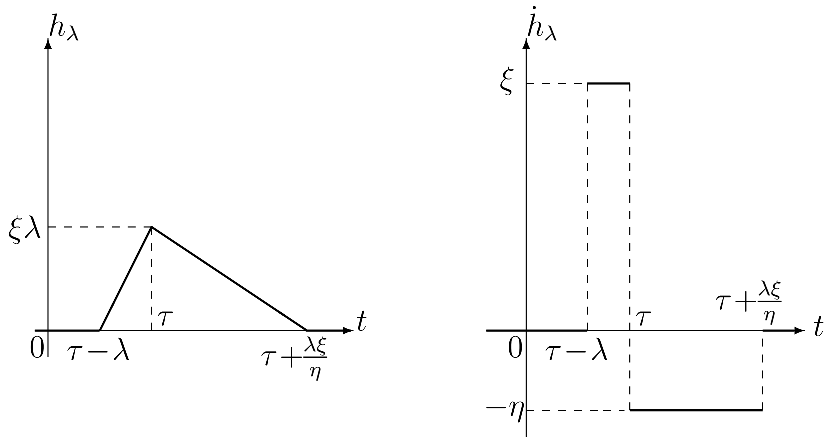


Рис. 11

При $\eta = \xi\sqrt{\lambda}$ вариации совпадают с вариациями Вейерштрасса.

Теорема. *Пусть функция $\hat{x}$ доставляет сильный локальный минимум в задаче (P) ($\hat{x} \in strlocminP$), интегрант L*

непрерывен в некоторой окрестности множества расширенного графика $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}$ $(L \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})))$, $T \subset [t_0,\, t_1]$ *— множество точек непрерывности функции* $\dot{\hat{x}}$. *Тогда на* $\dot{x} := \dot{\hat{x}}(\tau)$ *выполняется условие*

$$L(\dot{x}) \leq \frac{\eta}{\xi+\eta} L(\dot{x}+\xi) + \frac{\xi}{\xi+\eta} L(\dot{x}-\eta) \ \forall\, \xi, \eta > 0, \ \forall\, \tau \in T. \quad (\gamma)$$

Доказательство. Возьмем точку $\tau \in (t_0,\, t_1) \cap T$ (случаи $\tau = t_0, t_1$ доказываются предельными переходами $\tau \to t_0, \tau \to t_1$ в неравенстве (γ)). Рассмотрим выписанную выше игольчатую вариацию $x_\lambda(t) = \hat{x}(t) + h_\lambda(t)$ функции $\hat{x}$. При достаточно малых $\lambda \geq 0$ отрезок $\left[\tau - \lambda,\, \tau + \frac{\lambda\xi}{\eta}\right] \subset T$, функция x_λ допустима в задаче на сильный экстремум $\big(x_\lambda \in D(P(S))\big)$: $x_\lambda \in PC^1([t_0,\, t_1])$, $x_\lambda(t_i) = \hat{x}(t_i) + h_\lambda(t_i) = x_i$, $i = 0, 1$. Очевидно, что функция $x_\lambda(\cdot) \to \hat{x}(\cdot)$ в метрике пространства $C([t_0,\, t_1])$ при $\lambda \to 0$.

Поскольку $\hat{x} \in \mathrm{strlocmin} P$, то функция одного переменного $\varphi(\lambda) = J(x_\lambda) = J(\hat{x} + h_\lambda)$ имеет минимум при $\lambda = 0$, т. е. $\varphi(\lambda) \geq \varphi(0)$. Отсюда следует, что если производная справа в нуле $\varphi'(+0)$ существует, то $\varphi'(+0) \geq 0$. Вычислим $\varphi'(+0)$. Поскольку функции $\hat{x}(t)$ и $x_\lambda(t)$ совпадают при $t \in [t_0,\, \tau - \lambda]$ и $t \in \left[\tau + \frac{\lambda\xi}{\eta},\, t_1\right]$ то, разбивая отрезок интегрирования $[t_0,\, t_1]$ на четыре отрезка, имеем

$$\varphi'(+0) = \lim_{\lambda \to +0} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to +0} \frac{J(x_\lambda) - J(\hat{x})}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda \to +0} \frac{1}{\lambda} \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(L(t, x_\lambda, \dot{x}_\lambda) - L(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) \Big) dt =$$

(интегралы на промежутках интегрирования $[t_0,\, \tau - \lambda]$, $\big[\tau +$

$\frac{\lambda\xi}{\eta},\, t_1\bigr]$ обращаются в ноль)

$$=\lim_{\lambda\to+0}\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\tau-\lambda}^{\tau}\Bigl(L(t,x_\lambda,\dot{\hat{x}}+\xi)-\hat{L}(t)\Bigr)dt+\lim_{\lambda\to+0}\underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{\frac{\xi}{\eta}\frac{1}{\frac{\lambda\xi}{\eta}}}\int\limits_{\tau}^{\tau+\frac{\lambda\xi}{\eta}}\Bigl(L(t,x_\lambda,\dot{\hat{x}}-\eta)-\hat{L}(t)\Bigr)dt=$$

(по теореме о среднем для определенных интегралов)

$$=L(\tau,\hat{x}(\tau),\dot{\hat{x}}(\tau)+\xi)-\hat{L}(\tau)+\frac{\xi}{\eta}\Bigl(L(\tau,\hat{x}(\tau),\dot{\hat{x}}(\tau)-\eta)-\hat{L}(\tau)\Bigr)\geq 0 \iff$$

(умножим обе части неравенства на η)

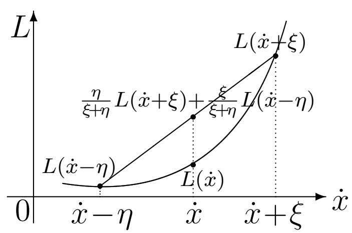
$$\eta L(\tau,\hat{x}(\tau),\dot{\hat{x}}(\tau)+\xi)+\xi L(\tau,\hat{x}(\tau),\dot{\hat{x}}(\tau)-\eta)-(\xi+\eta)\hat{L}(\tau)\geq 0 \iff$$

(разделим обе части неравенства на $\xi+\eta$)

$$L(\dot{x})\leq\frac{\eta}{\xi+\eta}L(\dot{x}+\xi)+\frac{\xi}{\xi+\eta}L(\dot{x}-\eta)\qquad\forall\ \xi,\eta>0,\ \forall\ \tau\in T.$$

Неравенство (γ) доказано. $\triangleright$

Геометрический смысл условия (γ) на экстремали $\hat{x}$: для любого фиксированного $t\in T$ точка $\bigl(\dot{\hat{x}}(t),L(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t))\bigr)$ лежит ниже любой хорды с концами по разные стороны от $\dot{x}$ графика функции $L=L(\dot{x})=L(t,\hat{x}(t),\dot{x})$ (как функции от $\dot{x}$).



Иными словами, *точка* $(\dot{x}, L(\dot{x}))$ *лежит ниже соответствующей точки на хорде* $\big(\dot{x}-\eta, L(\dot{x}-\eta)\big), \big(\dot{x}+\xi, L(\dot{x}+\xi)\big)$. Действительно, выпуклая комбинация точек $\dfrac{\xi}{\xi+\eta}\big(\dot{x}-\eta, L(\dot{x}-\eta)\big) + \dfrac{\eta}{\xi+\eta}\big(\dot{x}+\xi, L(\dot{x}+\xi)\big)$ равняется $\Big(\dot{x}, \dfrac{\xi}{\xi+\eta}L(\dot{x}-\eta)+\dfrac{\eta}{\xi+\eta}L(\dot{x}+\xi)\Big)$ $\Big($равенство для первых координат $\dfrac{\xi}{\xi+\eta}(\dot{x}-\eta)+\dfrac{\eta}{\xi+\eta}(\dot{x}+\xi) = \dot{x}$ проверяется непосредственным вычислением$\Big)$.

Для выпуклой функции $L(\dot{x})$ условие (γ) будет выполняться на любой функции $x \in PC^1([t_0,\, t_1])$.

Если L — дифференцируемая в точке $\dot{\hat{x}}$ функция, то из условия (γ) вытекает условие Вейерштрасса. Ниже условие Вейерштрасса будет выведено из принципа максимума Понтрягина.

1.4.3 Необходимые условия сильного экстремума

Теорема 1. *Пусть функция $\hat{x} \in C^1([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^n)$ доставляет сильный локальный минимум в задаче (P) ($\hat{x} \in strlocmin\, P$), интегрант L непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}$ ($L \in C^1(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}))$). Тогда на $\hat{x}$ выполняется уравнение Эйлера*

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\ t \in [t_0,\, t_1]$$

и удовлетворяется условие Вейерштрасса

$$E(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}, u) = L(t, \hat{x}, u) - L(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) - \hat{L}_{\dot{x}}(t)(u - \dot{\hat{x}}) \geq 0 \ \forall\ u \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ t \in [t_0, t_1].$$

Если при этом существует $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)$ $\forall\ t \in [t_0,\, t_1]$, то выполняется также условие Лежандра: $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geq 0$ $\forall\ t \in [t_0,\, t_1]$.

В задаче на максимум условия Лежандра и Вейерштрасса меняют свой знак.

Доказательство. Формализуем задачу (P) как задачу оптимального управления

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x, u)\, dt \to \min;\ \dot{x} = u,\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1. \qquad (P')$$

Условие $\hat{x} \in \mathrm{strlocmin}P$ равносильно тому, что пара $(\hat{x}, \hat{u})$, где $\hat{u}(t) = \dot{\hat{x}}(t)$, является оптимальным процессом в задаче оптимального управления (P'). Поэтому согласно принципу максимума Понтрягина найдутся множители Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ и $p(\cdot) \in PC^1([t_0,\, t_1])$, $\lambda \neq 0$, такие, что для функции Лагранжа задачи (P')

$$\Lambda = \int\limits_{t_0}^{t_1} \big(\lambda_0 L(t, x, u) + p(t)(\dot{x} - u)\big)\, dt + \lambda_1(x(t_0) - x_0) + \lambda_2(x(t_1) - x_1)$$

выполняются условия:

а) уравнение Эйлера для интегранта $\tilde{L} = \lambda_0 L(t,x,u) + p(t)(\dot{x}-u)$:

$$-\frac{d}{dt}\tilde{L}_{\dot{x}}(t)+\tilde{L}_x(t)=0 \iff -\dot{p}(t)+\lambda_0\hat{L}_x(t)=0 \quad \forall\, t\in[t_0,\, t_1];$$

b) трансверсальности по x: $p(t_0)=\lambda_1,\ p(t_1)=-\lambda_2$;

c) оптимальности по u:

$$\min_{u\in\mathbb{R}^n}\{\underbrace{\lambda_0 L(t,\hat{x}(t),u)-p(t)u}_{f(u)}\}=\lambda_0 L(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t))-p(t)\dot{\hat{x}}(t).$$

d) неотрицательности: $\lambda_0\geq 0$.

Если $\lambda_0=0$, то из c) (поскольку минимум конечен и равен $-p(t)\dot{\hat{x}}(t)$) вытекает, что $p(t)\equiv 0$, тогда из b) — что все множители Лагранжа нули.

Значит, $\lambda_0\neq 0$. Полагаем в задаче на минимум $\lambda_0=1$. Тогда из c) по необходимому условию I порядка минимума функции $f(u)=L(t,\hat{x}(t),u)-p(t)u$ следует, что $f'(\hat{u})=0\Leftrightarrow \hat{L}_u(t)-p(t)=0\Leftrightarrow \hat{L}_{\dot{x}}(t)=p(t)$, а по необходимому условию II порядка $f''(\hat{u})\geq 0\Leftrightarrow \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\geq 0\ \forall\ t\in[t_0,\, t_1]$. Подставляя $p=\hat{L}_{\dot{x}}$ в условие стационарности по x, получаем уравнение Эйлера для интегранта L. Условие оптимальности по u при $\lambda_0=1$ и $p=\hat{L}_{\dot{x}}$

$$L(t,\hat{x}(t),u)-\hat{L}_{\dot{x}}(t)u\geq L(t,\hat{x}(t),\dot{\hat{x}}(t))-\hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{\hat{x}}(t) \quad \forall\, u\in\mathbb{R}^n,\ \forall\, t\in[t_0,\, t_1]$$

есть не что иное, как условие Вейерштрасса. $\triangleright$

Отметим, что выполнение уравнения Эйлера можно доказать и по-другому. Действительно, поскольку $\hat{x}\in \mathrm{strlocmin}P\cap C^1$, то $\hat{x}\in \mathrm{wlocmin}P$ и, следовательно, выполняется необходимое условие слабого минимума — уравнение Эйлера.

В дальнейшем нам придется использовать следующий результат.

1.4.4 Лемма о скруглении углов

Пусть функция $\hat{x} \in PC^1([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^n)$, интегрант $L \in C(\mathbb{R}^{2n+1})$. Тогда существует последовательность гладких функций $\{x_k\}_{k\geq 1} \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, $x_k(t_0) = \hat{x}(t_0)$, $x_k(t_1) = \hat{x}(t_1)$, такая, что $x_k(\cdot) \to \hat{x}(\cdot)$ в метрике пространства $C([t_0, t_1])$, и $\lim\limits_{k\to\infty} J(x_k) = J(\hat{x})$.

$\lhd$ Для простоты записи проведем доказательство для $n = 1$.

Возьмем функцию $h(t) = \begin{cases} \dfrac{(|t|-1)^2}{4}, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$

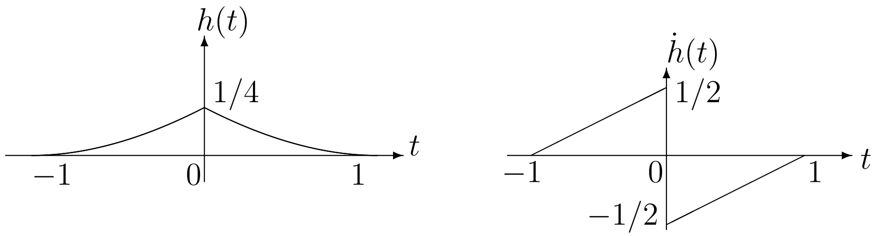


Рис.

Она непрерывна, а ее производная при $t = 0$ имеет скачок величины -1, $|h(t)| \leq \frac{1}{4}$, $|\dot{h}(t)| \leq \frac{1}{2}$. Пусть $\tau_i \in (t_0,\, t_1)$, $i = 1, \ldots, m$, — точки разрыва производной $\dot{\hat{x}}$ и $\Delta_i = \dot{\hat{x}}(\tau_i + 0) - \dot{\hat{x}}(\tau_i - 0)$ — ее скачки в этих точках. Функция $h_k(\cdot, \tau_i) = \frac{1}{k} h(k(\cdot - \tau_i))$, график которой получается из графика функции h преобразованиями сдвига и подобия отлична от нуля на интервале $\left(\tau_i - \frac{1}{k},\, \tau_i + \frac{1}{k}\right)$, непрерывна, а ее производная непрерывна всюду кроме точки τ_i, где производная по-прежнему имеет скачок равный -1, кроме того $|h_k(t, \tau_i)| \leq \frac{1}{4k}$, $|\dot{h}_k(t, \tau_i)| \leq \frac{1}{2}$.

Тогда функция $x_k(t) = \hat{x}(t) + \sum\limits_{i=1}^{m} \Delta_i h_k(t, \tau_i)$ непрерывна вместе со своей производной на всем отрезке $[t_0,\, t_1]$, причем $x_k(t) = \hat{x}(t)$ вне отрезков $\left[\tau_i - \frac{1}{k},\, \tau_i + \frac{1}{k}\right]$. В частности, для достаточно больших k эти отрезки не перекрываются, $x_k(t_0) = \hat{x}(t_0)$,

$x_k(t_1)=\hat{x}(t_1)$,

$$|x_k(t)-\hat{x}(t)|=\Bigl|\sum_{i=1}^{m}\Delta_i h_k(t,\tau_i)\Bigr|\le\frac{1}{4k}\max_i|\Delta_i|=\frac{\Delta}{4k}\to 0 \text{ при } k\to+\infty,$$

$$|\dot{x}_k(t)-\dot{\hat{x}}(t)|=\Bigl|\sum_{i=1}^{m}\Delta_i\dot{h}_k(t,\tau_i)\Bigr|\le\frac{1}{2}\max_i|\Delta_i|=\frac{\Delta}{2}\ \ (\Delta:=\max_i|\Delta_i|).$$

На компакте $\Bigl\{(t,x,\dot{x})\ \mid\ t_0\le t\le t_1,\ |x-\hat{x}(t)|\le\dfrac{\Delta}{4k_0}$, $|\dot{x}-\dot{\hat{x}}(t)|\le\dfrac{\Delta}{2}\Bigr\}$ непрерывная функция L ограничена: $|L(t,x,\dot{x})|\le M$. Поэтому при достаточно больших k

$$|J(x_k)-J(\hat{x})|=\Bigl|\int\limits_{t_0}^{t_1}L(t,x_k,\dot{x}_k)\,dt-\int\limits_{t_0}^{t_1}L(t,\hat{x},\dot{\hat{x}})\,dt\Bigr|=$$

$$=\Bigl|\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\tau_i-\frac{1}{k}}^{\tau_i+\frac{1}{k}}\Bigl(L(t,x_k,\dot{x}_k)-L(t,\hat{x},\dot{\hat{x}})\Bigr)dt\Bigr|\le\frac{4Mm}{k}$$

и, следовательно, $J(x_k)\to J(\hat{x})$ при $k\to+\infty$. $\rhd$

Следствие. *Абсолютный экстремум в задаче* (P) *на сильный и слабый экстремум совпадают*: $S_{\mathrm{strabsmin}P}=S_{\mathrm{wabsmin}P}$.

Для локальных экстремумов это может быть не так (см. п. 1.2.).

1.4.5 Необходимые условия слабого экстремума

Теорема 2. *Пусть функция* $\hat{x} \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ *доставляет слабый локальный минимум в задаче* (P) $(\hat{x} \in wloc\min P)$, *интегрант* L *трижды непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности расширенного графика* $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}$ $(L \in C^3(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})))$. *Тогда на* $\hat{x}$ *выполняется уравнение Эйлера, условие Лежандра, а если на экстремали* $\hat{x}$ *выполнено усиленное условие Лежандра* $(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0\ \forall\ t \in [t_0, t_1])$, *то выполняется и условие Якоби (на интервале* (t_0, t_1) *нет сопряженных точек).*

В задаче на максимум условие Лежандра меняет свой знак.

Доказательство. Для простоты записи проведем доказательство для $n = 1$.

1) *Вывод уравнения Эйлера и условия Лежандра.* Поскольку функция $\hat{x} \in \mathrm{wlocmin}P$, то для любой функции $h \in C_0^1([t_0, t_1])$ функция $\varphi(\lambda) = J(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot))$ имеет локальный минимум в нуле. Тогда по необходимому условию минимума функции одного переменного $\varphi'(0) = 0$ и $\varphi''(0) \geq 0$. В главе 3 п. 1.3 было показано, что первое условие равносильно выполнению уравнения Эйлера на функции $\hat{x}$. Второе условие эквивалентно неотрицательности функционала

$$K(h(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}^2(t) + 2\hat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t)h(t) + \hat{L}_{xx}(t)h^2(t)\Big)\, dt \geq 0 \quad \forall\ h \in C_0^1([t_0, t_1]).$$

Из неотрицательности и вида функционала K следует, что функция $\bar{h}(t) \equiv 0$ доставляет абсолютный минимум (слабый) в задаче

$$K(h(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \big(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}^2 + 2\hat{L}_{x\dot{x}}\dot{h}h + \hat{L}_{xx}h^2\big)dt \to \min;\ h(t_0) = h(t_1) = 0. \qquad (P'')$$

По следствию из леммы о скруглении углов функция $\bar{h} \equiv 0$ доставляет в задаче (P'') и сильный абсолютный минимум. Тогда в силу теоремы 1 о необходимых условиях сильного минимума в задаче (P'') на $\bar{h}$ выполняется условие Лежандра для интегранта

$$\tilde{L}(t, h(t), \dot{h}(t)) := \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}^2(t) + 2\hat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t)h(t) + \hat{L}_{xx}(t)h^2(t),$$

т. е. $\tilde{L}_{\dot{h}\dot{h}}(t) \geq 0 \Leftrightarrow \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geq 0 \ \forall \ t \in [t_0, t_1]$. Таким образом, условие Лежандра в задаче (P) выполнено.

2) *Вывод условия Якоби.* Предположим противное, что условие Якоби не выполнено, т. е. существует точка $\tau \in (t_0, t_1)$ и нетривиальное ($h \not\equiv 0$) решение $h \in C^1([t_0, t_1])$ уравнения Якоби, для которого $h(t_0) = h(\tau) = 0$. Отметим, что из нетривиальности решения h однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с условием $h(\tau) = 0$ вытекает, что $\dot{h}(\tau) \neq 0$. Положим $\tilde{h}(t) = \begin{cases} h(t), & t_0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq t_1. \end{cases}$ Тогда

$$K(\tilde{h}(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{\tau} \Big(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}^2 + 2\hat{L}_{x\dot{x}}\dot{h}h + \hat{L}_{xx}h^2\Big)\,dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{\tau} \Big(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}^2 + \hat{L}_{\dot{x}x}h\dot{h} + \hat{L}_{x\dot{x}}\dot{h}h + \hat{L}_{xx}h^2\Big)\,dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{\tau} \Big(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h} + \hat{L}_{\dot{x}x}h\Big)\dot{h}\,dt + \int\limits_{t_0}^{\tau} \Big(\hat{L}_{x\dot{x}}\dot{h} + \hat{L}_{xx}h\Big)h\,dt =$$

$$= \Big(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h} + \hat{L}_{\dot{x}x}h\Big)h\Big|_{t_0}^{\tau} +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau}\bigg(-\frac{d}{dt}\Big(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h} + \hat{L}_{\dot{x}x}h\Big) + \hat{L}_{x\dot{x}}\dot{h} + \hat{L}_{xx}h\bigg)h\,dt = 0,$$

(так как функция h удовлетворяет уравнению Якоби). Таким образом, $K(\tilde{h}) = 0$, а это означает, что $\tilde{h} \in \mathrm{strabsmin} P''$ (наряду с функцией $\bar{h} \equiv 0$) и, следовательно, пара $(\tilde{h}, \tilde{u} = \dot{\tilde{h}})$ является оптимальным управляемым процессом в задаче оптимального управления, получаемой как и в теореме 1, из задачи (P''). Проводя аналогичные рассуждения, получим, что найдется функция $\tilde{p} \in PC^1([t_0, t_1])$ такая, что для лагранжиана квадратичной задачи $\tilde{L}(t, h, \dot{h}) = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}^2 + 2\hat{L}_{\dot{x}x}h\dot{h} + \hat{L}_{xx}h^2$ на экстремали $\tilde{h}$ выполняется уравнение

$$\tilde{p}(t) = \tilde{L}_{\dot{h}}(t, \tilde{h}(t), \dot{\tilde{h}}(t)) \iff \tilde{p}(t) = 2\left(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{\tilde{h}}(t) + \hat{L}_{\dot{x}x}(t)\tilde{h}(t)\right).$$

Поскольку $\tilde{h}(t) = 0$ при $t > \tau$, то $\tilde{p}(\tau + 0) = 0$ и в силу непрерывности функции $\tilde{p}$

$$0 = \tilde{p}(\tau - 0) = 2\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau)\dot{\tilde{h}}(\tau - 0) = 2\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau)\dot{h}(\tau) = 0,$$

откуда $\dot{h}(\tau) = 0$ (ибо $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\tau) \neq 0$ из-за усиленного условия Лежандра). Мы пришли к противоречию с условием $\dot{h}(\tau) \neq 0$. Таким образом, предположение противного неверно, и условие Якоби выполнено. $\triangleright$

1.4.6 Поле экстремалей

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right)\, dt \to \inf;\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1. \quad (\mathrm{P})$$

Полем экстремалей в задаче (P) называется множество (иногда говорят "семейство") экстремалей $\{x(\cdot, \lambda)\}$, $x(\cdot, \cdot) \in C^1([t_0,\ t_1] \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$, с параметром $\lambda \in \Lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ ($\Leftrightarrow$ Λ — некоторое открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$). (Напомним, что экстремаль — это функция, удовлетворяющая уравнению Эйлера.)

Если для поля экстремалей существует точка (t_*, x_*) такая, что $x(t_*, \lambda) = x_*$ для всех $\lambda \in \Lambda$, то это поле называется *центральным полем экстремалей*, а точка (t_*, x_*) называется *центром поля экстремалей.*

Пусть $\hat{x}$ — допустимая экстремаль в задаче (P) (т. е. экстремаль с заданными в задаче граничными условиями). Говорим, что *экстремаль $\hat{x}$ включена в поле* экстремалей $\{x(\cdot, \lambda)\}$, если $\hat{x}(\cdot) = x(\cdot, \hat{\lambda})$ при некотором $\hat{\lambda} \in \Lambda$.

Говорим, что *экстремаль* $\hat{x}$, включенная в поле экстремалей, *окружена полем* экстремалей, если существует окрестность G графика $\Gamma_{\hat{x}}$ такая, что для любой точки (τ, ξ) из этой окрестности имеется единственная экстремаль семейства, проходящая через эту точку; причем функция $\lambda\colon G \to \mathbb{R}^n$, $\lambda = \lambda(\tau, \xi)$, должна быть класса $C^1(G)$. Единственность экстремали, проходящей через точку (τ, ξ), означает, что по точке $(\tau, \xi) \in G$ значение $\lambda = \lambda(\tau, \xi)$ отыскивается единственным образом.

Функция $u\colon G \to \mathbb{R}^n$, $u(\tau, \xi) = \dfrac{d}{dt} x(t, \lambda(\tau, \xi))\Big|_{t=\tau} =: \dot{x}(\tau, \lambda(\tau, \xi))$ называется *функцией наклона поля.* Отметим, что на экстремали $\hat{x}$ функция наклона поля $u(t, \hat{x}(t)) \equiv \dot{\hat{x}}(t)$ совпадает с производной функции $\hat{x}(t)$.

Пример (гармонический осциллятор).

$$\int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \min;\ x(t_0) = x(t_1) = 0 \quad (0 < t_0 < t_1 < \pi).$$

Уравнение Эйлера $\ddot{x} + x = 0$. Экстремали этого функционала имеют вид $x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Допустимая экстремаль $\hat{x}(t) \equiv 0$. Совокупность экстремалей $x(t,\lambda) = \lambda \sin t$ есть центральное поле экстремалей с центром в точке (0,0), включающее, в частности, экстремаль $\hat{x}$ при $\lambda = 0$, покрывающее полосу $0 < t < \pi$.

Найдем экстремаль поля, проходящую через точку (τ, ξ) $(0 < \tau < \pi)$:

$$x(\tau,\lambda) = \xi \Leftrightarrow \lambda \sin\tau = \xi \Leftrightarrow \lambda = \frac{\xi}{\sin\tau} \Rightarrow x(t, \lambda(\tau,\xi)) = \frac{\xi}{\sin\tau}\sin t.$$

Функция наклона поля

$$u(\tau,\xi) = \frac{d}{dt}x(t,\lambda(\tau,\xi))\Big|_{t=\tau} = \frac{d}{dt}\frac{\xi}{\sin\tau}\sin t\Big|_{t=\tau} = \xi\operatorname{ctg}\tau.$$

Построение центрального поля экстремалей

Теорема. *Пусть $\hat{x} \in C^2([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^n)$ — допустимая экстремаль в задаче (P) $(\hat{x} \in DE(P))$, интегрант L трижды непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}$ $(L \in C^3(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})))$, на $\hat{x}$ выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби. Тогда $\hat{x}$ можно окружить центральным полем экстремалей.*

Доказательство. Распишем уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) + L_x(t, x, \dot{x}) = 0 \iff L_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} + L_{\dot{x}x}\dot{x} + L_{\dot{x}t} - L_x = 0. \tag{1}$$

Так как выполнено усиленное условие Лежандра, то есть неравенство $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0 \;\forall\; t \in [t_0,\, t_1]$, то в силу непрерывности функции $L_{\dot{x}\dot{x}}$ (напомним, что $L \in C^3$) найдется такое $U \in \mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})$, что $L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, \dot{x}) > 0 \;\forall\; (t, x, \dot{x}) \in U$. Значит, в области U уравнение Эйлера (1) равносильно системе, разрешенной относительно производных

$$\ddot{x} = L_{\dot{x}\dot{x}}^{-1}(L_x - L_{\dot{x}t} - L_{\dot{x}x}\dot{x}) \iff \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \Phi(t, x, y), \end{cases}$$

где $\Phi(t, x, y) := L_{\dot{x}\dot{x}}^{-1}(t, x, y)\big(L_x(t, x, y) - L_{\dot{x}t}(t, x, y) - L_{\dot{x}x}(t, x, y)y\big)$.

В силу заданной гладкости интегранта L функция Φ непрерывно дифференцируема в окрестности U. Тогда по теореме существования и непрерывно дифференцируемой зависимости решения от начальных данных (Гл. 4, п. 1.3) найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что

a) решение $\hat{x}$ продолжимо на отрезок $[t_0 - \varepsilon,\, t_1 + \varepsilon]$;

b) для любого $\lambda \in \Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid |\lambda| < \delta\}$ на отрезке $[t_0 - \varepsilon,\, t_1 + \varepsilon]$ определено решение $x(\cdot, \lambda)$ уравнения Эйлера с начальными данными $x(t_*, \lambda) = \hat{x}(t_*)$, $\dot{x}(t_*, \lambda) = \dot{\hat{x}}(t_*) + \lambda$, где t_* — некоторая точка интервала $(t_0 - \varepsilon,\, t_0)$.

При этом функция $x(t, \lambda)$ непрерывно дифференцируема как функция двух переменных $\big(x(\cdot, \cdot) \in C^1([t_0 - \varepsilon,\, t_1 + \varepsilon] \times \Lambda, \mathbb{R}^n)\big)$. Значит, множество экстремалей $\{x(\cdot, \lambda)\}$, $\lambda \in \Lambda$, является полем экстремалей (даже центральным). В силу единственности решения дифференциального уравнения $x(\cdot,\lambda)=\hat{x}$ при $\lambda=0$, т.е. экстремаль $\hat{x}$ включена в поле экстремалей $\{x(\cdot,\lambda)\}$. Покажем, что экстремаль $\hat{x}(t)$, при $t\in[t_0,\,t_1]$ окружена этим центральным полем экстремалей. Положим

$$H(t,t_*):=\frac{\partial}{\partial\lambda}x(t,\lambda)\Big|_{\lambda=0}=x_\lambda(t,\lambda)\big|_{\lambda=0}\Longrightarrow \dot{H}(t,t_*)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\dot{x}(t,\lambda)$$

$$\Big(H_{ij}(t,t_*):=\frac{\partial x_i(t,\lambda)}{\partial\lambda_j}\Big|_{\lambda=0},\ i,j=1,\dots,n\Big),$$

тогда

$$H(t_*,t_*)=\frac{\partial}{\partial\lambda}x(t_*,\lambda)\Big|_{\lambda=0}=\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{x}(t_*)=0,$$

$$\dot{H}(t_*,t_*)=\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}x(t,\lambda)\Big|_{\lambda=0}\Big)\Big|_{t=t^*}=\frac{\partial}{\partial\lambda}\dot{x}(t_*,\lambda)\Big|_{\lambda=0}=\frac{\partial}{\partial\lambda}\big(\dot{\hat{x}}(t_*)+\lambda\big)=I.$$

Поскольку $x(t,\lambda)$ — экстремаль для любого λ, $|\lambda|<\delta$, то, дифференцируя уравнение Эйлера (1) по λ и меняя порядок дифференцирования в первом слагаемом, получим

$$0\equiv\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t,x(t,\lambda),\dot{x}(t,\lambda))+L_x(t,x(t,\lambda),\dot{x}(t,\lambda))\Big)\Big|_{\lambda=0}\iff$$

$$-\frac{d}{dt}\Big(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\dot{x}(t,\lambda)\Big|_{\lambda=0}+\hat{L}_{\dot{x}x}\frac{\partial}{\partial\lambda}x(t,\lambda)\Big|_{\lambda=0}\Big)+$$

$$+\hat{L}_{x\dot{x}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\dot{x}(t,\lambda)\Big|_{\lambda=0}+\hat{L}_{xx}\frac{\partial}{\partial\lambda}x(t,\lambda)\Big|_{\lambda=0}=0\iff$$

$$-\frac{d}{dt}\Big(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{H}(t,t_*)+\hat{L}_{\dot{x}x}(t)H(t,t_*)\Big)+\hat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{H}(t,t_*)+\hat{L}_{xx}(t)H(t,t_*)=0.$$

Значит, матрица $H(\cdot,t_*)$ удовлетворяет уравнению Якоби с начальными условиями $H(t_*,t_*)=0$, $\dot{H}(t_*,t_*)=I$. Пусть $H(t,t_0)$ — матричное решение уравнения Якоби с условиями $H(t_0,t_0)=0$, $\dot{H}(t_0,t_0)=I$. Поскольку выполнено усиленное условие Якоби, то не существует нетривиального решения h уравнения Якоби, удовлетворяющего условиям $h(t_0)=h(\tau)=0$, $t_0<\tau\le t_1$. Таким образом, усиленное условие Якоби равносильно невырожденности матрицы $H(t,t_0)$ при любом $t\in(t_0,\,t_1]$. Но тогда снова в силу глобальной теоремы существования и непрерывной зависимости решения от начальных данных [АТФ, с. 195] при достаточной близости t_* к t_0 матрица $H(t, t_*)$ будет невырожденной для любого $t \in [t_0,\, t_1]$.

Рассмотрим функцию $\Psi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, действующую по формуле $\Psi(\tau, \lambda) = (\tau, x(\tau, \lambda))$, для $\tau \in (t_0 - \varepsilon,\, t_1 + \varepsilon)$, $\lambda \in \Lambda$. Функция Ψ переводит точки (τ, λ) в точки (τ, ξ), где $\xi = x(\tau, \lambda)$. При этом $\Psi \in C^1((t_0 - \varepsilon,\, t_1 + \varepsilon) \times \Lambda)$, $\Psi(t, 0) = (t, x(t, 0)) = (t, \hat{x}(t))$ и якобиан[1]

$$\det \Psi'\Big|_{(t,0)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dot{x}(t,0) & x_\lambda(t,0) \end{pmatrix} = \det x_\lambda(t, 0) \overset{\mathrm{d}ef}{=} \det H(t, t_*) \neq 0$$

при $t \in [t_0,\, t_1]$. По теореме об обратной функции (для каждой фиксированной точки $t \in [t_0,\, t_1]$) существуют функция Ψ^{-1} и число $\delta > 0$ (зависящие от t) такие, что $\Psi^{-1}(\tau, \xi) = (\tau, \lambda)$ для любой точки (τ, ξ), для которой $|t - \tau| < \delta$, $|\hat{x}(t) - \xi| < \delta$, и $\Psi(\tau, \lambda) \overset{\mathrm{d}ef}{=} (\tau, x(\tau, \lambda)) = (\tau, \xi)$. Обратная функция сопоставляет точке (τ, ξ) точку (τ, λ) единственным образом. Поэтому существует единственное $\lambda = \lambda(\tau, \xi)$ (зависящее от t) такое, что $x(\tau, \lambda(\tau, \xi)) = \xi$. Значит, экстремаль $x(\cdot, \lambda)$ действительно проходит через точку (τ, ξ) и она из поля экстремалей определяется единственным образом.

В силу компактности графика $\Gamma_{\hat{x}} = \{(t, \hat{x}(t)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in [t_0,\, t_1]\}$ (из любого открытого покрытия компакта можно выбрать конечное подпокрытие) можно найти одно δ_0, такое, что для любой точки (τ, ξ), для которой $\tau \in [t_0,\, t_1]$, $|\hat{x}(\tau) - \xi| < \delta_0$, существует (и, как нетрудно понять, единственное) $\lambda = \lambda(\tau, \xi)$ (не зависящее от t) при котором $x(\tau, \lambda(\tau, \xi)) = \xi$. При этом гладкость функции λ такая же, как гладкость поля $\{x(\cdot, \lambda)\}$, т. е. C^1.

[1] для отображения $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$, матрица Якоби $f' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

S-функция и ее дифференциал

Пусть $x(\cdot,\lambda)$ — дважды непрерывно дифференцируемое центральное поле экстремалей с центром в точке (t_*, x_*), окружающее допустимую экстремаль $\hat{x}(\cdot)$, и интегрант L — дважды непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности расширенного графика функции $\hat{x}(\cdot)$ ($L \in C^2(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}))$). Функция

$$S(\tau,\xi) = \int\limits_{t_*}^{\tau} L(t, x(t,\lambda(\tau,\xi)), \dot{x}(t,\lambda(\tau,\xi)))\, dt$$

называется *S-функцией центрального поля* $x(\cdot,\lambda)$. Найдем дифференциал S-функции. Он понадобится нам для вывода основной формулы Вейерштрасса при доказательстве достаточных условий сильного экстремума. Для нахождения частных производных S-функции нам понадобятся некоторые полезные соотношения. Имеем по определению поля и функции наклона поля тождество

$$x(\tau,\lambda(\tau,\xi)) = \xi.$$

Дифференцируя обе части этого тождества по τ, получим

$$\dot{x}(\tau,\lambda(\tau,\xi)) + x_\lambda(\tau,\lambda(\tau,\xi))\lambda_\tau(\tau,\xi) = 0 \Longrightarrow$$

$$-x_\lambda\lambda_\tau = \dot{x}(\tau,\lambda(\tau,\xi)) \overset{\mathrm{d}ef}{=} u(\tau,\xi) \qquad (\tau)$$

($u(\tau,\xi)$ — функция наклона поля). Дифференцируя обе части тождества по ξ, получим

$$x_\lambda(\tau,\lambda(\tau,\xi))\lambda_\xi(\tau,\xi) = I \qquad (\xi)$$

(I — единичная матрица). Поскольку (t_*, x_*) — центр поля, то $x(t_*,\lambda) = x_*$ для любого λ, и, значит, выполняется следующее соотношение

$$x_\lambda(t_*,\lambda(\tau,\xi)) = 0 \quad \forall\ (\tau,\xi) \in \mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}). \qquad (*)$$

Найдем $\dfrac{\partial S}{\partial \tau}$, дифференцируя по τ интеграл с переменным верхним пределом, и используя непрерывность $\dot{x}_\lambda$, вытекающую из того, что $x(\cdot,\lambda) \in C^2$. Имеем

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = L(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) + \int\limits_{t_*}^{\tau} \Big(L_x(t,x(t,\lambda(\tau,\xi)),\dot{x}(t,\lambda(\tau,\xi)))x_\lambda(t,\lambda(\tau,\xi))\lambda_\tau(\tau,\xi)$$

$$+L_{\dot{x}}(t,x(t,\lambda(\tau,\xi)),\dot{x}(t,\lambda(\tau,\xi)))\dot{x}_\lambda(t,\lambda(\tau,\xi))\lambda_\tau(\tau,\xi)\Big)dt = L(\tau,\xi,u)+$$

$$+\int\limits_{t_*}^{\tau}(L_x x_\lambda \lambda_\tau + L_{\dot{x}}\dot{x}_\lambda\lambda_\tau)\,dt = L(\tau,\xi,u) + \int\limits_{t_*}^{\tau} L_x x_\lambda \lambda_\tau\,dt + \int\limits_{t_*}^{\tau} L_{\dot{x}}\,dx_\lambda \lambda_\tau =$$

$$= L(\tau,\xi,u) + L_{\dot{x}} x_\lambda \lambda_\tau\Big|_{t_*}^{\tau} + \int\limits_{t_*}^{\tau}\Big(-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x\Big)x_\lambda\lambda_\tau\,dt =$$

$$\overset{(\tau),(*)}{=} L(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) - L_{\dot{x}}(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,u(\tau,\xi).$$

При выводе мы воспользовались тем, что функции $x(\cdot,\lambda)$ — экстремали, т. е. удовлетворяют уравнению Эйлера.

Формула для $\dfrac{\partial S}{\partial \xi}$ выводится аналогично. Дифференцируя по ξ, получим

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} = \int\limits_{t_*}^{\tau}(L_x x_\lambda \lambda_\xi + L_{\dot{x}}\dot{x}_\lambda\lambda_\xi)\,dt = \int\limits_{t_*}^{\tau} L_x x_\lambda \lambda_\xi\,dt + \int\limits_{t_*}^{\tau} L_{\dot{x}}\,dx_\lambda \lambda_\xi =$$

$$= L_{\dot{x}} x_\lambda \lambda_\xi\Big|_{t_*}^{\tau} + \int\limits_{t_*}^{\tau}\Big(-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x\Big)x_\lambda\lambda_\xi dt \overset{(\xi),(*)}{=} L_{\dot{x}}(\tau,\xi,u(\tau,\xi)).$$

Таким образом, имеет место следующая формула для дифференциала функции S:

$$dS(\tau,\xi) = \frac{\partial S}{\partial \tau}d\tau + \frac{\partial S}{\partial \xi}d\xi =$$

$$= \Big(L(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) - L_{\dot{x}}(\tau,\xi,u(\tau,\xi))u(\tau,\xi)\Big)d\tau + L_{\dot{x}}(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi.$$

Основная формула Вейерштрасса

В частности, для произвольной функции $x(\cdot) \in PC^1([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^n)$ формула для дифференциала функции S примет вид:

$$dS(t, x(t)) = \Big(L\big(t, x(t), u(t, x(t))\big) - L_{\dot x}\big(t, x(t), u(t, x(t))\big) u(t, x(t))\Big) dt +$$

$$+ L_{\dot x}\big(t, x(t), u(t, x(t))\big)\, dx(t) =$$

$$= \Big(L\big(t, x(t), u(t, x(t))\big) + L_{\dot x}\big(t, x(t), u(t, x(t))\big)\big(\dot x(t) - u(t, x(t))\big)\Big) dt. \tag{1}$$

В таком виде мы ей и будем пользоваться в дальнейшем. Отметим также, что поскольку $u(t, \hat x(t)) = \dot{\hat x}(t)$, то из соотношения (1)

$$dS(t, \hat x(t)) = \hat L(t)\, dt. \tag{2}$$

Поэтому для допустимой экстремали $\hat x(\cdot)$ и для произвольной допустимой функции $x(\cdot)$ имеем равенство

$$J(\hat x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \hat L(t)\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} dS(t, \hat x(t)) = S(t_1, x_1) - S(t_0, x_0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} dS(t, x(t)).$$

Следовательно, по формуле (1)

$$J(x) - J(\hat x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot x(t))\, dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} dS(t, x(t)) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(L(t, x(t), \dot x(t)) - L(t, x(t), u(t, x(t))) - L_{\dot x}(t, x(t), u(t, x(t))) \times$$

$$\times \big(\dot x(t) - u(t, x(t))\big)\Big)\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}\big(t, x(t), u(t, x(t)), \dot x(t)\big)\, dt.$$

Эту формулу называют *основной формулой Вейерштрасса.*

1.4.7 Достаточные условия слабого экстремума

Теорема 3. *Пусть функция* $\hat{x} \in C^2([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^n)$ *— допустимая экстремаль в задаче* (P)*, интегрант* L *трижды непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности расширенного графика* $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}$ $(L \in C^3(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})))$*, на* $\hat{x}$ *выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби. Тогда* $\hat{x}$ *доставляет слабый локальный минимум* $(\hat{x} \in wlocmin\, P)$*. [АТФ, с. 377]*

1.4.8 Достаточные условия сильного экстремума

Теорема 4. *Пусть функция* $\hat{x} \in C^2([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^n)$ *— допустимая экстремаль в задаче* (P)*, интегрант* $L \in C^3(V \times \mathbb{R}^n)$*, где* $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *— некоторая окрестность графика* $\Gamma_{\hat{x}}$*, на* $\hat{x}$ *выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби, интегрант* L *является выпуклым по* $\dot{x}$ *на* V*. Тогда* $\hat{x}$ *доставляет сильный локальный минимум* $(\hat{x} \in strlocmin\, P)$*.*

Доказательство. Условия теоремы позволяют (см. п. 1.4.6) окружить $\hat{x}$ центральным полем экстремалей $x(\cdot, \lambda)$, покрывающем некоторую окрестность $U \subset V$ графика $\Gamma_{\hat{x}}$. Пусть $x \in PC^1([t_0,\, t_1])$ — произвольная допустимая функция, график Γ_x которой расположен в этой окрестности. Тогда по основной формуле Вейерштрасса п. 1.4.6

$$J(x) - J(\hat{x}) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}\big(t, x(t), u(t, x(t)), \dot{x}(t)\big)\, dt \geq 0,$$

поскольку L выпукло по $\dot{x}$ для $(t, x) \in U$, следовательно, $\mathcal{E}(t, x, u, \dot{x}) \geq 0\ \forall\ (u, \dot{x}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Значит, $J(x) \geq J(\hat{x})$, т. е. функция $\hat{x}$ доставляет сильный минимум. $\triangleright$

Рассмотрим случай, когда интегрант $L = L(\dot{x})$:

$$J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\dot{x}(t))\,dt \to \min;\ x(t_0) = x_0,\ \ x(t_1) = x_1. \qquad (P')$$

Теорема 4′. *Пусть* $\hat{x} \in DE(P')$, $L_{\dot{x}} \in C(\mathcal{O}(\hat{x}))$, *на* $\hat{x}$ *выполнено условие Вейерштрасса. Тогда* $\hat{x} \in \operatorname{absmin} P'$.

$\lhd$ Уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = 0 \Leftrightarrow L_{\dot{x}} = C \Leftrightarrow \dot{x} = C'.$$

На экстремали $\hat{x}$ выполняется условие Вейерштрасса $\Rightarrow$

$$\mathcal{E}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), u) = L(t, \hat{x}(t), u) - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - \hat{L}_{\dot{x}}(t)(u - \dot{\hat{x}}(t)) \geq 0 \quad \forall\ u \in \mathbb{R},\ \forall\ t \in [t_0, t_1]$$

$$\Longrightarrow L(u) - L(\dot{\hat{x}}) - C(u - \dot{\hat{x}}) \geq 0 \quad \forall\ u \in \mathbb{R}.$$

Возьмем произвольную допустимую функцию в задаче на сильный экстремум ($x \in D(P(S))$). Тогда

$$L(\dot{x}(t)) \geq L(\dot{\hat{x}}) + C(\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}})\ \forall\ t \in [t_0, t_1].$$

Проинтегрируем обе части неравенства:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} L(\dot{x}(t))\,dt \geq \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\dot{\hat{x}})\,dt + C\int\limits_{t_0}^{t_1} (\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}})\,dt$$

с учетом равенства $\int\limits_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\,dt = x(t_1) - x(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \dot{\hat{x}}\,dt \quad \forall\ x \in D(P(S))$. Получим,

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} L(\dot{x}(t))\,dt \geq \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\dot{\hat{x}})\,dt \iff J(x) \geq J(\hat{x}) \Rightarrow \hat{x} \in \operatorname{absmin} P'. \quad \rhd$$

1.4.9 Квадратичный функционал

Одномерный случай.

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления с квадратичным функционалом

$$J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (\underbrace{A\dot{x}^2 + 2C\dot{x}x + Bx^2}_{L})dt \to \min;\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \qquad (P')$$

где A, B, C — функции от t. Имеем:

$$J'(x)[h] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \big(L_{\dot{x}}\dot{h} + L_x h\big)dt = 2\int\limits_{t_0}^{t_1} \big(A\dot{x}\dot{h} + C\dot{h}x + C\dot{x}h + Bxh\big)\, dt,$$

$$J''(\hat{x})[h, h] = 2\int\limits_{t_0}^{t_1} (\underbrace{A\dot{h}^2 + 2C\dot{h}h + Bh^2}_{\tilde{L}})dt = 2J(h).$$

Интегрант квадратичного функционала $\tilde{L}(h) = A\dot{h}^2 + 2C\dot{h}h + Bh^2$ совпадает с L. Следовательно, уравнение Якоби — уравнение Эйлера для $\tilde{L}$ — совпадает с уравнением Эйлера исходной задачи.

Для квадратичных функционалов по формуле Тейлора имеет место равенство

$$J(\hat{x} + h) = J(\hat{x}) + J'(\hat{x})[h] + \frac{1}{2}J''(\hat{x})[h, h].$$

Если $\hat{x} \in DE(P)$, то как было показано в Главе 3, §1 $J'(\hat{x})[h] = 0$ $\forall\ h \in C_0^1[t_0, t_1]$, что эквивалентно уравнению Эйлера. Поскольку $J''(\hat{x})[h, h] = 2J(h)$, то на допустимой экстремали $\hat{x}$

$$J(\hat{x} + h) = J(\hat{x}) + J(h) \quad \forall\ h \in C_0^1[t_0, t_1]. \qquad (*)$$

Теорема 5. *Пусть $A, C \in C^1[t_0, t_1]$, $B \in C[t_0, t_1]$; выполнено усиленное условие Лежандра $\Rightarrow$ если выполнено усиленное условие Якоби, то допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет абсолютный минимум. Если же не выполнено условие Якоби, то значение задачи $S_{absmin} = -\infty$.*

$\triangleleft$ Существование допустимой экстремали. Если выполнено усиленное условие Якоби, то $\exists\ h_0, h_1$ — решения уравнения Эйлера (совпадающего для квадратичной задачи с уравнением Якоби), удовлетворяющие краевым условиям $h_1(t_0) = 0$, $h_1(t_1) = 1$, $h_0(t_1) = 0$, $h_0(t_0) = 1$. Тогда функция $\hat{x}(t) = h_0(t)x_0 + h_1(t)x_1$ является допустимой экстремалью.

Единственность. Если существует другая допустимая экстремаль $\overline{x} \in DE(P')$, $\overline{x} \neq \hat{x}$, то $h = \hat{x} - \overline{x} \not\equiv 0$ тоже является решением уравнения Якоби с условиями $h(t_0) = h(t_1) = 0$, что противоречит выполнению усиленного условия Якоби.

Экстремаль $\hat{x}$ можно (см. теорему о построении центрального поля экстремалей) окружить центральным полем экстремалей, покрывающем полосу $t_0 \leq t \leq t_1$, с функцией наклона поля $u(\tau, \xi)$.

Возьмем произвольную допустимую функцию $x(\cdot)$.Тогда по основной формуле Вейерштрасса

$$J(x) - J(\hat{x}) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, x(t), u(t, x(t)), \dot{x}(t))\, dt =$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \big(L(t, x, \dot{x}) - L(t, x, u) - L_{\dot{x}}(t, x, u)(\dot{x} - u)\big) dt =$$

$\big($поскольку для квадратичной функции по формуле Тейлора $L(\dot{x}) - L(u) - L'(u)(\dot{x} - u) = \frac{1}{2}L''(u)(\dot{x} - u)^2\big)$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, u)(\dot{x} - u)^2\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} A(t)(\dot{x} - u)^2\, dt \geq 0,$$

т. к. $A(t) > 0$ по усиленному условию Лежандра. Значит, $\hat{x} \in \operatorname{absmin} P'$.

Предположим, что не выполнено условие Якоби. Тогда функция $\bar{h} \equiv 0$ не доставляет абсолютный минимум в задаче

$$J(h) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \big(A\dot{h}^2 + 2C\dot{h}h + Bh^2\big)dt \to \min;\ h(t_0) = h(t_1) = 0 \ \ (P'')$$

(если $\bar{h} \equiv 0 \in \operatorname{absmin} P'' \Rightarrow$, то по теореме о необходимых условиях слабого минимума выполнено условие Якоби). Значит, $S_{\operatorname{absmin} P''} < 0$. Поэтому существует функция $h \in C_0^1([t_0,\, t_1])$ такая, что $J(h) < 0$. Но тогда в силу соотношения $(*)$

$$J(\hat{x} + \lambda h) = J(\hat{x}) + J(\lambda h) = J(\hat{x}) + \lambda^2 J(h) \to -\infty$$

при $\lambda \to +\infty$, т. е. $S_{\operatorname{absmin} P'} = -\infty$. $\triangleright$

Векторный случай

Рассмотрим задачу простейшую задачу вариационного исчисления с квадратичным функционалом для вектор-функций $x(\cdot) = (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot))$

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \big(\langle A\dot{x}, \dot{x}\rangle + 2\langle C\dot{x}, x\rangle + \langle Bx, x\rangle\big)dt \to \min;$$

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \qquad (P')$$

на слабый и сильный экстремум. Здесь $A(t), B(t), C(t)$ — матрицы порядка $n \times n$, A, B — симметричные матрицы[2].

Теорема 5. *Пусть в задаче (P') матрицы A и C непрерывно дифференцируемы, а B непрерывна; выполнено усиленное условие Лежандра. Тогда, если выполнено усиленное условие Якоби, то допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет абсолютный минимум. Если же не выполнено условие Якоби, то значение задачи равно $-\infty$ $(S_{absmin} = -\infty)$.*

Заметим, что по лемме о скруглении углов абсолютный минимум и сильный, и слабый совпадают.

Доказательство. Отметим вначале, что для квадратичных функционалов по формуле Тейлора имеет место равенство $J(\hat{x} + h) = J(\hat{x}) + J'(\hat{x})[h] + \dfrac{1}{2}J''(\hat{x})[h, h]$. Если $\hat{x}$ — допустимая экстремаль в задаче, то $J'(\hat{x})[h] = 0\ \forall\ h \in C_0^1([t_0, t_1])$

---

[2] Квадратичную относительно $2n$-мерного вектора $h = (x, y)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$) форму на пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ можно представить через симметрическую матрицу M размера $2n \times 2n$ в виде $Q(h) = \langle Mh, h\rangle$. Тогда матрицу M можно записать в виде $M = \begin{pmatrix} A & C^* \\ C & B \end{pmatrix}$, где матрицы A и B являются симметрическими, а матрица C не обязана быть симметрической. Значит, квадратичная форма запишется в виде $Q(h) = Q((x, y), (x, y)) = \left\langle \begin{pmatrix} A & C^* \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, (x, y) \right\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle C^*y, x\rangle + \langle Cx, y\rangle + \langle By, y\rangle = \langle Ax, x\rangle + 2\langle Cx, y\rangle + \langle By, y\rangle$.

(это соотношение, как было доказано ранее, эквивалентно уравнению Эйлера). Поскольку для квадратичных функционалов $\frac{1}{2}J''(\hat{x})[h,h] = J(h)$, то на экстремали $\hat{x}$ выполняется соотношение

$$J(\hat{x}+h) = J(\hat{x}) + J(h) \quad \forall\, h \in C_0^1([t_0,\, t_1]). \tag{$*$}$$

Предположим, что выполнено усиленное условие Якоби. Докажем существование допустимой экстремали и ее единственность. Обозначим $H(t,t_0)$, $H(t,t_1)$ — матричные решения уравнения Эйлера (совпадающего для квадратичной задачи с уравнением Якоби), удовлетворяющие краевым условиям $H(t_0,t_0) = 0$, $\dot{H}(t_0,t_0) = I$, $H(t_1,t_1) = 0$, $\dot{H}(t_1,t_1) = I$. Из усиленного условия Якоби вытекает, что матрицы $H(t,t_0)$ и $H(t,t_1)$ невырождены для $t \in (t_0,\, t_1]$ и $[t_0,\, t_1)$ соответственно и, значит, обратимы матрицы $H(t_1,t_0)$ и $H(t_0,t_1)$. Положим $H_0(t) = H(t,t_1)H^{-1}(t_0,t_1)$, $H_1(t) = H(t,t_0)H^{-1}(t_1,t_0)$. Тогда $H_0(t_0) = I$, $H_0(t_1) = 0$, $H_1(t_0) = 0$, $H_1(t_1) = I$, и, значит, $\hat{x}(t) = H_0(t)x_0 + H_1(t)x_1$ — допустимая экстремаль в задаче (P'). Эта экстремаль единственна, поскольку если бы существовала другая допустимая экстремаль $\overline{x}$, то функция $h = \hat{x} - \overline{x}$ была бы нетривиальным решением уравнения Якоби с граничными условиями $h(t_0) = h(t_1) = 0$, а это противоречит усиленному условию Якоби.

Экстремаль $\hat{x}$ можно (см. теорему о построении центрального поля экстремалей) окружить центральным полем экстремалей, покрывающем полосу $t_0 \le t \le t_1$ с функцией наклона поля $u(\tau,\xi)$. Возьмем произвольную допустимую функцию $x \in C^1([t_0,\, t_1])$. Тогда по основной формуле Вейерштрасса

$$J(x) - J(\hat{x}) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}(t, x(t), u(t,x(t)), \dot{x}(t))\, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(L(t,x,\dot{x}) - L(t,x,u(t,x)) - \big\langle L_{\dot{x}}(t,x,u(t,x)), \dot{x} - u(t,x) \big\rangle \Big) dt =$$

$\Big($для квадратичной функции $L(\dot{x}) - L(u) - L'(u)(\dot{x} - u) = \Big\langle \dfrac{1}{2} L''(u)(\dot{x} - u), (\dot{x} - u) \Big\rangle \Big)$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\langle \frac{1}{2} L_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, u)(\dot{x} - u), \dot{x} - u \Big\rangle \, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \big\langle A(t)(\dot{x} - u), \dot{x} - u \big\rangle \, dt \geq 0,$$

ибо $A(t)$ — положительно определенная матрица по усиленному условию Лежандра. Значит, функция $\hat{x} \in \operatorname{absmin} P'$.

Предположим, что не выполнено условие Якоби. Тогда функция $\bar{h} \equiv 0 \notin \operatorname{absmin} P''$ не доставляет абсолютный минимум в задаче

$$J(h(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \big(\langle A\dot{h}, \dot{h} \rangle + 2\langle C\dot{h}, h \rangle + \langle Bh, h \rangle \big) dt \to \min; \ h(t_0) = h(t_1) = 0 \qquad (P'')$$

(если $\bar{h} \equiv 0 \in \operatorname{absmin} P''$, то по теореме о необходимых условиях слабого минимума выполнено условие Якоби). Значит, $S_{\operatorname{absmin} P''} < 0$. Поэтому существует функция $h \in C_0^1([t_0, t_1])$ такая, что $J(h) < 0$. Но тогда в силу соотношения $(*)$ $J(\hat{x} + \lambda h) = J(\hat{x}) + J(\lambda h) = J(\hat{x}) + \lambda^2 J(h) \to -\infty$ при $\lambda \to +\infty$, т.е. $S_{\operatorname{absmin} P'} = -\infty$.

1.5 Теорема Боголюбова

Рассмотри простейшую задачу вариационного исчисления

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\big(t, x, \dot{x}\big)dt \to \min;\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1. \qquad (P)$$

Теорема. *Пусть* $L\colon \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ *— непрерывный интегрант,* $\tilde{L}(t, x, \cdot)$ *— вторая сопряженная (в смысле выпуклого анализа) функции* $\dot{x} \to L(t, x, \dot{x})$*. Рассмотрим задачу*

$$\tilde{J}(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \tilde{L}\big(t, x, \dot{x}\big)dt \to min;\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1. \qquad (\tilde{P})$$

Тогда $S_{absmin\, P} = S_{absmin\, \tilde{P}}$*. Более того, для любой допустимой функции* $x \in PC^1[t_0, t_1]$ *существует последовательность гладких допустимых функций* $\{x_k(\cdot) \in C^1[t_0, t_1]\}_{k \geq 1}$ *такая, что* $x_k(\cdot) \overset{C[t_0,t_1]}{\rightarrow} x(\cdot)$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty} J(x_k) = \tilde{J}(\hat{x})$*.*

1.6 Примеры

Пример 1. Исследуем с помощью условий второго порядка задачу, рассмотренную нами в п. 1.2:

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \dot{x}^3\, dt \to \min;\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

Мы выяснили ранее, что имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = t$, доставляющая слабый локальный минимум в задаче и не доставляющая сильного. При этом нами была построена последовательность допустимых (в задаче на сильный экстремум) функций $x_n \in PC^1([t_0,\, t_1])$, $x_n(\cdot) \to \hat{x}(\cdot)$ в метрике пространства $C([t_0,\, t_1])$, для которой $J(x_n(\cdot)) \to -\infty$ при $n \to \infty$.

Поскольку $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = 6\dot{\hat{x}}(t) = 6 > 0 \;\forall\, t \in [0,\, 1]$, то выполняется усиленное условие Лежандра.

Выпишем уравнение Якоби, которое является уравнением Эйлера по h для интегранта $\tilde{L} = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}^2 + 2\hat{L}_{\dot{x}x}\dot{h}h + \hat{L}_{xx}h^2 = 6\dot{h}^2$:

$$-\frac{d}{dt}\tilde{L}_{\dot{h}}(t) + \tilde{L}_h(t) = 0 \iff -\frac{d}{dt}12\dot{h} = 0 \iff \ddot{h} = 0.$$

Общее решение уравнения Якоби: $h = C_1 t + C_2$. Начальным условиям $h(0) = 0$, $\dot{h}(0) = 1$, удовлетворяет функция $\hat{h}(t) = t$. Эта функция не имеет нулей в полуинтервале $(0,\, 1]$. Значит, сопряженных точек нет, и стало быть выполнено усиленное условие Якоби. По теореме 3 выполнено достаточное условие слабого локального минимума, значит $\hat{x} \in \mathrm{wlocmin}$.

Поскольку функция $L = \dot{x}^3$ не выпукла по $\dot{x}$, то достаточное условие сильного минимума не выполняется. Проверим необходимое условие сильного минимума — условие Вейерштрасса:

$$E(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}, u) = L(t, \hat{x}, u) - L(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) - \hat{L}_{\dot{x}}(t)(u - \dot{\hat{x}}) = u^3 - \dot{\hat{x}}^3 - 3\dot{\hat{x}}^2(u - \dot{\hat{x}}) =$$

$$= u^3 - 1 - 3(u - 1) \geq 0 \ (?) \quad \forall\, u \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in [0,\, 1].$$

Оно не выполняется. Так как не выполняется необходимое условие, то функция $\hat{x}$ не доставляет сильного локального минимума.

Ответ. Единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = t \in \mathrm{wlocmin}$, $\hat{x} \notin \mathrm{strlocmin}$, $S_{\mathrm{absmin}} = -\infty$.

Пример 2.

Исследуем с помощью условий второго порядка задачу, рассмотренную нами в главе 3 п. 1.6 (пример 2):

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_0^{3\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \to \min;\ x(0) = x\Big(\frac{3\pi}{2}\Big) = 0.$$

Уравнение Эйлера: $\ddot{x} + x = 0$.

Мы выяснили ранее, что в задаче имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = 0$, не доставляющая даже слабого локального минимума в задаче. При этом нами была построена последовательность допустимых функций $x_\lambda(t) = \lambda \sin \dfrac{2t}{3}$, $x_\lambda(\cdot) \to \hat{x}(\cdot)$ в метрике пространства $C^1([0,\,1])$, для которых $J(x_\lambda(\cdot)) < 0 = J(\hat{x}(\cdot))$ и $S_{\text{absmin}} = -\infty$.

Поскольку $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = 2 > 0 \ \forall\ t \in \left[0,\, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, то выполняется усиленное условие Лежандра.

Выпишем уравнение Якоби, которое является уравнением Эйлера по h для интегранта $\tilde{L} = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}^2 + 2\hat{L}_{\dot{x}x}\dot{h}h + \hat{L}_{xx}h^2 = 2\dot{h}^2 - 2h^2$:

$$-\frac{d}{dt}\tilde{L}_{\dot{h}}(t) + \tilde{L}_h(t) = 0 \iff \ddot{h} + h = 0 \iff h = C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Начальным условиям $h(0) = 0$, $\dot{h}(0) = 1$, удовлетворяет функция $\hat{h}(t) = \sin t$. Эта функция в интервале $\left(0,\, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ обращается в ноль в точке $\tau = \pi$. Таким образом, в интервале $\left(0,\, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ имеется сопряженная точка, и стало быть не выполнено необходимое условие Якоби слабого локального минимума, значит, допустимая экстремаль $\hat{x}$ не доставляет в задаче слабый минимум, и тем более не доставляет сильный минимум.

Если воспользоваться теоремой 5 о необходимых и достаточных условиях экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления с квадратичным функционалом, то из того, что не выполнено условие Якоби, будет следовать, что абсолютный минимум в задача равен $-\infty$.

Уравнение Эйлера совпало с уравнением Якоби. Это не случайно. Так бывает, если интегрант исходной задачи является квадратичной функцией от $x, \dot{x}$.

Ответ. Единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = 0 \notin \text{wlocmin}$ и, тем более, $\hat{x} \notin \text{strlocmin}$, $S_{\text{absmin}} = -\infty$.

Пример 3 (*простейшая векторная задача ВИ, в которой допустимая экстремаль единственна и доставляет сильный экстремум*).

$$J(x(\cdot)) = J(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \int\limits_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2)\, dt \to \min;$$

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ x_1(1) = \sin 1,\ x_2(1) = -\sin 1.$$

Условие экстремума I порядка — *система уравнений Эйлера*:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = x_2, \\ \ddot{x}_2 = x_1, \end{cases} \Rightarrow x_1^{(4)} = x_1.$$

Последнему дифференциальному уравнению 4-ого порядка соответствует характеристическое уравнение $k^4 = 1$. Его корни $k_{1,2} = \pm 1$, $k_{3,4} = \pm i$. Поэтому общее решение дифференциального уравнения $x_1 = C_1 \operatorname{sh} t + C_2 \operatorname{ch} t + C_3 \sin t + C_4 \cos t$. Тогда $x_2 = \ddot{x}_1 = C_1 \operatorname{sh} t + C_2 \operatorname{ch} t - C_3 \sin t - C_4 \cos t$. Начальные условия:

$$\begin{cases} x_1(0) = C_2 + C_4 = 0, \\ x_2(0) = C_2 - C_4 = 0, \end{cases} \Rightarrow C_2 = C_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_1 \operatorname{sh} t + C_3 \sin t, \\ x_2 = C_1 \operatorname{sh} t - C_3 \sin t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(1) = C_1 \operatorname{sh} 1 + C_3 \sin 1 = \sin 1, \\ x_2(1) = C_1 \operatorname{sh} 1 - C_3 \sin 1 = -\sin 1, \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0,\ C_3 = 1.$$

Единственная допустимая экстремаль $\hat{x}_1 = \sin t$, $\hat{x}_2 = -\sin t$.

Условия экстремума II порядка.

Условие Лежандра. $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} = \begin{pmatrix} \hat{L}_{\dot{x}_1\dot{x}_1} & \hat{L}_{\dot{x}_1\dot{x}_2} \\ \hat{L}_{\dot{x}_2\dot{x}_1} & \hat{L}_{\dot{x}_2\dot{x}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Эта матрица положительно определена, следовательно, выполняется усиленное условие Лежандра.

Условие Якоби.

$$\hat{L}_{\dot{x}x} = \begin{pmatrix} \hat{L}_{\dot{x}_1x_1} & \hat{L}_{\dot{x}_1x_2} \\ \hat{L}_{\dot{x}_2x_1} & \hat{L}_{\dot{x}_2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{L}_{x_1\dot{x}_1} & \hat{L}_{x_1\dot{x}_2} \\ \hat{L}_{x_2\dot{x}_1} & \hat{L}_{x_2\dot{x}_2} \end{pmatrix} = \hat{L}_{x\dot{x}},$$

$$\hat{L}_{xx} = \begin{pmatrix} \hat{L}_{x_1x_1} & \hat{L}_{x_1x_2} \\ \hat{L}_{x_2x_1} & \hat{L}_{x_2x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратичный интегрант

$$\tilde{L}(t, h, \dot{h}) = \langle \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \dot{h}, \dot{h} \rangle + 2\langle \hat{L}_{x\dot{x}} \dot{h}, h \rangle + \langle \hat{L}_{xx} h, h \rangle =$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ {}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2\dot{h}_1^2 + 2\dot{h}_2^2 + 4h_1h_2 =$$

$$= 2L(t, h, \dot{h}).$$

Отметим, что для квадратичного функционала всегда $\tilde{L} = 2L$.

Система уравнений Якоби (система уравнений Эйлера для квадратичного интегранта $\tilde{L}$):

$$\begin{cases} \ddot{h}_1 = h_2, \\ \ddot{h}_2 = h_1, \end{cases} \Rightarrow h_1^{(4)} = h_1.$$

Ищем фундаментальную систему решений уравнения Якоби со столбцами — решениями уравнения Якоби — матрицу $H(t) = \big(h^1(t)\, h^2(t)\big) = \begin{pmatrix} h_1^1(t) & h_1^2(t) \\ h_2^1(t) & h_2^2(t) \end{pmatrix}$ такую, что $H(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — нулевая матрица, $\dot{H}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица. Для вектора $h^1(t) = \begin{pmatrix} h_1^1(t) \\ h_2^1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \operatorname{sh} t + C_2 \operatorname{ch} t + C_3 \sin t + C_4 \cos t \\ C_1 \operatorname{sh} t + C_2 \operatorname{ch} t - C_3 \sin t - C_4 \cos t \end{pmatrix}$, $\dot{h}^1(t) = \begin{pmatrix} C_1 \operatorname{ch} t + C_2 \operatorname{sh} t + C_3 \cos t - C_4 \sin t \\ C_1 \operatorname{ch} t + C_2 \operatorname{sh} t - C_3 \cos t + C_4 \sin t \end{pmatrix}$, должны выполняться граничные условия

$$\begin{cases} h_1^1(0) = C_2 + C_4 = h0, \\ h_2^1(0) = C_2 - C_4 = 0, \\ \dot{h}_1^1(0) = C_1 + C_3 = 1, \\ \dot{h}_2^1(0) = C_1 - C_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow C_2 = C_4 = 0,\ C_1 = C_3 = \tfrac{1}{2}.$$

Отсюда $h^1(t) = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{sh} t + \sin t}{2} \\ \frac{\operatorname{sh} t - \sin t}{2} \end{pmatrix}$. Аналогично находим: $h^2(t) = \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{sh} t - \sin t}{2} \\ \frac{\operatorname{sh} t + \sin t}{2} \end{pmatrix}$.

Сопряженные точки являются корнями уравнения

$$\det H(\tau) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{sh}\tau+\sin\tau}{2} & \frac{\operatorname{sh}\tau-\sin\tau}{2} \\ \frac{\operatorname{sh}\tau-\sin\tau}{2} & \frac{\operatorname{sh}\tau+\sin\tau}{2} \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$(\operatorname{sh}\tau+\sin\tau)^2-(\operatorname{sh}\tau-\sin\tau)^2 = 0 \iff \operatorname{sh}\tau\sin\tau = 0 \iff \tau = k\pi,\ k \in \mathbb{N}.$$

На полуинтервале $(0,\,1]$ нет сопряженных точек, следовательно, выполняется усиленное условие Якоби. По теореме 3 п. 1.4.7 вектор $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\sin t, -\sin t) \in \mathrm{wlocmin}$.

Условие Вейерштрасса — необходимое условие сильного минимума — выполняется:

$$\mathcal{E}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}, u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} L(t, \hat{x}, u) - L(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) - \left\langle L_{\dot{x}}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}), u - \dot{\hat{x}} \right\rangle =$$

$$= u_1^2 + u_2^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 - \dot{\hat{x}}_1^2 - \dot{\hat{x}}_2^2 - 2\hat{x}_1\hat{x}_2 - \left\langle \begin{pmatrix} 2\dot{\hat{x}}_1 \\ 2\dot{\hat{x}}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 - \dot{\hat{x}}_1 \\ u_2 - \dot{\hat{x}}_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= u_1^2 + u_2^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 - \dot{\hat{x}}_1^2 - \dot{\hat{x}}_2^2 - 2\dot{\hat{x}}_1(u_1 - \dot{\hat{x}}_1) - 2\dot{\hat{x}}_2(u_2 - \dot{\hat{x}}_2) =$$

$$= (u_1 - \dot{\hat{x}}_1)^2 + (u_2 - \dot{\hat{x}}_2)^2 \geq 0 \quad \forall\ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ t \in [0,\,1].$$

Выпуклость интегранта по $\dot{x}$. Функция $L(t, x, \dot{x}) = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2$ выпукла по $\dot{x}$, так как $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ — положительно определенная матрица для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^3$. По теореме 4 п. 1.4.8 вектор $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathrm{strlocmin}$. (Отметим, что из условия выпуклости интегранта L по $\dot{x}$ следует выполнение условия Вейерштрасса.)

Если воспользоваться теоремой 5 п. 1.4.9 для квадратичных функционалов, то можно было бы, проверив усиленные условия Лежандра и Якоби, сразу сказать, что $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathrm{absmin}$ (и слабый, и сильный).

$$S_{\mathrm{absmin}} = J(\hat{x}) = \int\limits_0^1 \left(2\cos^2 t - 2\sin^2 t\right) dt = 2\int\limits_0^1 \cos 2t\, dt = \sin 2t\Big|_0^1 = \sin 2.$$

Ответ. Единственная допустимая экстремаль $(\sin t, -\sin t) \in \mathrm{absmin}$, $S_{\mathrm{absmin}} = \sin 2$.