§3. Конечномерные гладкие задачи с равенствами и неравенствами

3.1 Постановка задачи

Пусть $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$. Считаем, что все функции f_i обладают определенной гладкостью.

Гладкая конечномерная экстремальная задача с ограничениями типа равенств и неравенств:

$$f_0(x) \to \min;\ f_i(x) \le 0,\ i = 1, \dots, m',\ f_i(x) = 0,\ i = m'{+}1, \dots, m. \qquad (P)$$

Для определенности рассматриваем задачи на минимум.

Функция Лагранжа задачи (P): $\mathscr{L}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$,

вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Теорема

Пусть $\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$, $f_i \in C^1(O(\hat{x}))$, $i = 0, 1, \ldots, m$.
Тогда $\exists\ \lambda \neq 0$: для $\mathscr{L}$ выполняются условия
a) стационарности:

$$\mathscr{L}'(\hat{x}) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) = 0 \right);$$

b) дополняющей нежесткости: $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m'$;
c) неотрицательности: $\lambda_i \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots, m'$.

Критические точки. В задаче на максимум $\lambda_0 \leq 0$.
Отметим, что ограничения типа равенств можно было бы не писать, заменив любое из равенств $f(x) = 0 \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 0$ двумя неравенствами $f(x) \leq 0$, $-f(x) \leq 0$.

Теорема

Пусть $\hat{x} \in \operatorname{locextr} P$, $f_i \in C^1(O(\hat{x}))$, $i = 0, 1, \dots, m$. Тогда $\exists\ \lambda \neq 0$: для $\mathscr{L}$ выполняются условия

a) стационарности: $\mathscr{L}'(\hat{x}) = 0$;

b) дополняющей нежесткости: $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0,\ i = 1, \dots, m'$;

c) неотрицательности: $\lambda_0 \geq 0$ на min, $\lambda_0 \leq 0$ на max; $\lambda_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m'$.

Пример 1. $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \to \min;\ 2x_1-x_2+x_3 \le 5,\ x_1+x_2+x_3=3.$

Решение. Функция Лагранжа

$$\mathscr{L} = \lambda_0(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\lambda_1(2x_1-x_2+x_3-5)+\lambda_2(x_1+x_2+x_3-3).$$

Необходимые условия локального минимума:

a) стационарности:

$$\mathscr{L}_x = 0 \iff \begin{cases} \mathscr{L}_{x_1} = 0, \\ \mathscr{L}_{x_2} = 0, \\ \mathscr{L}_{x_3} = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_0 x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_0 x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0; \end{cases}$$

b) дополняющей нежесткости: $\lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) = 0;$

c) неотрицательности: $\lambda_0 \ge 0,\ \lambda_1 \ge 0.$

Если $\lambda_0 = 0 \overset{a}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ — все множители Лагранжа — нули, а этого быть не может $\Rightarrow \lambda_0 \ne 0$, полагаем $\lambda_0 = \frac{1}{2}$.

Пример 1. $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \to \min;\ 2x_1-x_2+x_3 \le 5,\ x_1+x_2+x_3=3.$

$$\begin{cases} x_1+2\lambda_1+\lambda_2=0, \\ x_2-\lambda_1+\lambda_2=0, \\ x_3+\lambda_1+\lambda_2=0, \end{cases} \iff \begin{cases} x_1=-2\lambda_1-\lambda_2, \\ x_2=\lambda_1-\lambda_2, \\ x_3=-\lambda_1-\lambda_2. \end{cases}$$

Предположим $\lambda_1=0 \Rightarrow x_1=x_2=x_3=-\lambda_2$. Подставляя $x_i=-\lambda_2$ в равенство получаем: $-3\lambda_2=3 \Leftrightarrow \lambda_2=-1$ $\Rightarrow x_1=x_2=x_3=1$ — критическая точка.

Пусть $\lambda_1 \ne 0 \overset{b}{\Rightarrow}\ 2x_1-x_2+x_3-5=0$. Подставим x_1, x_2, x_3 в уравнения $x_1+x_2+x_3=3,\ 2x_1-x_2+x_3=5$:

$$\begin{cases} -2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_1-\lambda_2-\lambda_1-\lambda_2=3, \\ -4\lambda_1-2\lambda_2-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_1-\lambda_2=5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda_1-3\lambda_2=3, \\ -6\lambda_1-2\lambda_2=5, \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_1=-9/14<0$ — противоречие с условием неотрицательности $c \Rightarrow$ при $\lambda_1 \ne 0$ критических точек нет.

Пример 1. $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \to \min;\ 2x_1-x_2+x_3 \le 5,\ x_1+x_2+x_3=3.$

$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to +\infty$ при $|x| \to \infty \Rightarrow$ по следствию из теоремы Вейерштрасса абсолютный минимум достигается, а в силу единственности критической точки решением может быть только она.

Ответ. $\hat{x} = (1, 1, 1) \in \text{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = 3$.

Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — симметрическая матрица,
$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \langle Ax, x \rangle$ — квадратичная форма.

Теорема

В $\mathbb{R}^n$ $\exists$ ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, f_i \rangle^2.$$

В базисе $f_1, \ldots, f_n$ матрица формы Q диагональна.
$f_1, \ldots, f_n$ — главные оси формы Q, а переход к базису $f_1, \ldots, f_n$ называется приведением формы к главным осям.

Теорема. В $\mathbb{R}^n$ $\exists$ о.н.б. $f_1, \ldots, f_n : Q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, f_i \rangle^2$.

$\lhd$ Если $Q \equiv 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, $f_1, \ldots, f_n$ — любая о.н.с.
Если $Q \not\equiv 0 \Rightarrow$ $\exists\, x : Q(x) < 0$ или $Q(x) > 0$.

$$\langle Ax, x \rangle \to \min; \quad \langle x, x \rangle \leq 1. \qquad (P_1)$$

По т. Вейерштрасса $\exists\, \hat{x} =: f_1 \in \operatorname{absmin} P_1$; $S_{\text{absmin}} < 0$.
Функция Лагранжа $\mathscr{L} = \lambda_0 \langle Ax, x \rangle + \lambda(\langle x, x \rangle - 1)$.
Необходимые условия минимума в $\hat{x} = f_1$:
a) стационарности: $\mathscr{L}_x(f_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 A f_1 + \lambda f_1 = 0$,
b) дополняющей нежесткости: $\lambda(\langle f_1, f_1 \rangle - 1) = 0$;
c) неотрицательности: $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda \geq 0$.

$\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda \neq 0 \overset{a}{\Rightarrow} f_1 = 0 \not\Rightarrow b$.

$\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_0 = 1 \overset{a}{\Rightarrow} A f_1 = -\lambda f_1$. Умножим на $f_1 \Rightarrow$
$\langle A f_1, f_1 \rangle = -\lambda \langle f_1, f_1 \rangle = S_{\text{absmin}} < 0 \Rightarrow \lambda > 0 \overset{b}{\Rightarrow} \langle f_1, f_1 \rangle = 1$.
Таким образом, f_1 — собственный вектор матрицы A:
$A f_1 = \lambda_1 f_1$ $(\lambda_1 = -\lambda)$, $|f_1| = 1$, $S_{\text{absmin}} = \lambda_1$,
λ_1 — минимальное собственное значение A.

$L_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, f_1 \rangle = 0\}$. Если $Q(x) = 0 \ \forall\ x \in L_1$
$\Rightarrow \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, $f_2, \ldots, f_n$ — любая о.н.с. из L_1.
Если $Q \not\equiv 0$ на $L_1 \Rightarrow$ $\exists\ x \in L_1 : Q(x) > 0$ или $Q(x) < 0$.

$$\langle Ax, x \rangle \to \max; \quad \langle x, x \rangle \le 1, \ \langle x, f_1 \rangle = 0. \qquad (P_2)$$

По т. Вейерштрасса $\exists\ \hat{x} =: f_2 \in \text{absmax}\, P_2$ ($B \cap L_1$ — компакт).
Ф-я Лагранжа $\mathscr{L} = \lambda_0 \langle Ax, x \rangle + \lambda(\langle x, x \rangle - 1) + 2\mu \langle x, f_1 \rangle$. НУ
a) стационарности: $\mathscr{L}_x(f_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 A f_2 + \lambda f_2 + \mu f_1 = 0$;
b) дополняющей нежесткости: $\lambda(\langle f_2, f_2 \rangle - 1) = 0$;
c) неотрицательности: $\lambda_0 \le 0$ (задача на max!), $\lambda \ge 0$.

$$\lambda_0 = 0 \overset{a}{\Rightarrow} \lambda f_2 + \mu f_1 = 0 \overset{f_1, f_2 - \text{лин. незав.}}{\Longrightarrow} \lambda = \mu = 0.$$

$$\lambda_0 \ne 0,\ \lambda_0 = -1 \overset{a}{\Rightarrow} A f_2 = \lambda f_2 + \mu f_1.$$ Умножим на $f_1 \Rightarrow$

$$\langle A f_2, f_1 \rangle = \lambda \langle f_2, f_1 \rangle + \mu \langle f_1, f_1 \rangle \overset{f_2 \perp f_1}{=} \mu \langle f_1, f_1 \rangle \overset{|f_1| = 1}{=} \mu \Rightarrow$$

$$\mu = \langle A f_2, f_1 \rangle = \langle f_2, A f_1 \rangle = \langle f_2, \lambda_1 f_1 \rangle \overset{f_2 \perp f_1}{=} 0 \overset{a}{\Rightarrow} A f_2 = \lambda f_2.$$

Умножим на $f_2 \Rightarrow \langle A f_2, f_2 \rangle = \lambda \langle f_2, f_2 \rangle = S_{\text{absmax}} > 0 \Rightarrow \lambda > 0$
$\overset{b}{\Rightarrow} \langle f_2, f_2 \rangle = 1 \Rightarrow f_2$ — собственный вектор матрицы A,
$A f_2 = \lambda_2 f_2$ $(\lambda_2 = \lambda)$, $|f_2| = 1$, $f_1 \perp f_2$.

Теорема. В $\mathbb{R}^n$ $\exists$ о.н.б. $f_1, \dots, f_n : Q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, f_i \rangle^2$.

$L_2 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, f_1 \rangle = 0, \ \langle x, f_2 \rangle = 0\}$.

Если $Q(x) = 0 \ \forall \ x \in L_2$, то $\lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$, $f_3, \dots, f_n$ — любая о.н.с. из L_2. Если $Q \not\equiv 0$ на L_2, то Q на L_2 принимает положительные или отрицательные значения.

Вновь рассматриваем задачу на максимум или минимум:

$$\langle Ax, x \rangle \to \text{extr}; \quad \langle x, x \rangle \leq 1, \ \langle x, f_1 \rangle = \langle x, f_2 \rangle = 0. \qquad (P_3)$$

Решая, получаем $\exists \ f_3 : Af_3 = \lambda_3 f_3$, $|f_3| = 1$, $f_3 \perp f_1, f_2$.

В итоге придем к о.н.б. $f_1, \dots, f_n$ из собственных векторов матрицы A с собственными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ разлагается по о.н.б. $f_1, \dots, f_n$:

$x = \sum\limits_{i=1}^n \langle x, f_i \rangle f_i \Rightarrow Ax = \sum\limits_{i=1}^n \langle x, f_i \rangle Af_i = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i \langle x, f_i \rangle f_i$ и, значит,

$$Q(x) = \langle Ax, x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, f_i \rangle f_i, \sum_{j=1}^n \langle x, f_j \rangle f_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, f_i \rangle^2. \ \triangleright$$