$$J_0(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \mathrm{extr}; \qquad (P)$$

$$J_i(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt = \alpha_i, \ \ i = 1, \ldots, m, \qquad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \ \ x(t_1) = x_1, \qquad (2)$$

где $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — заданные числа.
Изопериметрические условия (1).
Условия на концах (2). Допустимые функции, $D(P)$.

**Определение**

Допустимая функция $\hat{x}$ доставляет слабый локальный минимум в задаче $(P)$ ($\hat{x} \in \mathrm{wlocmin}\, P$), если $\exists\ \delta > 0$ : $J_0(x(\cdot)) \geq J_0(\hat{x}(\cdot))\ \forall\ x(\cdot) \in D(P)$ : $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1[t_0,t_1]} < \delta$.

**Теорема**

$\hat{x} \in \mathrm{wlocextr}\, P$, $f_i, f_{ix}, f_{i\dot{x}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}))$, $i = 0, 1, \ldots, m$

$\Rightarrow \exists\ \lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \neq 0$ : для лагранжиана $L = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, \dot{x})$

$\hat{L}_{\dot{x}} \in C^1[t_0, t_1]$ и выполнено уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\ t \in [t_0, t_1].$$

$\triangleleft$ Для $J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x})dt$

вариация по Лагранжу $\delta J(\hat{x}, h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\hat{f}_{\dot{x}}\dot{h} + \hat{f}_x h\right)dt.$

Рассмотрим линейное отображение $A\colon\, C_0^1[t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{m+1}$ :

$$Ah := \left(\delta J_0(\hat{x}, h), \delta J_1(\hat{x}, h), \ldots, \delta J_m(\hat{x}, h)\right).$$

Возможны два случая: $\operatorname{Im} A \neq \mathbb{R}^{m+1}$; $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^{m+1}$.

1) Вырожденный случай. $\operatorname{Im} A \neq \mathbb{R}^{m+1} \Rightarrow \operatorname{Im} A$ содержится в гиперплоскости пространства $\mathbb{R}^{m+1} \Rightarrow \exists\ \lambda \neq 0$ :

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i z_i = 0\ \forall\ z \in \operatorname{Im} A \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \delta J_i(\hat{x}, h) = 0\ \forall\ h \in C_0^1.$$

Откуда из явного вида для $\delta J_i(\hat{x}, h)$ имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{f}_{i\dot{x}}\right)\dot{h} + \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{f}_{ix}\right)h\right)dt = 0\ \forall\ h \in C_0^1.$$

Тогда по лемме Дюбуа-Реймона для лагранжиана $L = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i$

$\hat{L}_{\dot{x}} \in C^1$ и $-\dfrac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x = 0.$

2) Невырожденный случай. $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^{m+1} \Rightarrow \exists\, h_j \in C_0^1[t_0, t_1]$ : $Ah_j = e_j$ ($e_j$ — канонический базис), $j = 0, 1, \ldots, m$, т. е. $\delta J_i(\hat{x}, h_j) = \delta_{ij}$. Рассмотрим функцию $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$,

$$F(\beta) := \left( J_0\left(\hat{x} + \sum_{j=0}^{m} \beta_j h_j\right), \ldots, J_m\left(\hat{x} + \sum_{j=0}^{m} \beta_j h_j\right) \right).$$

Тогда $F \in C^1(\mathcal{O}(\hat{\beta} = 0))$ и $F(\hat{\beta}) = (J_0(\hat{x}), \ldots, J_m(\hat{x})) =$ $= (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) =: \hat{\alpha}$ $(\alpha_0 := J_0(\hat{x}))$. Поскольку якобиан

$$\det F'(0) = \det \left( \frac{\partial F_i(0)}{\partial \beta_j} \right) = \det \left( \delta J_i(\hat{x}, h_j) \right) = \det \left( \delta_{ij} \right) = \det I \neq 0,$$

как определитель единичной матрицы, то по т. об обратной функции $\exists\, F^{-1} : \mathcal{O}(\hat{\alpha}) \to \mathcal{O}(\hat{\beta})$, $F^{-1}(\hat{\alpha}) = \hat{\beta} = 0$ и

$$|F^{-1}(\alpha) - F^{-1}(\hat{\alpha})| \le K|\alpha - \hat{\alpha}| \Leftrightarrow |F^{-1}(\alpha)| \le K|\alpha - \hat{\alpha}|$$

с некоторой константой $K > 0$.

2) Невырожденный случай. $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^{m+1}$. $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$,

$$F(\beta) := \left( J_0\Big(\hat{x} + \sum_{j=0}^{m} \beta_j h_j\Big), \dots, J_m\Big(\hat{x} + \sum_{j=0}^{m} \beta_j h_j\Big) \right).$$

$F(\hat{\beta} = 0) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m) =: \hat{\alpha}$, $\alpha_0 := J_0(\hat{x})$.
$F^{-1} : \mathcal{O}(\hat{\alpha}) \to \mathcal{O}(\hat{\beta})$, $|F^{-1}(\alpha)| \le K|\alpha - \hat{\alpha}|$.
В частности, для достаточно малого по модулю $\varepsilon$ определен $\beta(\varepsilon) := F^{-1}(\alpha_0 + \varepsilon, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$, для которого $|\beta(\varepsilon)| \le K|\varepsilon|$.
Тогда $F(\beta(\varepsilon)) = (\alpha_0 + \varepsilon, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

Значит, для функции $x_\varepsilon(\cdot) = \hat{x}(\cdot) + \sum\limits_{j=0}^{m} \beta_j(\varepsilon) h_j(\cdot)$

$$J_0\big(x_\varepsilon(\cdot)\big) = \alpha_0 + \varepsilon, \;\; J_i\big(x(\varepsilon)\big) = \alpha_i, \;\; i = 1, \dots, m.$$

Отсюда $\hat{x}(\cdot) \notin \operatorname{locextr} P$, ибо вблизи нее $\exists\, x_\varepsilon(\cdot) \in D(P)$, на которых $J_0(x_\varepsilon) = J_0(\hat{x}) + \varepsilon \lesseqgtr J_0(\hat{x})$, т. е. $J_0(x_\varepsilon(\cdot))$ принимает значения как большие так и меньшие чем $J_0(\hat{x})$.
Получили противоречие с тем, что $\hat{x} \in \operatorname{locextr} P$.
Таким образом, случай 2) невозможен. $\triangleright$

## Пример. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \text{extr};\ \int\limits_0^1 x\,dt = 0,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$

Уравнение Эйлера для лагранжиана $L = \lambda_0 \dot{x}^2 + \lambda_1 x$:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}2\lambda_0\dot{x} + \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow -2\lambda_0\ddot{x} + \lambda_1 = 0.$$

$\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ — все множители Лагранжа нули.
$\lambda_0 \neq 0,\ \lambda_0 = \frac{1}{2}$. Тогда $\ddot{x} = \lambda_1 \Rightarrow x = C_1 t^2 + C_2 t + C_3$.
Неизвестные константы $C_1, C_2, C_3$ находим из условий на концах и изопериметрических условий:
$x(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0,\ x(1) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1,$

$$\int\limits_0^1 x\,dt = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 (C_1 t^2 + C_2 t)\,dt = 0 \Rightarrow \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{2} = 0.$$

Отсюда $C_1 = 3,\ C_2 = -2$.
Единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = 3t^2 - 2t$.

## Пример. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \text{extr};\ \int\limits_0^1 x\,dt = 0,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$

Докажем, что $\hat{x} = 3t^2 - 2t \in \text{absmin}$. Возьмем $x \in D(P)$, обозначим $h := x - \hat{x}$. Тогда $h \in C_0^1[0,1]$, $\int\limits_0^1 h\,dt = 0$,

$$J(x) - J(\hat{x}) = J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) = \int\limits_0^1 (\dot{\hat{x}} + \dot{h})^2\,dt - \int\limits_0^1 \dot{\hat{x}}^2\,dt =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{h}\,dt + \int\limits_0^1 \dot{h}^2\,dt \geq 2\int\limits_0^1 \dot{\hat{x}}\dot{h}\,dt = 2\int\limits_0^1 \dot{\hat{x}}\,dh = 2\dot{\hat{x}}h\Big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 \ddot{\hat{x}}h\,dt =$$

$$= -12\int\limits_0^1 h\,dt = 0.$$ Значит, $J(x) - J(\hat{x}) \geq 0 \Rightarrow \hat{x} \in \text{absmin}$,

$$S_{\text{absmin}} = \int\limits_0^1 \dot{\hat{x}}^2\,dt = \int\limits_0^1 (6t-2)^2\,dt = \frac{36t^3}{3} - \frac{24t^2}{2} + 4t\Big|_0^1 = 4.$$

## Пример. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \text{extr}; \int\limits_0^1 x\,dt = 0,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$

Покажем, что $S_{\text{absmax}} = +\infty$. Действительно, возьмем последовательность $x_n(\cdot) = \hat{x}(\cdot) + nh(\cdot) \in D(P)$, $h \not\equiv 0$.

Для допустимости необходимо, чтобы $h \in C_0^1[0,1]$, $\int\limits_0^1 h\,dt = 0$, например, $h(t) = \sin 2\pi t$. Тогда

$$J(x_n) = \int\limits_0^1 \dot{x}_n^2\,dt = \int\limits_0^1 \left(\dot{\hat{x}} + n\dot{h}\right)^2 dt \to +\infty \text{ при } n \to +\infty.$$

Ответ. Допустимая экстремаль $3t^2 - 2t \in \text{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = 4$; $S_{\text{absmax}} = +\infty$.

# Задача Дидоны

Одними из первых задач на отыскание наибольших и наименьших величин являлись изопериметрические задачи известные еще с древних времен о нахождении замкнутой кривой, имеющей заданную длину и охватывающую наибольшую площадь, и о нахождении пространственной замкнутой поверхности, имеющей заданную площадь и охватывающей наибольший об'ем. Еще до Аристотеля (IV век до н. э.) было известно, что среди изопериметрических (имеющих равную длину) кривых наиболее вместимой является окружность, а среди изопифанных (имеющих равную площадь) поверхностей — сфера.
Изопериметрическая задача содержится также в легенде о царице Дидоне. Описываемые события легенда относит к 825 году до н. э.

Финикийская царица Дидона и с ней небольшая часть жителей города Тира, спасаясь от преследований, покинули родной город и в поисках счастья отправились на кораблях на запад вдоль берегов Средиземного моря. Выбрав на африканском побережье удобное место (нынешний Тунисский залив), Дидона и ее спутники решили основать здесь город. Эта идея не понравилась местным жителям, но все же финикийской царице удалось уговорить их предводителя Ярба, и он простодушно и неосторожно согласился уступить Дидоне клочок земли, “который можно окружить бычьей шкурой”. Хитрая финикиянка, разрезав шкуру на тонкие ремни, связала их в один длинный ремень и, окружив им значительную территорию, заложила на ней город Карфаген. В память об этой истории карфагенская цитадель получила название Бирса (шкура).
Из истории город Карфаген помнится нам еще войнами с Римом за обладание господством на Средиземном море

(Пунические войны III–II век до н. э.), которые завершились взятием римлянами Карфагена и его разрушением.
Мы видим, что Дидона "решала" классическую изопериметрическую задачу о наибольшей площади.
Естественно считать, что Дидона хотела сохранить выход к морю. Тогда мы получаем первую задачу Дидоны. Среди всех кривых длины $l$ с концами на фиксированной прямой (прямолинейный берег), найти ту, которая ограничивает фигуру наибольшей площади. Формализованная задача имеет вид:

$$\int\limits_{-T}^{T} x\,dt \to \max; \ \int\limits_{-T}^{T} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt = l, \ x(-T) = x(T) = 0$$

(здесь $T$ — подвижный конец). Эта задача относится к типу задач Лагранжа (см. § 6).

Вторая задача Дидоны:

$$\int\limits_{-T_0}^{T_0} x\,dt \to \max; \quad \int\limits_{-T_0}^{T_0} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt = l, \;\; x(-T_0) = x(T_0) = 0.$$

$T_0$ — фиксировано. Изопериметрическая задача.
Лагранжиан $L = \lambda_0 x + \lambda\sqrt{1+\dot{x}^2}$.
Уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} + \lambda_0 = 0.$$

$\lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$ (не все множители Лагранжа — нули) $\Rightarrow$ из уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dt}\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = \text{const} \Rightarrow \dot{x} = \text{const}.$$

Тогда из условий на концах и изопериметрического условия следует, что $\hat{x} \equiv 0$, $l = 2T_0$.

$\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_0 = 1$. Тогда из уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dt}\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = t + C_1 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2\dot{x}^2}{1+\dot{x}^2} = (t+C_1)^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2\dot{x}^2 = (t+C_1)^2(1+\dot{x}^2) \Leftrightarrow \dot{x}^2\big(\lambda^2 - (t+C_1)^2\big) = (t+C_1)^2$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}^2 = \frac{(t+C_1)^2}{\lambda^2 - (t+C_1)^2} \Leftrightarrow \dot{x} = \frac{t+C_1}{\pm\sqrt{\lambda^2-(t+C_1)^2}},$$

проинтегрировав, получаем:

$$x = \mp\sqrt{\lambda^2-(t+C_1)^2} + C_2 \Leftrightarrow (x-C_2)^2 + (t+C_1)^2 = \lambda^2.$$

Уравнение окружности. Из условий на концах $x(-T_0) = x(T_0)$ следует, что $C_1 = 0$, т. е. $t^2 + (x-C_2)^2 = \lambda^2$. Неизвестные константы $C_2, \lambda$ определяются единственным образом ($\lambda$ с точностью до знака) из условия $x(T_0) = 0$ и изопериметрического условия.