4 Изопериметрическая задача

4.1 Постановка задачи

Изопериметрической задачей в вариационном исчислении называется следующая экстремальная задача в пространстве $C^1([t_0,\, t_1])$:

$$J_0(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \text{extr}; \qquad (P)$$

$$J_i(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt = \alpha_i,\ i = 1, \dots, m, \qquad (1)$$

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, \qquad (2)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ — заданные числа.

Отрезок $[t_0,\, t_1]$ является фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$. Ограничения вида (1) называются *изопериметрическими.* Экстремум в задаче рассматривается среди функций $x \in C^1([t_0,\, t_1])$, удовлетворяющих изопериметрическим условиям (1) и условиям (2) на концах; такие функции называются *допустимыми.*

Определение. Говорим, что допустимая функция $\hat{x}$ доставляет *слабый локальный минимум* в задаче (P), и пишем $\hat{x} \in \operatorname{wlocmin} P$, если существует $\delta > 0$ такое, что $J_0(x(\cdot)) \geq J_0(\hat{x}(\cdot))$ для любой допустимой функции x, для которой $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1([t_0,t_1])} < \delta$.

4.2 Необходимое условие экстремума

Теорема. *Пусть функция $\hat{x}$ доставляет слабый локальный экстремум в задаче (P) ($\hat{x} \in \operatorname{wlocextr} P$), функции $f_i, f_{ix}, f_{i\dot{x}}$, $i = 0, 1, \dots, m$, — непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}$ ($f_i, f_{ix}, f_{i\dot{x}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}))$).*

Тогда существует вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\lambda \neq 0$, такой, что для лагранжиана $L = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x})$ выполняется условие гладкости $\hat{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0,\, t_1])$ и выполнено уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\ t \in [t_0,\, t_1].$$

Доказательство. Выпишем вариацию по Лагранжу функционала $J(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x})\, dt$, найденную нами при выводе необходимых условий в простейшей задаче вариационного исчисления (п. 1.3)

$$\delta J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \big(\hat{f}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \hat{f}_x(t)h(t)\big)\, dt, \quad h \in C_0^1([t_0,\, t_1]).$$

Рассмотрим линейное отображение A функционального пространства $C_0^1([t_0,\, t_1])$ в конечномерное пространство $\mathbb{R}^{m+1}$ ($A\colon C_0^1([t_0,\, t_1]) \to \mathbb{R}^{m+1}$), действующее по формуле

$$Ah := (\delta J_0(\hat{x}, h), \delta J_1(\hat{x}, h), \ldots, \delta J_m(\hat{x}, h)).$$

Возможны два случая:

1) $\operatorname{Im} A \neq \mathbb{R}^{m+1}$, т. е. A — отображение на часть пространства $\mathbb{R}^{m+1}$ (вырожденный случай);

2) $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^{m+1}$, т. е. A — отображение на все пространство $\mathbb{R}^{m+1}$ (невырожденный случай).

1) *Вырожденный случай.* Пусть $\operatorname{Im} A \neq \mathbb{R}^{m+1}$. Образ линейного пространства при линейном отображении является подпространством. Значит, в этом случае $\operatorname{Im} A$ есть подпространство в $\mathbb{R}^{m+1}$ размерности, не превышающей m. Погрузим его в какое-нибудь подпространство размерности m (гиперплоскость в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$). Следовательно, по определению гиперплоскости найдутся числа $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$, не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i z_i = 0 \ \forall\ z \in \operatorname{Im} A \iff \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \delta J_i(\hat{x}, h) = 0 \ \forall\ h \in C_0^1([t_0,\, t_1]).$$

Откуда из явного вида для $\delta J_i(\hat{x}, h)$ имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \bigg(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{f}_{i\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{f}_{ix}(t)h(t)\bigg)\, dt = 0 \quad \forall\ h \in C_0^1([t_0,\, t_1]).$$

Тогда из леммы Дюбуа-Реймона следует, что для лагранжиана $L = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x})$ выполняется условие гладкости $\hat{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0,\, t_1])$ и выполнено уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\, t \in [t_0,\, t_1].$$

2) *Невырожденный случай.* Пусть $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^{m+1}$. Покажем, что невырожденный случай невозможен. Тем самым теорема будет полностью доказана.

Возьмем $e_0 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_m = (0, \ldots, 0, 1)$ — канонический базис в $\mathbb{R}^{m+1}$. Поскольку образ отображения A пространство $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^{m+1}$, то существуют функции $h_j \in C_0^1([t_0,\, t_1])$ такие, что $Ah_j = e_j$, $j = 0, 1, \ldots, m$, то есть $\delta J_i(\hat{x}, h_j) = \delta_{ij}$ $\left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j, \\ 0, \ i \neq j, \end{cases} \right.$ — символ Кронекера $\Big)$.

Рассмотрим функцию $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$, действующую по формуле

$$F(\beta) = \left(J_0\Big(\hat{x} + \sum_{j=0}^{m} \beta_j h_j\Big), \ldots, J_m\Big(\hat{x} + \sum_{j=0}^{m} \beta_j h_j\Big) \right).$$

Нетрудно проверить, что в силу заданных условий гладкости функций f_i построенная функция F непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $\hat{\beta} = 0$ и

$$F(\hat{\beta}) = (J_0(\hat{x}), \ldots, J_m(\hat{x})) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \hat{\alpha} \ \ (\alpha_0 := J_0(\hat{x}).$$

Поскольку якобиан отображения F не равен нулю как определитель единичной матрицы $(F'(0) = (\delta J_i(\hat{x}, h_j))_{i,j=0}^{m} = I$ — единичная матрица), то по теореме об обратной функции существует обратное отображение F^{-1} некоторой окрестности точки $\hat{\alpha}$ в окрестность точки $\hat{\beta} = F^{-1}(\hat{\alpha}) = 0$ такое, что

$$|F^{-1}(\alpha) - F^{-1}(\hat{\alpha})| \leq K|\alpha - \hat{\alpha}| \iff |F^{-1}(\alpha)| \leq K|\alpha - \hat{\alpha}|$$

с некоторой константой $K > 0$.

Возьмем $\alpha = \alpha(\varepsilon) = (\alpha_0 + \varepsilon, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ при достаточно малом ε и обозначим $\beta(\varepsilon) = F^{-1}(\alpha(\varepsilon))$. Тогда $F(\beta(\varepsilon)) = \alpha(\varepsilon)$, т. е.

$$J_0\Big(\hat{x}(\cdot)+\sum_{j=0}^{m}\beta_j(\varepsilon)h_j(\cdot)\Big)= \alpha_0+\varepsilon,\ J_i\Big(\hat{x}(\cdot)+\sum_{j=0}^{m}\beta_j(\varepsilon)h_j(\cdot)\Big)= \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

при этом

$$|F^{-1}(\alpha)| \le K|\alpha - \hat{\alpha}| \iff |\beta(\varepsilon)| \le K|\varepsilon|.$$

Получилось, что в любой окрестности экстремальной функции $\hat{x}$ в пространстве $C^1([t_0,\, t_1])$ существует допустимая функция (а именно $\hat{x}(\cdot) + \sum\limits_{j=0}^{m}\beta_j(\varepsilon)h_j(\cdot)$), на которой значение функционала может быть и больше (при $\varepsilon > 0$), и меньше (при $\varepsilon < 0$) чем на $\hat{x}$. Пришли к противоречию, что $\hat{x}$ не доставляет локального экстремума. Таким образом, случай 2) невозможен.

4.3 Пример

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr};\ \int\limits_0^1 x\,dt = 0,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

Решение. Лагранжиан $L = \lambda_0\dot{x}^2 + \lambda_1 x$.

Необходимое условие экстремума — уравнение Эйлера для лагранжиана L

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \iff -\frac{d}{dt}2\lambda_0\dot{x} + \lambda_1 = 0 \iff -2\lambda_0\ddot{x} + \lambda_1 = 0.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_1 = 0$ — все множители Лагранжа — нули. Этого не может быть. Положим $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Тогда $\ddot{x} = \lambda_1$. Общее решение этого дифференциального уравнения: $x = C_1t^2 + C_2t + C_3$. Неизвестные константы C_1, C_2, C_3 находим из условий на концах и изопериметрических условий:

$x(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$,

$x(1) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1$,

$\int\limits_0^1 x\,dt = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 (C_1t^2 + C_2t)\,dt = 0 \Rightarrow \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{2} = 0.$

Отсюда $C_1 = 3$, $C_2 = -2$. Таким образом, в задаче имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = 3t^2 - 2t$.

Покажем с помощью непосредственной проверки, что найденная допустимая экстремаль $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум в задаче. Возьмем функцию $h \in C^1([0,\,1])$ такую, чтобы $\hat{x}+h$ была допустимой функцией. Для этого надо взять функцию h такую, что $\int\limits_0^1 h\,dt = 0$ и $h(0) = h(1) = 0$. Тогда в силу равенства

$$J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) = J(h) \quad \forall\, h \in C^1([0,\,1]),\ \int\limits_0^1 h\,dt = 0,\ h(0) = h(1) = 0,$$

для квадратичного функционала J на экстремали $\hat{x}$ имеем

$$J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) = \int\limits_0^1 \dot{h}^2\,dt \geq 0.$$

Таким образом, разность всегда неотрицательна, то есть $\hat{x} \in \text{absmin}$,

$$S_{\text{absmin}} = \int\limits_0^1 \dot{\hat{x}}^2\, dt = \int\limits_0^1 (6t-2)^2\, dt = \frac{36t^3}{3} - \frac{24t^2}{2} + 4t\Big|_0^1 = 12-12+4 = 4.$$

Покажем, что $S_{\text{absmax}} = +\infty$. Действительно, возьмем последовательность допустимых функций $x_n(\cdot) = \hat{x}(\cdot) + nh(\cdot)$, $h \not\equiv 0$. Для того, чтобы последовательность функций была допустима необходимо, чтобы $h \in C_0^1([0,\, 1])$, $\int\limits_0^1 h\, dt = 0$, например, возьмем $h(t) = \sin 2\pi t$. Тогда

$$J(x_n(\cdot)) = \int\limits_0^1 \dot{x}_n^2(t)\, dt = \int\limits_0^1 \big(\dot{\hat{x}}(t) + n\dot{h}(t)\big)^2\, dt \to +\infty \quad \text{при } n \to +\infty.$$

Ответ. Допустимая экстремаль $3t^2 - 2t \in \text{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = 4$, $S_{\text{absmax}} = +\infty$.

4.4 Задача Дидоны

Одними из первых задач на отыскание наибольших и наименьших величин являлись изопериметрические задачи известные еще с древних времен о нахождении замкнутой кривой, имеющей заданную длину и охватывающую наибольшую площадь, и о нахождении пространственной замкнутой поверхности, имеющей заданную площадь и охватывающей наибольший об'ем. Еще до Аристотеля (IV век до н. э.) было известно, что среди изопериметрических (имеющих равную длину) кривых наиболее вместимой является окружность, а среди изопифанных (имеющих равную площадь) поверхностей — сфера.

Изопериметрическая задача содержится также в легенде о царице Дидоне. Описываемые события легенда относит к 825 году до н. э.

Финикийская царица Дидона и с ней небольшая часть жителей города Тира, спасаясь от преследований, покинули родной город и в поисках счастья отправились на кораблях на запад вдоль берегов Средиземного моря. Выбрав на африканском побережье удобное место (нынешний Тунисский залив), Дидона и ее спутники решили основать здесь город. Эта идея не понравилась местным жителям, но все же финикийской царице удалось уговорить их предводителя Ярба, и он простодушно и неосторожно согласился уступить Дидоне клочок земли, "который можно окружить бычьей шкурой". Хитрая финикиянка, разрезав шкуру на тонкие ремни, связала их в один длинный ремень и, окружив им значительную территорию, заложила на ней город Карфаген. В память об этой истории карфагенская цитадель получила название Бирса (шкура).

Из истории город Карфаген помнится нам еще войнами с Римом за обладание господством на Средиземном море (Пунические войны III–II век до н. э.), которые завершились взятием римлянами Карфагена и его разрушением.

Мы видим, что Дидона "решала" классическую изопериметрическую задачу о наибольшей вместимости. Естественно считать, что Дидона хотела сохранить выход к морю. Тогда мы получаем *первую задачу Дидоны.* Среди всех кривых длины l с концами на фиксированной прямой (прямолинейный берег), найти ту, которая ограничивает фигуру наибольшей площади. Формализованная задача имеет вид:

$$\int\limits_{-T}^{T} x\,dt \to \max; \ \int\limits_{-T}^{T} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt = l, \ x(-T) = x(T) = 0$$

(здесь T — подвижный конец). Эта задача относится к типу задач Лагранжа (см. § 6).

Давайте решим *вторую задачу Дидоны*, в которой оба конца кривой закреплены на прямой. Формализованная вторая задача Дидоны имеет вид:

$$\int\limits_{-T_0}^{T_0} x\,dt \to \max; \ \int\limits_{-T_0}^{T_0} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt = l, \ x(-T_0) = x(T_0) = 0$$

(здесь T_0 — фиксировано). Это — задача, укладывающаяся в схему изопериметрических задач п. 4.1. Приведем ее решение с помощью вариационного исчисления.

Лагранжиан $L = \lambda_0 x + \lambda\sqrt{1+\dot{x}^2}$.

Необходимое условие — уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \iff -\frac{d}{dt}\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} + \lambda_0 = 0.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda \neq 0$ (не все множители Лагранжа — нули) и, значит, из уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dt}\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = 0 \Longrightarrow \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = \mathrm{const} \Longrightarrow \dot{x} = \mathrm{const}.$$

Тогда из условий на концах и изопериметрического условия следует, что $\hat{x} \equiv 0$, $l = 2T_0$.

Если $\lambda_0 \neq 0$, то положим $\lambda_0 = 1$. Тогда из уравнения Эйлера вытекает, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = 1 \iff \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = t + C_1.$$

Возведя последнее уравнение в квадрат, выразим $\dot{x}$:

$$\frac{\lambda^2\dot{x}^2}{1+\dot{x}^2} = (t+C_1)^2 \iff \lambda^2\dot{x}^2 = (t+C_1)^2(1+\dot{x}^2)$$

$$\iff \dot{x}^2\big(\lambda^2-(t+C_1)^2\big)=(t+C_1)^2 \iff$$

$$\dot{x}^2=\frac{(t+C_1)^2}{\lambda^2-(t+C_1)^2} \iff \dot{x}=\frac{t+C_1}{\pm\sqrt{\lambda^2-(t+C_1)^2}}.$$

Проинтегрировав по t полученное уравнение, имеем:

$$x=\mp\sqrt{\lambda^2-(t+C_1)^2}+C_2 \iff (x-C_2)^2+(t+C_1)^2=\lambda^2.$$

Это уравнение окружности. Из условий на концах $x(-T_0)=x(T_0)$ следует, что $C_1=0$, т. е. $t^2+(x+C_2)^2=\lambda^2$.

Неизвестные константы C_2,λ определяются единственным образом (λ с точностью до знака) из условия $x(T_0)=0$ и изопериметрического условия.

При $2T_0<l\leq \pi T_0$ имеется единственная (с точностью до знака) экстремаль, являющаяся дугой длины l окружности, проходящей через точки $(\pm T_0,0)$, с центром на оси x. Поскольку у нас задача на максимум, то мы выбираем экстремаль, лежащую в верхней полуплоскости. При $l<2T_0$ в задаче нет допустимых функций, при $l>\pi T_0$ нет допустимых экстремалей. Можно показать, что в этом случае решением будет полуокружность, "поднятая"на высоту $\frac{l-\pi T_0}{2}$ вместе с двумя вертикальными отрезками этой длины.