МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Галеев Э. М.

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ

(типы задач и методы их решений)

Часть 4

- Уравнения и неравенства с параметрами
- Доказательство неравенств
- Системы уравнений
- Целочисленные задачи

Москва 2012

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Галеев Э. М.

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ

(типы задач и методы их решений)

Часть 4

- **Уравнения и неравенства с параметрами**
- **Доказательство неравенств**
- **Системы уравнений**
- **Целочисленные задачи**

Издание девятое, дополненное

Москва 2012

ББК 22.1 я 729
УДК 373.3

Учебно-методическое пособие

Галеев Э.М.

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ (типы задач и методы их решений). Часть 4. Уравнения и неравенства с параметрами. Доказательство неравенств. Системы уравнений. Целочисленные задачи. Изд. 9-е, дополненное. Издательство "Попечительский совет механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова". 2012. - 84 с.

В пособии рассматриваются уравнения и неравенства с параметрами, доказательство неравенств, системы уравнений, целочисленные задачи для письменного и устного экзамена. Предпринята попытка систематизации типов встречающихся задач и схем их решений. Схема решений уравнений определенного вида подобрана таким образом, чтобы решение было наиболее простым. Решения каждого типа задач по этим схемам приведены в разделе "Ответы, указания, решения" в конце пособия.

Предназначено для абитуриентов МГУ, выпускников школ при подготовке к ЕГЭ, для слушателей подготовительных отделений и курсов, учащихся математических классов.

Рецензент: д.ф.-м.н., Богатый С. А.

$$\mathbf{Г}\frac{\mathbf{1702070000-08}}{\mathbf{3Ш7(03)-02}}\ \textbf{Без объявл.}$$

ISBN 5-87597-024-3

Оглавление

Предисловие

В пособии рассматриваются уравнения и неравенства с параметрами, доказательство неравенств, системы уравнений, целочисленные задачи для письменного и устного экзамена.

Материал пособия состоит из пяти параграфов: уравнения с параметрами, неравенства с параметрами, доказательство неравенств, системы уравнений, целочисленные задачи. Параграфы делятся на пункты по типам задач. Например, параграф уравнения с параметрами делится на пункты: линейные уравнения, квадратичные уравнения, уравнения с модулем и так далее. Таким образом, уравнения с параметрами разбиваются на определенные виды уравнений, которые имеют близкую схему решений. Предпринята попытка систематизации видов встречающихся задач и схем их решений. Схема решений уравнений определенного вида подобрана таким образом, чтобы решение было наиболее простым. Такие же идеи классификации видов задач по схемам их решений применяются и для неравенств с параметрами.

Предполагается, что читатель знаком со школьной программой и собирается углубить уже имеющиеся у него знания и научиться правильным подходам и схемам решений уравнений и неравенств.

Имеющиеся задачи распределены на две части. Одна часть предполагает решение задач на занятии под руководством преподавателя. Другая часть — для самостоятельного решения дома. Домашние задачи предназначены для закрепления материала, пройденного на занятии с преподавателем. Как правило, задачи подобные домашним уже решены на занятии. Пособие можно использовать при подготовке к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ.

Часть задач приведена с подробными решениями в разделе “Ответы, указания, решения” в конце пособия. Как правило, решения первых задач встречающихся видов подробно разобраны в разделе “Ответы, ...”. Рекомендуется прочитать решение, приведенное в книге. Понять, почему автор предпочел именно такое решение, а не другое. При решении подобных задач научиться использовать предложенный способ и форму записи решения. Для аналогичных задач решения не приводятся, а даются только ответы. В некоторых задачах специально ответы не приводятся. Это так называемые “тестовые” задачи. С помощью тестовых задач преподаватель легко может проверить, подгоняет ли ученик свои ответы к задачам или нет. Кроме того в тестовых задачах, имеются определенные тонкости, которые надо заметить. И преподаватель проверяет, усвоил ли ученик их. Задачи, являющиеся в своем пункте по сравнению с остальными существенно более сложными, отмечены звездочкой.

В пособии содержатся задачи и простые, и сложные. Основная масса задач взята из вступительных экзаменов в МГУ. В этом случае указан факультет, год, номер задачи и общее количество задач. Для выездных экзаменов указывается город, в котором эта задача давалась. Часть задач взята из пособий по элементарной математике, приведенных в списке литературы (некоторые из них при этом изменены), или составлена автором.

Пособие предназначено для абитуриентов МГУ, выпускников школ при подготовке к ЕГЭ, для слушателей подготовительных отделений и курсов, учащихся математических классов и школ. В то же время знания приведенных приемов решения задач окажутся полезными и для любого школьника.

Галеев Э. М.

Замечания и предложения по улучшению содержания книги можно направлять по адресу:

119992, Москва, МГУ, механико-математический факультет,
кафедра ОПУ, проф. Галееву Эльфату Михайловичу.
моб. тел. 8-926-266-02-87. e-mail: galeevem@mail.ru

17 Уравнения с параметром

Уравнение с параметром — это фактически множество уравнений для разных значений параметра. Чаще всего параметр у нас будет обозначаться буквой a, а неизвестное — буквой x. Естественно, что значение корня уравнения может зависеть от величины параметра a. Задача должна быть решена для каждого значения параметра. Поэтому ответ в задаче записывается следующим образом: если a такое-то, то x такое-то, если другое, то и x может быть другим. При этом ответ должен быть выписан для всех значений $a \in (-\infty; +\infty)$. Может оказаться так, что при некоторых значениях параметра уравнение не имеет корней. Это также надо указать в ответе.

В задачах с параметрами под областью допустимых значений (ОДЗ) удобно понимать ОДЗ неизвестного и параметра, т. е. множество всех пар (x, a), при которых определены все функции, входящие в уравнение.

17.1 Линейные уравнения

Линейные по x уравнения сводятся к виду $f(a)x = g(a)$. Если a не принадлежит области определения функций f и g, то уравнение теряет смысл, и говорим, что в этом случае корней нет. Пусть a принадлежит области определения функций f и g, тогда, если $f(a) \neq 0$, то $x = \dfrac{g}{f}$; если $f(a) = 0$, то эти значения a надо рассмотреть отдельно, подставляя их в исходное уравнение.

Для каждого значения параметра решить уравнения:

17.1. $(a - 2)x = 3$.

17.2. $(a^2 - 5a + 6)x = a^2 - 4$. **"Тест"**

Домашнее задание

17.3. $a \cdot x = 1$.

17.4. $3x = 1 - ax$.

17.5. $(a^2-4)x = a^2-5a+6.$

17.6. (МГУ, физический, 1982, 2(6))
При каких значениях параметра a корни уравнения $10x-15a = 13-5ax+2a$ больше 2?

17.2 Квадратичные уравнения

17.7. $x^2 = a.$

17.8. (МГУ, химический, май 2003, 1(6))
При каких значениях параметра a уравнение $ax^2+(a+1)x+1=0$ имеет единственное решение.

17.9. $(a+1)x^2-2ax+a-2=0.$ **"Тест"**

17.10. При каких значениях параметра a корни уравнения $ax^2-(2a+1)x+3a-1=0$ больше 1?

17.11. (МГУ, химический, физико-химический, ФНМ, ФФМ, биолог., ФБиБ, географический, психологический, 2007, 8(8))
Найти все значения параметра a, при каждом из которых среди корней уравнения $ax^2+(a+4)x+a+1=0$ имеется ровно один отрицательный. **"Тест"**

17.12. (МГУ, ИСАА, 1992, 6(6))
При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$ является наибольшей?
Чему равна эта сумма?

17.13. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2+3x+2a^2-3=0$ имеет только целочисленные корни?

17.14. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2007, 3(10))
Какие значения, в зависимости от параметра a, может принимать выражение $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$, в котором числа x_1, x_2 — два различных корня уравнения $x^3-2007x=a$?

Домашнее задание

17.15. При каких a уравнение $(a-2)x^2-2ax+2a-3=0$ имеет единственный корень?

17.16. При каких a уравнение $ax^2-4x+a+3=0$ имеет более одного корня?

17.17. При каких a уравнение $(a+1)x^2-ax+a-3=0$ имеет не более одного корня? **"Тест"**

17.18. (МГУ, ВМиК, 1980, 4(6))
При каких значениях параметра a уравнение
$(3a-1)x^2+2ax+3a-2=0$ имеет два действительных корня.

17.19. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $f(x)=(a^2-2)x^2+(a^2+a-1)x-a^3+a=0$ больше числа a, а другой меньше числа a?

17.20. При каких значениях параметра a корни x_1 и x_2 уравнения $f(x)=(3a+2)x^2+(a-1)x+4a+3=0$ удовлетворяют условиям $x_1<-1<x_2<1$?

17.21. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2-ax+2a-1=0$. Вычислите $x_1^3+x_2^3$.

17.22. Дано уравнение $x^2+ax+a-1=0$. Найти все значения параметра a, при которых отношение суммы квадратов корней данного уравнения к произведению корней данного уравнения равно максимальному значению функции $y=f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x & \text{при } x\le 3,\\ x-6 & \text{при } 3\le x\le 8,\\ -2x+18 & \text{при } 8\le x.\end{cases}$$

17.23. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых все корни уравнения $3ax^2+(3a^3-12a^2-1)x-a(a-4)=0$ удовлетворяют неравенству $|x|\le 1$.

17.24. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - (|a+5| - |a-5|)x + (a-12)(a+12) = 0$ имеет два различных положительных корня.

17.25. (МГУ, мехмат, тест, 1995, 6(8))
Найти пару (x, y), удовлетворяющую уравнению $xy = 4(\sqrt{y} - 1)$, для которой x принимает наибольшее значение.

17.26. (МГУ, химический, 2006, 6(6))
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{(x^2 + |x|)(x^2 + 5|x| + 6) + 1} = 3|x| - 3ax - a^2 - a + 1$ имеет корни, как большие -3, так и меньшие -3.

17.27.* (МГУ, психологический, 1992, 4(5))
При каких значениях параметров a и b можно найти два различных вещественных корня уравнения $x^3 - 5x^2 + 7x = a$, которые будут также корнями уравнения $x^3 - 8x + b = 0$?

17.28.* (МГУ, экономический, отд. менеджмента, 2005, 6(6))
Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения $\sqrt[3]{x^6} - \left(\dfrac{1}{a} - 2\right)\sqrt[4]{x^4} + 1 - \dfrac{2}{a} = 0$ являются целыми числами.

17.3 Дробно-рациональные уравнения

17.29. $\dfrac{x-a}{x-1} = 0.$

17.30. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}.$$

17.31. (МГУ, социологический, апрель 2005, 5(6))
При каких значениях параметра a уравнение
$\dfrac{(a+4)x^2 + 6x - 1}{x+3} = 0$ имеет единственное решение? **“Тест”**

Домашнее задание

17.32. $\dfrac{x-a}{a+1}=0.$

17.33. $\dfrac{x-4}{x^2-a^2}=0.$

17.34. $\dfrac{(a-2)(x-a)}{x-1}=0.$ **"Тест"**

17.35. (МГУ, геологический, 1979, 1(6))
$\dfrac{a}{a-2x}=2.$

17.36. $\dfrac{x^2+1}{a^2x-2a}+\dfrac{1}{ax-2}=\dfrac{x}{a}.$ **"Тест"**

17.37.* (МГУ, мех-мат, май 2001, 6(6))
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых графики функций $y=\dfrac{3x+1}{x}$ и $y=\dfrac{4x+3a-7}{ax-1}$ делят координатную плоскость ровно на 5 частей.

17.4 Уравнения с модулем

17.38. $|x+1|=a-2.$

17.39. (МГУ, ВМиК, 1982, 5(6))
$|x+3|-a|x-1|=4.$

17.40. Найти все значения a, такие, что уравнение $|x+3|-1=|2x-a|$ имеет единственное решение.

17.41.* (МГУ, психологический, 2003, 5(5))
При каких значениях параметра a уравнение

$$2|x-9a|-2a^2+35+x=0$$

не имеет решений? При каких (остальных) значениях параметра a все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-30;\,63]$?

17.42.* (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2005", 8(10))
Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $4x-\big|3x-|x+a|\big|=9|x-1|$ имеет хотя бы один корень.

Домашнее задание

17.43. (МГУ, физический, 1984, 4(6))
При каких значениях a все решения уравнения
$$2|x-a|+a-4+x=0$$
удовлетворяют неравенству $0 \leq x \leq 4$?

17.44. (МГУ, ИСАА, 2000, 5(7))
Найдите все значения a, при которых неравенство $|x^2-2x+a|>5$ не имеет решений на отрезке $[-1;2]$.

17.45. (МГУ, ВМиК, 1982, 5(6))
$$a|x+3|+|x-2|=5.$$

17.46. $|x-3|=ax+1.$

17.47. (МГУ, геологический, 1991, 6(6))
$$|x+2|+a|x-4|=6.$$

17.48. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $2\big|2|x|-a^2\big|=x-a$ имеет 3 различных решения.

17.49. (МГУ, географический, май 1993, 5(5))
Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $||||x^2-a|-5|-2|+1|=3$ имеет ровно три корня.

17.5 Иррациональные уравнения

17.50. $\sqrt{x}=a.$

17.51. $(x-2)\sqrt{x-a}=0.$ **“Тест”**

17.52. $x-\sqrt{a-x^2}=1.$

17.53. $\sqrt{x}+\sqrt{a}=\sqrt{1-(x+a)}.$

17.54. $\dfrac{\sqrt{x+a}}{a}+\dfrac{\sqrt{x+a}}{x}=\sqrt{x}.$

17.55. $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x.$

Домашнее задание

17.56. $\sqrt[3]{x-1}=a.$

17.57. $(a-1)\sqrt{x-2}=0.$

17.58. $(x-a)\sqrt{x-3}=0.$

17.59. (МГУ, филологический, 1978, 2(5))
Число a подобрано так, что уравнение
$$\sqrt{x-\sqrt{3}}+a^2x^2+2ax(\sqrt{6}-\sqrt{3})=6\sqrt{2}-9$$
имеет решение. Найти это решение.

17.60. $\sqrt{(x+1)(x-2)}=a.$

17.61. $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-2}=a.$ **"Тест"**

17.62. (МГУ, филологический, 1977, 4(5))
Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $\sqrt{2|x|-x^2}=a.$

17.63. (МГУ, филологический, апрель 2002, 6(6))
$\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a.$

17.64. $x+\sqrt{x^2-x}=a.$

17.65. $\sqrt{x(2a-x)}=1-x.$

17.66. $x+\sqrt{1-x^2}=a.$

17.67. $\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x.$

17.68. (МГУ, мех-мат, 2001, 5(6))
Найдите все числа, которые ни при каком значении параметра a не могут быть корнями уравнения
$$4\sqrt{2x^4+x^3}=a\sqrt[4]{4-a^4}(x+4x^2-8).$$

17.6 Показательные уравнения

17.69. (МГУ, мех-мат, 1993, 2(6))
Найти все значения a, при которых уравнение
$4^x + (a^2+5)\cdot 2^x - a^2 + 9 = 0$ не имеет решений.

17.70. (МГУ, психологический, 1997, 4(6))
При каких действительных p уравнение
$4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2\cdot 2^{1-x}$ имеет решение.

17.71. (МГУ, психологический, 1977, 4(5))
Найти все пары чисел (a, b), для которых при любом x справедливо равенство $ae^x + b = e^{ax+b}$.

Домашнее задание

17.72. $2^x = a$.

17.73. (МГУ, физический, 1985, 4(6))
$$4^x - 2a(a+1)\cdot 2^{x-1} + a^3 = 0.$$

17.74. (МГУ, ВМиК, 1996, 3(6))
При всех значениях параметра a решить уравнение
$$25^x - (a-1)\cdot 5^x + 2a + 3 = 0$$
и указать, при каких a оно имеет единственное решение.

17.75. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 8(8))
При каких значениях параметра a уравнение
$(a-1)4^x + (2a-3)6^x = (3a-4)9^x$ имеет единственное решение?

17.7 Логарифмические уравнения

17.76. $\log_a x = 2$.

17.77. (МГУ, экономический, 1985, 3(6))
$$\log_3 x + 3\log_a x + \log_9 x = 5.$$

17.78. (МГУ, географический, май 2000, 2(6))
При каких значениях параметра a уравнение
$\log_{a-6,5}(x^2+1) = \log_{a-6,5}((a-5)x)$ имеет два различных решения.

Домашнее задание

17.79. $\log_x a = 2$. **"Тест"**

17.80. (МГУ, "Ломоносов-2009", 3(9))
При каждом значении a найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению $\log_5\left(\dfrac{(x+1)^2}{x} - a\right) = \log_5 \dfrac{(x+1)^2}{x} - \log_5 a$.

17.81. $\log_9 x + \log_9 \dfrac{2-x}{2} = \log_9 \log_9 a$.

17.82. (МГУ, физический, 1996, 8(8))
$$(\log_5 2)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_4 25)^{\sqrt{x^2-3a-5}}.$$

17.83. $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2} \dfrac{a^2-4}{2a-x} = 1$. **"Тест"**

17.84.* (МГУ, факультет Гос. управления, 2005, 6(7))
Найдите все значения a, для которых при любом положительном b уравнение $a \log_{\frac{1}{x}-2} 4 = \log_2(\frac{1}{x}-2) - b$ имеет хотя бы одно решение, меньшее $\frac{1}{3}$.

17.8 Тригонометрические уравнения

17.85. (МГУ, ВМиК, 1970, 1(5))
$$\sin^4 x + (a-4)\sin^2 x - 3(a-1) = 0.$$

17.86. (МГУ, психологический, 1977, 4(5))
Найти все пары чисел (a, b), для которых при любом x справедливо равенство $a\sin x + b = \sin(ax+b)$.

17.87.* (МГУ, мех-мат, тест, 2002, 10(10))
Среди значений параметра $\varphi \in [0; 2\pi]$ указать те, для которых наибольшее значение функции $y = \cos x - \frac{3}{2}\cos\varphi + \cos(x+\varphi)$ будет максимальным.

17.88.* Найти все a, при каждом из которых уравнение $\cos 2x + 2\cos x = a + 1$ имеет ровно один корень на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{3};\, \pi\right)$.

17.89. (ФМШ, 1997, 4(6))
Найти все значения a, при которых среди корней уравнения

$$\sin 2x - 2a\cos x - \sin x + a = 0$$

найдутся два, разница между которыми равна $\dfrac{\pi}{2}$.

17.90.* (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2006", 7(10))
Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos 2x - 2a\sin x - |2a - 1| + 2 = 0$ имеет решение и все его положительные решения образуют арифметическую прогрессию.

17.91.* (МГУ, мех-мат, март 2003, 6(6))
Найти все значения α, при каждом из которых расстояние между любыми двумя соседними корнями уравнения

$$3\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\sin 3x = 2\sin 2\alpha\cos 2x - \sin 3x + \cos 3\alpha$$

не превосходит $\dfrac{\pi}{3}$.

17.92.* (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2005, 8(8))
Переменные x, y связаны условием $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$. Найдите все значения параметра a, при которых разность между наибольшим и наименьшим значением выражения $2ax - 3y - 10$ больше 12.

Домашнее задание

17.93. $\sin(a + x) + \sin x = \cos\dfrac{a}{2}$.

17.94. $\sin x = a$.

17.95. $\sin^2 x = a - 4$.

17.96. (МГУ, ВМиК, 1970, 1(5))

$$\cos^4 x - (a + 2)\cos^2 x - (a + 3) = 0.$$

17.97. (МГУ, психологический, 1977, 4(5))
Найти все пары чисел (a, b), для которых при любом x справедливо равенство $a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1$.

17.98. $\sin x = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$.

17.99. $2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = a^2 - 3a$.

17.100. Найти все целые значения параметра a, при каждом из которых уравнение $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 \dfrac{x}{2} = 3a$ имеет хотя бы одно решение. Найти все эти решения.

17.101. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 + \dfrac{2x}{\sqrt{\sin a}} + \dfrac{1}{\cos a} + 2\sqrt{2} = 0$ имеет единственное решение.

17.102. (МГУ, географический, 2003, 5(5))
При каких значениях параметра a уравнение

$$(\sin x - \log_4 a)(\sin x - 2 + 2a) = 0$$

имеет ровно два корня на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right]$?

17.103. $\dfrac{a + \sin x}{a\cos x + 1} = \dfrac{a + \cos x}{a\sin x + 1}$. **"Тест"**

17.104. (МГУ, геологический, МШЭ, 2008, 7(8))
При всех значениях параметра a решить уравнение
$x^2 + 4x + 6 - 4a(x - a) - \cos(x + 2) = 8a + \cos(x - 4a + 2)$.

17.105.* (МГУ, филологический, 1985, 5(5))

$$3\cos x \sin b - \sin x \cos b - 4\cos b = 3\sqrt{3}.$$

17.106. (МГУ, мех-мат, март 1996, 4(6))
При каких значениях a уравнение

$$2\cos^2\left(2^{2x - x^2 - 1}\right) = a - \sqrt{3}\sin\left(2^{2x - x^2}\right)$$

имеет хотя бы одно решение?

17.9 Системы уравнений

17.107. (МГУ, философский, 1989, 5(5))
При каких значениях параметров a и b система

$$\begin{cases} 8x + (a^2 + ab + b^2)y = 4, \\ (a - b)x + 26y = 2, \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

17.108. (МГУ, биолого-почвенный, 1970, 4(5))
При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a + 6)y = a + 3, \end{cases}$$ не имеет решений?

17.109. Найти все значения параметров a и b, при которых системы уравнений $\begin{cases} ax + 2y = 2b + 1, \\ x + y = 3, \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + y = a^2 + 2, \\ x + 3y = 3, \end{cases}$ равносильны.

17.110. (МГУ, физический, 1988, 5(6))
При каких значениях a система $\begin{cases} 2axy + 2x - 2y + 3 = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0, \end{cases}$ имеет единственное решение?

17.111. (ФМШ, 1988, 4(6))
При каких значениях a система $\begin{cases} 2x + y = a - 1, \\ 2xy = a^2 - 3a + 1, \\ 4x^2 + y^2 \le -a^2 + 5a - 4, \end{cases}$ имеет решение?

17.112. (МГУ, ВМиК (отд. бакалавров), 2006, 5(7))
Пусть (x, y) — решение системы уравнений $\begin{cases} 3x + y = \alpha + 2, \\ 9x^2 + y^2 = 5\alpha - 2. \end{cases}$
При каком α произведение xy принимает наибольшее значение?

Домашнее задание

17.113. (МГУ, физический, 1977, 2(5))
При каких значениях параметра a все числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases} x+y=a, \\ 2x-y=3, \end{cases}$ удовлетворяют также неравенству $x>y$?

17.114. (МГУ, экономический, 1978, 3(5))
При каких значения параметра b система уравнений
$\begin{cases} bx+2y=b+2, \\ 2bx+(b+1)y=2b+4, \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

17.115. (МГУ, философский, 1989, 5(5))
При каких значениях параметров a и b система

$$\begin{cases} (a+b)x+26y=2, \\ 8x+(a^2-ab+b^2)y=4, \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

17.116. При каких значениях параметра a система
$\begin{cases} x^2+ax+1=0, \\ x^2+x+a=0, \end{cases}$ имеет решение? **"Тест"**

17.117. При каких значениях параметра a система уравнений
$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x-y=a, \end{cases}$ имеет единственное решение.

17.118. При каких значениях параметра a система уравнений
$\begin{cases} ax^2+y=2, \\ x+y=1, \end{cases}$ имеет единственное решение.

17.119. При каких значениях параметра a система уравнений
$\begin{cases} x^2=(x-a)y, \\ y^2-xy=9ax, \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

17.120. Для каждого значения параметра a определить число решений системы уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2, \\ (x^2 + y^2)^2 = 4a^2xy. \end{cases}$

17.121. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x - y = 1 + xy, \\ (y - a)x + (2a - 3)y = a, \end{cases}$ имеет единственное решение.

17.122. (МГУ, физический, март 1995, 7(8))
Найти наименьшее значение произведения xy, где x и y удовлетворяют системе $\begin{cases} x + y = 3a - 1, \\ x^2 + y^2 = 4a^2 - 2a + 2. \end{cases}$

17.123.* При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (4y^4 + 12y^2 + 9)(x^2 + 12y^2 + 44y + 46) = 11(4y^2 - 5)(x^2 + y^2 + 2), \\ yx^2 - 2ax - \sqrt{|2 - y|} = 0, \end{cases}$$

имеет единственное решение?

17.10* Количество корней в задаче

17.124. (МГУ, мех-мат, 1990, 4(6))
Найти все значения параметра a, при которых уравнение
$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

17.125. (МГУ, геологический, май 2003, 6(8))
При каких значениях параметра a уравнение
$2\pi^2(x - 1)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$ имеет единственное решение?

17.126. (МГУ, географический, май 1999, 5(6))
При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 - (2a + 2)x + a^2 + 2a - 3 = 0, \\ \sqrt{(y - a)^2 + x^2} + \sqrt{(y - a)^2 + (x + 4)^2} = 4, \end{cases}$$

имеет единственное решение?

17.127. (МГУ, мех-мат, 1966, 5(5))

Найти все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x^y-1}{x^y+1}\right| = a, \\ x^2+y^2=b, \end{cases}$$ имеет единственное решение.

17.128. (МГУ, мех-мат, 1966, 5(5))

Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (x^2+1)^a + (b^2+1)^y = 2, \\ a + bxy + x^2y = 1, \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b.

17.129. (МГУ, ВМиК, 1998)

Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a\cdot\cos\frac{x^2-1}{x} + a^2 - \frac{5}{4} = 0$$

имеет единственное решение.

17.130. (МГУ, филологический, 1984, 5(5))

При каких a система $\begin{cases} y \geq x^2+2a, \\ x \geq y^2+2a, \end{cases}$ имеет единственное решение?

17.131. (МГУ, филологический, 1992, 5(5))

При каких a система уравнений $\begin{cases} ax^2+4ax-y+7a+1=0, \\ ay^2-x-2ay+4a-2=0, \end{cases}$ имеет единственное решение?

17.132. (МГУ, химический, 2005, 6(6))

При каких значениях параметра a уравнение $|x| + \left|\dfrac{x+1}{3x-1}\right| = a$ имеет ровно три решения?

17.133. (МГУ, ВМиК, 2010, 5(6))

Найдите все значения параметра a, при которых система имеет решение: $\begin{cases} 64\cdot 25^{-\sqrt{y}} + (80-40a)\cdot 5^{-\sqrt{y}} - 5a \leq 0, \\ 40\cdot 5^{-\sqrt{y}} = 80\cdot 2^x + 5a + a\cdot 2^{-x}. \end{cases}$

Домашнее задание

17.134. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2008”, 3(10))
При каких значениях a существует единственное решение системы
$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ (x-3)^2+(y+4)^2=a? \end{cases}$$

17.135. При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x-\sin^2 y=3, \end{cases}$$ имеет единственное решение.

17.136. При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} xyz+z=a, \\ xyz^2+z=-2, \\ x^2+y^2+z^2=4, \end{cases}$$ имеет единственное решение.

17.137. При каких значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} x^2+xy-6y^2=0, \\ y-|ax|=0, \end{cases}$$ имеет бесконечно много решений.

17.138. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 7(7))
При каких значениях параметра b система уравнений
$$\begin{cases} (x^2+1)b=y+\cos 2x, \\ 2^{|\sin x|}+|y|=2, \end{cases}$$ имеет единственное решение.

17.139. (МГУ, химический, 2002, 6(6))
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2^{-x^2}\cdot 4^x+\sin\dfrac{\pi x}{4}+\cos\dfrac{\pi x}{4}-2=a^3-3a^2+a+\sqrt{2}$ имеет единственное решение.

17.140. (МГУ, геологический, 1989, 5(6))
При каких значениях параметров a и b уравнение
$(3x-a^2+ab-b^2)^2+(2x^2-a^2-ab)^2+x^2+9=6x$ имеет хотя бы одно решение x.

17.141. (МГУ, мех-мат, 1971, 4(5))
При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \le a, \\ x^2 - 2x \le 3 - 6a, \end{cases}$$ имеет единственное решение.

17.142. (ИСАА, социально-экономический, 1991, 6(6))
При каких значениях параметра b система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |y| - x = b, \end{cases}$$ имеет ровно три решения?

17.143. (МГУ, социологический, филологический, 2007, 8(8))
При каких значениях c уравнение $-\sqrt{16 - x^2} = c + x$ имеет единственное решение?

17.144. (МГУ, географический факультет, 1994, 5(5))
При каких значениях a уравнение имеет единственное решение

$$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}.$$

17.145. (МГУ, географический, 1978, 5(5))
При каких значениях параметра a существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0, \\ x^2 - 2(a - 1)x + a(a - 2) = 0. \end{cases}$$

17.146. (МГУ, экономический, 1987, 6(6))
При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$ имеет единственное решение.

17.147. (ЕГЭ, 2011, С5 – *демоверсия*)
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 2 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 4, \end{cases}$ имеет единственное решение.

17.148. (МГУ, химический, 1986, 5(5))
Найти все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} 1-\sqrt{|x-1|}=\sqrt{7|y|}, \\ 49y^2+x^2+4a=2x-1, \end{cases}$ имеет ровно четыре различных решения.

17.149. (МГУ, экономический, апрель 2003, 5(5))
При каких значениях параметра b уравнение
$$12\cos^2\left(\frac{\pi-1}{2}-x\right)+b\left(3\sqrt{|1+2x|}+2x^2+\frac{1}{2}+2x\right)-$$
$$-\frac{5(2bx+b)^2}{4b+12}=2b^2+2b-12-\arcsin\left(x^2+\frac{1}{4}+x\right)$$
имеет единственное решение.

17.150. (МГУ, экономический, 2008, 6(7))
Найти все значения a, при которых уравнение
$$\frac{8}{\pi}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{x}{4}\right)\log_{\sqrt{17}+4}\left(x+4+\sqrt{x^2+8x+17}\right)=$$
$$=a^2-a\sin\left(\pi\cdot\frac{x^2+8x-64}{32}\right)-2$$
имеет единственное решение, и определить это решение.

17.151. (МГУ, почвоведения, глоб. процессов, 2007, 7(8))
Найти все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} (5-2\sqrt{6})^x+(5+2\sqrt{6})^x-5a=y-|y|-8, \\ x^2-(a-4)y=0, \end{cases}$$
имеет единственное решение.

17.152. (МГУ, почвоведения, 1985, 5(5))
Пусть x_0 — больший корень уравнения
$$x^2+2(a-b-3)x+a-b-13=0.$$
Найти наибольшее значение x_0 при $a\geq 2$, $b\leq 1$.

17.153. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2006, 7(8))
Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} \operatorname{arctg}(25^x-9+a-y)=0, \\ y\cdot 5^{-x}+\sqrt{a-1}=0, \end{cases}$ имеет единственное решение (x_0,y_0), удовлетворяющее условию $x_0\leq 0$.

18 Неравенства с параметром

18.1 Линейные неравенства

18.1. $(a-2)x \le 3$.

18.2. $(a^2-4)x \le -a^2+5a-6$. **"Тест"**

18.3. $\dfrac{3ax+4}{3a+9} \le \dfrac{x}{a+3} + \dfrac{3a-5}{3a-9}$.

Домашнее задание

18.4. $(a+3)x \ge 2$.

18.5. $ax-1 \le \dfrac{x}{a+3}$.

18.6. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2004, 8(8))
Найти все значения параметра $p \in [-4;\,4]$, при которых неравенство $(p-2)\big((x+1)(p-3)+2x\big) > 0$ выполняется при любых $x \ge 0$.

18.2 Квадратичные неравенства

18.7. $x^2 > a$.

18.8. $(x-2a)(x+a-3) \le 0$.

18.9. $ax^2-2x-1 \ge 0$.

18.10. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2005, 8(8))
Найти все значения параметра a, при которых значение квадратного трехчлена $2x^2-ax+a^2+2a-3$ на отрезке $-1 \le x \le 1$ не превосходит 1.

18.11. Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения системы неравенств $\begin{cases} x^2-2x \le a-1, \\ x^2-4x \le 1-4a, \end{cases}$ образуют на числовой оси отрезок длины единица.

18.12. (ЕГЭ, 2012, C5 – *демоверсия*)
Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2-8x+7|$ больше 1.

Домашнее задание

18.13. $x^2 \le a$.

18.14. $x^3 > a$.

18.15. $x^2 + ax + 1 < 0$.

18.16. $x^2 - ax + 2x + \dfrac{1}{4} > 0$.

18.17. $ax^2 + 2ax - 2 \le 0$.

18.18. При каких значениях параметра a из неравенства $1 < x \le 2$ следует неравенство $f(x) = x^2 - 2ax + a < 0$? **"Тест"**

18.19. (МГУ, физический, 1994, 7(8))
Найдите все значения a, для каждого из которых система $\begin{cases} -x^2 + 12x - a \ge 0, \\ x \le 2, \end{cases}$ выполняется хотя бы при одном значении x.

18.20. (МГУ, физический, 2000, 7(8))
При каких значениях параметра a неравенство

$$\left(x^2 - (a+2)x - 2a^2 + 4a\right)\sqrt{1-x} \le 0$$

имеет единственное решение? **"Тест"**

18.21. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$ выполняется: 1) для всех $x > 0$; 2) для всех $x < 0$.

18.22. (МГУ, факультет Гос. управления, 2003, 5(7))
Для каждой пары чисел a и b найдите все решения неравенства

$$b \cdot x^2 + a \le 0.$$

18.23. (МГУ, биологический, 1994, 5(5))
Найти все такие значения величины x, при которых неравенство

$$(4 - 2a)x^2 + (13a - 27)x + (33 - 13a) > 0$$

выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1 < a < 3$.

18.24. (МГУ, мех-мат, 1992, 6(6))
Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$(a+2)x^3-(1+2a)x^2-6x+(a^2+4a-5)>0$$

хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-2;\,1]$.

18.25. (МГУ, факультет Гос. управления, 2006, 6(7))
Найдите значения a, для которых неравенство
$(a+b+36)x^2-5(x-1)(b+1)\le 0$ имеет решение при любом b.

18.26. (МГУ, филологический, 2003, 5(5))
Найти все значения параметра b, при каждом из которых для любого a неравенство $(x-a-2b)^2+(y-3a-b)^2<\frac{1}{2}$ имеет хотя бы одно целочисленное решение (x,y).

18.3 Дробно-рациональные неравенства

18.27. $\dfrac{x-2}{x-a}\ge 0.$

18.28. $x+\dfrac{1}{x}\le a.$

18.29. (МГУ, почвоведения, 2003, 6(6))
Найти все значения параметра b, при каждом из которых отрезок $[-3;-1]$ целиком содержится среди решений неравенства $\frac{x-3b}{b-2x}<0.$

Домашнее задание

18.30. $\dfrac{x-a}{x-1}\le 0.$

18.31. $x-\dfrac{1}{x}\ge a.$

18.32. (МГУ, экономический, 1998, 5(7))
Найти все действительные значения c, для которых все числа из области значений функции $f(x)=\dfrac{x^2+cx-1}{2x^2-3x+2}$ принадлежат интервалу $(-1;\,2)$.

18.33. $\dfrac{x-a+2}{x^2-x-6}\le 0.$

18.34. Найти все значения a, при каждом из которых из неравенств $0\le x\le 1$ следует неравенство $(a^2+a-2)x^2-(a+5)x-2\le 0.$

18.35. (МГУ, физический, май 1997, 7(8))
Найти все значения a, при которых неравенство $\dfrac{x-2a-4}{x+3a-2} \le 0$ выполняется для всех x из промежутка $1 \le x \le 3$.

18.36. $ax + \dfrac{1}{x} \ge 1$.

18.37. (МГУ, психологический, 1988, 6(6))
Найти наибольшее значение a, при котором неравенство

$$a\sqrt{a}(x^2-2x+1) + \frac{\sqrt{a}}{x^2-2x+1} \le \sqrt[4]{a^3}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$$

имеет хотя бы одно решение.

18.4 Неравенства с модулем

18.38. $|x-5| < a$.

18.39. $\left|\dfrac{ax-5}{3} + x\right| \le 3$.

18.40. $|x-3a| - |x+a| < 2a$.

18.41. Найти все значения a, такие, что для любого x выполняется неравенство $2x + 2|x-a| + |x-1| > 3$.

18.42. (МГУ, геологический, 2005, 7(8))
Найдите все значения, которые может принимать сумма $x+a$ при условии $|2x+4-2a| + |x-2+a| \le 3$.

Домашнее задание

18.43. $|x-4| > a$.

18.44. $|x+a| \le x$.

18.45. (МГУ, ВМиК, 2001, 3(7))
$|2x+a| \le x+2$.

18.46. $\left|\dfrac{ax+1}{2} - x\right| \le 5$.

18.47. (МГУ, психологический, 2006, 5(6))

$$\begin{cases} |2x + 2a| > |x| + a, \\ ax < 0. \end{cases}$$

18.48. $|ax| \geq 1 + x$.

18.49. $|3x - a| + |2x + a| \leq 5$. **"Тест"**

18.5 Иррациональные неравенства

18.50. $\sqrt{x} < a$.

18.51. $\sqrt{x} > a$.

18.52. (МГУ, геологический, 1995, 7(9))

Пусть $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 3$, $g(x) = \sqrt{x} - a$, где a — параметр. Решить относительно x неравенство $f(g(x)) \leq 0$.

18.53. (МГУ, Московская школа экономики, 2006, 7(7))

При всех значениях параметра b решите неравенство

$$2(b-1) \cdot \sqrt{3x+1} + 1 \geq 3bx + b - 3x.$$

18.54.* (МГУ, почвоведения, 1992, 5(5))

При каких значениях параметра a все числа из отрезка $-1 \leq x \leq 3$ удовлетворяют неравенству $2ax + 2\sqrt{2x+3} - 2x + 3a - 5 < 0$?

Домашнее задание

18.55. $\sqrt[3]{x+1} \leq a$.

18.56. (МГУ, физический, 1997, 7(8))

$$a - 2 < (a-1)\sqrt{x+1}.$$

18.57. $2x + \sqrt{a^2 - x^2} > 0$.

18.58. $\sqrt{2x + a} \geq x$.

18.59. (МГУ, почвоведения, 1996, 6(6))

Определить, при каких значениях a решения неравенства $\sqrt{x+a} \geq x$ образуют на числовой прямой отрезок длины $2|a|$.

18.60. (МГУ, почвоведения, 1997, 6(6))
$\sqrt{a^2 - x^2} \geq a + 1.$

18.61. (МГУ, психологический, 1989, 5(5))
$x + 2a - 2\sqrt{3ax + a^2} > 0.$

18.62. $\dfrac{\sqrt{x+1} - 2x - 1}{x + a - 1} \geq 0.$ **"Тест"**

18.63.* $\sqrt{x^2 + x} < a - x.$

18.6 Показательные неравенства

18.64. $3^x < a.$

18.65. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \geq a.$

18.66. (МГУ, психологический, 1977, 5(5))
$a^2 - 9^{x+1} - 8a \cdot 3^x < 0.$

18.67. (МГУ, биологический, 1973, 5(5))
При каких значениях параметра a неравенство $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \leq 0$ имеет хотя бы одно решение.

Домашнее задание

18.68. $3^x \geq a.$

18.69. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x < a.$

18.70. (МГУ, психологический, 1977, 5(5))
$a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0.$

18.71. (МГУ, физический, 1995, 7(8))
$3^{\sqrt{x+1}} > 2^{a-1}.$

18.72. (МГУ, ФНМ, 2006, 6(6))
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4^x + 4^{-x} + 8|2^x + 2^{-x} - a| + 11a < 26 + 2a(2^x + 2^{-x})$ имеет хотя бы одно решение.

18.7 Логарифмические неравенства

18.73. $\log_a x \geq 1.$

18.74. $\log_x a \leq 1.$

18.75. $\log_x (x-a) \geq 2.$

18.76. $\log_{\sqrt{2a}} (a+2x-x^2) \leq 2.$

Домашнее задание

18.77. $\log_a x \leq 1.$

18.78. $\log_x a \geq 1.$

18.79. $\dfrac{\log_3(x-a)-1}{|x-1|+x-3} \geq 0.$ **“Тест”**

18.8 Тригонометрические неравенства

18.80. (МГУ, факультет Гос. управления, 2009, 7(7))
Найти все значения параметра a, при которых неравенство $|7\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + 3\cos^2 x + a - 1| \leq 6$ верно для любых x.

18.81. $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \leq a.$

Домашнее задание

18.82. Найдите все целые значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2 - 2\cos 2x = 3a + 4\sin x$ имеет решения. Найдите все эти решения.

18.83. (МГУ, географический, 1995, 6(6))
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $y(x) = \log_{25-a^2}(\sin x + \sqrt{8}\sin x - a)$ определена при всех значениях переменной x.

18.84. $\cos t - \dfrac{1}{\cos t} \geq a.$

19 Доказательство неравенств

19.1 Неравенства для средних

19.1. Доказать *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим*[1] *для двух чисел:*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \qquad a, b \geq 0;$$

причем неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $a = b$.

19.2. Доказать *неравенство для средних для четырех чисел:*

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}, \qquad a, b, c, d \geq 0.$$

19.3. Доказать *неравенство для средних для трех чисел:*

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \qquad a, b, c \geq 0.$$

19.4. Доказать *неравенство для средних для n чисел:*

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}, \qquad a_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n.$$

19.5. $\ln(n-1)\ln(n+1) < \ln^2 n$, если $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

19.6. $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$.

19.7.* $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geq 64$, если $a+b+c = 1$, $a, b, c > 0$.

Домашнее задание

19.8. $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$, если $a, b > 0$.

19.9. $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 8$, если $a, b, c > 0$.

19.10. $(a+2)(b+2)(a+b) \geq 16ab$, если $a, b \geq 0$.

---

[1] Для краткости иногда такое неравенство будем называть *неравенством для средних.*

19.11. $\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \le \sqrt[4]{ab}$, если $a, b > 0$.

19.12. $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[n]{2-\sqrt{3}} > 2$.

19.13. $\dfrac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} \ge 2$.

19.14. $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \ge 9$, если $a, b, c > 0$.

19.15. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge 9$, если $a+b+c=1$, $a, b, c > 0$.

19.16. $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}+\dfrac{ab}{c} \ge a+b+c$, если $a, b, c > 0$.

19.17. $\log_n(n+1) < \log_{n-1} n$, если $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

19.2 Разные задачи

19.18. $a^2+b^2+c^2 \ge ab+ac+bc$.

19.19. $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+3 \ge 0$.

19.20. $\dfrac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$, если $a, b \ge 0$.

19.21.* $\dfrac{a^4+b^4}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4$.

19.22.* $\dfrac{a^n+b^n}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$, если $a, b \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$.

19.23. Вычислить $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$, если $n \in \mathbb{N}$.

19.24.* $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{n-1}{n}$, если $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

19.25.* $1 < \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{3n+1} < 2$, если $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

19.26.* Определить целую часть числа

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1000000}}.$$

19.27.* $a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\le 6abc$, если $a,b,c\ge 0$.

19.28.* $a^2c+b^2a+c^2b\le \dfrac{4}{27}$, если $a+b+c=1$, $a,b,c\ge 0$.

19.29.* Доказать, что для любых действительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ и $b_1,b_2,\ldots,b_n$ выполняется неравенство *Коши–Буняковского*
$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\le(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$.

19.30.* (МГУ, ВМиК, апрель 2001, устный)

$$\sum_{k=1}^{99}\sqrt{(100-k)(100+k)}<2500\pi.$$

Домашнее задание

19.31. $a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c)$.

19.32. $a^2+b^2+c^2\ge\dfrac{1}{3}$, если $a+b+c=1$.

19.33. $x^2+y^2+z^2+u^2+a^2+a(x+y+z+u)\ge 0$.

19.34. $x^2+4y^2+3z^2+13-2x-12y-6z\ge 0$.

19.35. $x^2+2xy+2y^2+6y+10>0$.

19.36. $a^3+b^3\ge ab(a+b)$, если $a,b\ge 0$.

19.37. $\dfrac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

19.38.* $\dfrac{a^5+b^5}{2}\ge\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^5$, если $a,b\ge 0$.

19.39. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Три числа a,b и c удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Докажите, что какие-либо два из них равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

19.40. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

19.41. Вычислить $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$, если $n \in \mathbb{N}$.

19.42.* $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$, если $n \in \mathbb{N}$.

19.43.* $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$, если $n \in \mathbb{N}$.

19.44. $2^{\frac{1}{2}n(n-1)} > n!$, если $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

19.3 Применение производной

19.45. (МГУ, биологический, 1989, 3(5))
Найти наименьшее значение функции $f(x) = \dfrac{1}{2x^3 - 9x^2 + 12x + 1}$ на отрезке $0 \le x \le 3$.

19.46. (МГУ, философский, 1989, 4(5))
Найти наибольшее значение функции $y(x) = x^3 - \frac{4}{3}|x|$ на отрезке $[-1,1;\ +1,1]$.

19.47. Доказать неравенство Бернулли $(1+x)^a > 1 + ax$ для любого $x > 0$ при $a > 1$.

19.48. Что больше e^π или π^e?

Домашнее задание

19.49. (МГУ, философский, 1989, 4(5))
Найти наименьшее значение функции $y(x) = \frac{3}{4}|x| - x^3$ на отрезке $[-0,7;\ 0,7]$.

19.50. (МГУ, биологический, 1989, 3(5))
Найти наибольшее значение функции $f(x) = \dfrac{1}{-2x^3 + 3x^2 + 12x + 8}$ на отрезке $-3 \le x \le 3$.

19.51.* Доказать неравенство $x^y + y^x > 1$ при $x, y > 0$.

20 Системы уравнений

20.1 Симметрические уравнения и системы

Решить системы:

20.1. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов, 2007, 6(8))

$$\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13. \end{cases}$$

20.2. $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ x^3+y^3=19. \end{cases}$

20.3. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{2}, \\ x+y+z=\dfrac{7}{2}, \\ xyz=1. \end{cases}$

20.4. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ x^3+y^3+z^3=8. \end{cases}$

20.5. (Черноморский ф-л МГУ (г. Севастополь), 2007, 8(10))

$$\begin{cases} x+\sqrt{1+x^2}=2^{y-x}, \\ y+\sqrt{1+y^2}=2^{z-y}, \\ z+\sqrt{1+z^2}=2^{x-z}. \end{cases}$$

20.6.* (МГУ, мех-мат, 1977, 4(5))

$$\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0, \\ z^3-9y^2+27y-27=0, \\ x^3-9z^2+27z-27=0. \end{cases}$$

Домашнее задание

20.7. (МГУ, геологический, 2000, 5(8))

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=30, \\ x^2+y^2=325. \end{cases}$$

20.8. $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=21, \\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}=90. \end{cases}$

20.9. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{13}{3}, \\ x+y+z=\dfrac{13}{3}, \\ xyz=1. \end{cases}$

20.10. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ xy+xz+yz=-4, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$

20.11. $\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$

20.12. $\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2+2b^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$

20.13.* (МГУ, географический, 2002, 6(6))

$$\begin{cases} x^3=5x+y, \\ y^3=5y+x. \end{cases}$$

20.14.* (МГУ, мех-мат, 1977, 4(5))

$$\begin{cases} 2y^3+2x^2+3x+3=0, \\ 2z^3+2y^2+3y+3=0, \\ 2x^3+2z^2+3z+3=0. \end{cases}$$

20.2 Однородные системы

В этом пункте одно из уравнений сводится к однородному уравнению, которое решается делением на одно из слагаемых.

20.15. (МГУ, филологический, 1982, 3(5))

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2. \end{cases}$$

20.16. $\begin{cases} 24x^2 - 25xy - 73x + 25y - 35 = 0, \\ x^2 - y^2 - 2x - 2y - 7 = 0. \end{cases}$

Домашнее задание

20.17. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy + 15 = 0. \end{cases}$

20.18. $\begin{cases} 2x^2 - 6xy + 5y^2 = 17, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = -4. \end{cases}$

20.19. $\begin{cases} (x + y\sqrt{x} + y^2)\sqrt{x + y^2} = 65, \\ (x - y\sqrt{x} + y^2)\sqrt{x + y^2} = 185. \end{cases}$

20.20. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37, \\ x^2 + xz + z^2 = 28, \\ y^2 + yz + z^2 = 19. \end{cases}$

20.21. $\begin{cases} x^2 - y\sqrt{xy} = 36, \\ y^2 - x\sqrt{xy} = 72. \end{cases}$

20.3 Системы уравнений высших порядков

20.22. (МГУ, экономический, 1979, 4(5))

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3, \\ 4{,}5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7. \end{cases}$$

20.23. Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases} y^2 - 4xy + 4y - 1 = 0, \\ 3x^2 - 2xy - 1 = 0, \end{cases}$ и условию $xy > 0$.

20.24. (МГУ, ВМиК, 2000, 5(6))
Найти наибольшее значение выражения $14x^2 + 40x + y - 324{,}5$ при условии, что $\begin{cases} 4x^2 + 20x + y \geq 162, \\ 20x^2 - 80x + y \leq 8. \end{cases}$

20.25. $\begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0. \end{cases}$

20.26.* (МГУ, географический, 1981, 5(5))

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0. \end{cases}$$

Домашнее задание

20.27. (МГУ, биологический, 1994, 1(5))

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x^2 - xy + 4y^2 = 48. \end{cases}$$

20.28. (МГУ, социологический, филологический, 2007, 4(8))

$$\begin{cases} x^2 - 2y - 3 = 0, \\ y^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases}$$

20.29. (МГУ, ФНМ, май 2000, 1(6))

$$\begin{cases} 3x + y - z = 4, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ x^2 + 2y + z^2 = 6x. \end{cases}$$

20.30. $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 14, \\ y^3 + 3x^2y = 13. \end{cases}$

20.31. (МГУ, химический, 1998, 3(6))

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x - y) + 2 = 0, \\ z^2 + xz + yz - 4 = 0. \end{cases}$$

20.32. (МГУ, факультет Гос. управления, 2003, 6(7))
$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2xy-z^2=4. \end{cases}$$

20.33. (МГУ, экономический, 1980, 3(5))
$$\begin{cases} 2xy+y^2-4x-3y+2=0, \\ xy+3y^2-2x-14y+16=0. \end{cases}$$

20.34. (МГУ, геологический, 1996, 5(8))
$$\begin{cases} x^2-xy=20y, \\ 5xy-5y^2=4x. \end{cases}$$

20.35. (МГУ, геологический, 2003, 4(8))
$$\begin{cases} 2x^2-y^2+3=0, \\ 6y^3-18y-13x^3-3x=0. \end{cases}$$

20.36. $\begin{cases} \dfrac{1+x^2}{1+y^2}=\dfrac{1}{5}, \\ x^3+4y=y^3+16x. \end{cases}$

20.37.* (МГУ, почвоведения, 1979, 5(5))
$$\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0. \end{cases}$$

20.38. (МГУ, мех-мат, 1970, 2(5))
$$\begin{cases} |xy-2|=6-x^2, \\ 2+3y^2=2xy. \end{cases}$$

20.39. (МГУ, химический, 1978, 5(5); биолог, 1993, 6(6))

Найти все решения системы уравнений $\begin{cases} y+2=(3-x)^3, \\ (2z-y)(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x, \end{cases}$

удовлетворяющие условию $z \geq 0$.

20.40.* (МГУ, географический, 1981, 5(5))

$$\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0, \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1. \end{cases}$$

20.4 Замена переменных

20.41. (ФМШ, 1997, 1(5))

$$\begin{cases} xyz = x^3 - 2, \\ xyz = y^3 + 3, \\ xyz = z^3 - 3. \end{cases}$$

20.42. (МГУ, экономический, 1985, 5(5))

Найти все решения (x, y, z, t) системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + t^2 = 9, \\ xt + yz \geq 6, \end{cases}$

для которых выражение $x + z$ принимает наибольшее значение.

20.43. (МГУ, мех-мат, март 2002, 5(6))

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} - 9xy = 2, \\ \dfrac{z}{y} - 9yz = 6, \\ \dfrac{3x}{z} - 3zx = 2. \end{cases}$$

Домашнее задание

20.44. (МГУ, геологический, 2001, 5(8))

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{2} + \dfrac{5}{2x + y - xy} = 5, \\ 2x + y + \dfrac{10}{xy} = 4 + xy. \end{cases}$$

20.45. (МГУ, геологический, 1998, 7(8))

$$\begin{cases} x(1 + y) = y + 7, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

20.46. $\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 336, \\ y^2 + x\sqrt{xy} = 112. \end{cases}$

20.47.* (МГУ, мех-мат, март 2002, 5(6))

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} - xy = 1, \\ \dfrac{z}{y} - 4yz = 2, \\ \dfrac{x}{z} - 4zx = 4. \end{cases}$$

20.48.* (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2007, 9(10))
Найти все тройки положительных чисел x, y, z, удовлетворяющие системе $\begin{cases} \sqrt{3}(x-y) \le 1 + xy, \\ \sqrt{3}(y-z) \le 1 + yz, \\ \sqrt{3}(1+xz) \le x - z. \end{cases}$

20.5 Применение геометрии

20.49. (МГУ, ВМиК, 1996, 5(6))

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

20.50.* (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2008, 9(10))

Числа x, y, z удовлетворяют системе $\begin{cases} 3x^2 + 3xy + y^2 = 75, \\ y^2 + 3z^2 = 48, \\ x^2 + xz + z^2 = 9, \\ x, y, z > 0. \end{cases}$

Найти $xy + 2yz + 3xz$.

Домашнее задание

20.51. (МГУ, мех-мат, 2007, 2(6))
Графики функций $f(x) = 2x^2 - 2x - 1$ и $g(x) = -5x^2 + 2x + 3$ пересекаются в двух точках. Найти коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.

20.52. (МГУ, геологический, 2007, 7(8))

Числа x, y, z таковы, что $\begin{cases} x+1=z+y, \\ xy+z^2+14-7z=0. \end{cases}$

При каких значениях z сумма x^2+y^2 максимальна? Найдите это максимальное значение.

20.53. (МГУ, ВМиК, 2001, 3(6))

Среди всех решений системы $\begin{cases} y+3x \le -3, \\ x^2+y^2+4x+2y \le 11, \end{cases}$ найти такое, при котором выражение $x^2+y^2-6x-8y+25$ принимает минимальное значение.

20.54. (МГУ, геологический, май 2003, 6(8))

$$\begin{cases} 2^{2-x} = 4y\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2+y^2+1-2x} + \sqrt{x^2+y^2-6x-2y+10} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

20.55. (МГУ, почвоведения, 2006, 7(7))

Найти все значения параметра b, для каждого из которых при любом значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-5x+6y+4=0, \\ y+ax+ab=0, \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

20.56.* (МГУ, биологический, 2005, 6(7))

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-2x-22y+122} = 2\sqrt{37} - \sqrt{x^2+y^2+2x+2y+2}, \\ \log_{x+1} 4 + \log_y 4 = 0. \end{cases}$$

21 Целочисленные задачи

21.1 Сравнение чисел

В случае, когда числа a и b напрямую не удается сравнить из-за сложности их выражений, иногда подбирают такое промежуточное число c, что $a < c < b$, а неравенства $a < c$ и $c < b$ более легко доказываются. При использовании этого *метода вставки промежуточного числа* выбор c зависит от вашей математической интуиции.

21.1. Записать число 0,11(7) в виде обыкновенной дроби.

21.2. Сравнить числа 3^{400} и 4^{300}.

21.3. Сравнить числа $\sqrt{2}+\sqrt{11}$ и $\sqrt{3}+3$.

21.4. Сравнить числа $2^{\sqrt{3}}$ и $3^{\sqrt{2}}$.

21.5. Сравнить числа $\log_2 5$ и $\sqrt{8}$.

21.6. Сравнить числа $3^{\sqrt{5}-2}$ и $\dfrac{4}{3}$.

21.7. Сравнить числа $\dfrac{1}{2}\log_5 6$ и $\log_6 5$.

21.8. Сравнить числа $\sqrt{1997}+\sqrt{1998}$ и $\sqrt{1996}+\sqrt{1999}$.

21.9. Какой знак имеет число $\log_\pi\left(\operatorname{tg}\dfrac{3}{4}\right)$.

21.10. Сравнить числа $\sin\cos 1$ и $\cos\sin 1$.

21.11. Сравнить числа $\log_{189} 1323$ и $\log_{63} 147$.

21.12. Сравнить числа $\sqrt[200]{2}$ и 1,006.

21.13. Сравнить числа $\sqrt[3]{60}$ и $2+\sqrt[3]{7}$.

Домашнее задание

21.14. В какой четверти лежит угол $\sqrt{\pi}$ радиан?

21.15. Сравнить числа $\sqrt[3]{4}$ и $3-\sqrt{2}$.

21.16. Сравнить числа $5-\sqrt{15}$ и $\sqrt{17}-3$.

21.17. Сравнить числа $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{19}$.

21.18. Сравнить числа $\log_2\pi+\log_\pi 2$ и 2.

21.19. Сравнить числа $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}$ и $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\dfrac{11}{1000}$.

21.20. Сравнить числа $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ и $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$.

21.21. Сравнить числа $\log_{11}119$ и $\log_{15}227$.

21.22. Сравнить числа $\dfrac{1}{2}\log_4 5$ и $\log_5 4$?

21.23. Сравнить числа $\log_2 3$ и $\log_5 8$.

21.24. Сравнить числа $\log_3 7$ и $\log_7 27$.

21.25. Сравнить числа $\log_{3\sqrt{3}} 5$ и $\cos\dfrac{\pi}{7}$.

21.26. (МГУ, ВМиК (отд. бакалавров), 2006, 1(7))
Сравните площадь прямоугольника, у которого длина одной из сторон равна 3, а длина диагонали равна $\sqrt{19}$ с площадью круга радиуса $\sqrt{3}$.

21.27. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2006", 2(10))
Сравнить числа $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6}$ и меньший корень квадратного трехчлена $11x^2-17x-13$.

21.28. Сравнить числа $\cos 136^\circ$ и $\operatorname{tg} 153^\circ$.

21.29. Расположить в порядке возрастания числа:
$\sin 10^\circ$, $\cos 275^\circ$, $\operatorname{tg} 190^\circ$, $\operatorname{ctg} 100^\circ$.

21.30. Сравнить числа $\sin 31^\circ$ и $\operatorname{tg} 30^\circ$.

21.2 Целочисленные уравнения и неравенства

21.2.1 Линейные уравнения

Наименьшее общее кратное (НОК). Наибольший общий делитель (НОД).

Пусть требуется найти НОК и НОД натуральных чисел a и b. Разложим каждое из этих чисел на простые множители. Если простое число p входит в одно разложение n раз (в степени n), а в другое — m раз и $n \le m$, то это p входит в разложение НОК$\,(a,b)$ на простые множители в степени m, а в разложение на простые множители НОД$\,(a,b)$ в степени n.

Так, например, если $a = 252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $b = 528 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$, то НОК$\,(a,b) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 = 11088$, НОД$\,(a,b) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Пользуясь сказанным, легко вывести следующее соотношение между НОД и НОК.

Теорема. *НОК$\,(a,b)$·НОД$\,(a,b) = a \cdot b$.*

Рассмотренные методы обобщаются на произвольное число натуральных чисел. Простое число p входит в разложение на простые множители НОД$\,(a,b,c,\ldots)$ в степени, равной наименьшей из степеней, в которых оно входит в разложение на простые множители чисел $a,b,c,\ldots$, а в НОК$\,(a,b,c,\ldots)$ это p входит соответственно в наибольшей степени. Если НОД$\,(a,b) = 1$, то a и b называются *взаимно простыми*.

Алгоритм Евклида

Приведем метод решения в целых числах линейных уравнений с двумя переменными

$$ax + by = c, \quad \text{где } a,b,c \in \mathbb{Z}, \qquad (*)$$

с помощью *алгоритма Евклида* в общем случае и на конкретном примере.

Опишем вначале алгоритм Евклида нахождения НОД натуральных чисел a и b, который не требует знания разложений a и b на простые множители. Не ограничивая общности, считаем $a \ge b$. Если a делится на b без остатка, то НОД$\,(a,b) = b$.

Если a не делится на b нацело, то разделим a на b с остатком:

$$a = q_1 b + r_1, \quad 0 < r_1 < b.$$

Далее разделим b на r_1 с остатком:

$$b = q_2 r_1 + r_2, \quad 0 \le r_2 < r_1.$$

Если $r_2 = 0$, то $b = q_2 r_1$ и число r_1 является делителем числа b, а в силу равенства $a = q_1 b + r_1$ и делителем числа a. Значит, r_1 — наибольший общий делитель чисел a и b.

Если $r_2 > 0$, то разделим r_1 на r_2 с остатком

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3, \quad 0 \le r_3 < r_2,$$

и продолжим этот алгоритм, пока на каком-то шаге не получится остаток равный нулю:

$$r_{k-1} = q_{k+1} r_k + r_{k+1},$$

$$r_k = q_{k+2} r_{k+1}.$$

Нетрудно видеть, что полученный делитель r_{k+1} и является наибольшим общим делителем чисел a и b, т. е. НОД$\,(a,b) = r_{k+1}$. Действительно, любая пара соседних чисел полученной последовательности $a, b, r_1, \ldots, r_k, r_{k+1}$ имеет один и тот же НОД, а для последней пары НОД$\,(r_k, r_{k+1}) = r_{k+1}$, поскольку r_k делится на r_{k+1}.

Если пройти полученные равенства в обратном порядке снизу вверх, выражая НОД из предпоследнего равенства через предыдущие остатки, то в итоге придем к представлению НОД через числа a и b:

$$an + bm = r_{k+1}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение $(*)$ имеет решение только, если число c кратно НОД$\,(a,b)$. В этом случае обе части уравнения и представления НОД можно сократить на r_{k+1}. Пусть для простоты НОД$\,(a,b) = 1$. Тогда

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ an + bm = 1. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, умноженное на c:

$$a(x-nc)+b(y-mc)=0 \iff a(x-nc)=-b(y-mc).$$

Поскольку a и b сейчас взаимно просты, то, $x-nc$ кратно b, т. е. $x-nc=bk \Leftrightarrow x=bk+nc$, $k\in\mathbb{Z}$. Тогда

$$abk=-b(y-mc) \iff ak=-y+mc \iff y=-ak+mc.$$

Пример. Решить в целых числах уравнение $133x+56y=49$.

Решение. Вычислим НОД$\,(133,56)$ по алгоритму Евклида (числа 133, 56 и получаемые остатки пишем жирным шрифтом):

$$\mathbf{133}=\mathbf{56}\cdot 2+\mathbf{21},$$
$$\mathbf{56}=\mathbf{21}\cdot 2+\mathbf{14},$$
$$\mathbf{21}=\mathbf{14}\cdot 1+\mathbf{7},$$
$$\mathbf{14}=\mathbf{7}\cdot 2.$$

Значит, НОД$\,(133,56)$=7, соответственно, $133=7\cdot 19$, $56=7\cdot 8$.

Найдем представление НОД через числа 133 и 56, выражая его из предпоследнего уравнения и подставляя последовательно предыдущие остатки.

$\mathbf{7}=\mathbf{21}-\mathbf{14}\cdot 1=\mathbf{21}-(\mathbf{56}-\mathbf{21}\cdot 2)\cdot 1=\mathbf{21}-\mathbf{56}\cdot 1+\mathbf{21}\cdot 2=\mathbf{21}\cdot 3-\mathbf{56}\cdot 1=(\mathbf{133}-\mathbf{56}\cdot 2)\cdot 3-\mathbf{56}\cdot 1=\mathbf{133}\cdot 3-\mathbf{56}\cdot 6-\mathbf{56}\cdot 1=\mathbf{133}\cdot 3+\mathbf{56}\cdot(-7)$.

Сокращая на 7 обе части заданного уравнения и представления НОД, получим:

$$\begin{cases}133x+56y=49,\\ 133\cdot 3+56\cdot(-7)=7.\end{cases} \iff \begin{cases}19x+8y=7,\\ 19\cdot 3+8\cdot(-7)=1.\end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, умноженное на 7:

$$19(x-21)+8(y+49)=0 \iff 19(x-21)=-8(y+49).$$

Следовательно, $x-21$ кратно 8, то есть $x-21=8k \Leftrightarrow x=8k+21$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда

$$19\cdot 8k=-8(y+49) \iff 19k=-y-49 \iff y=-19k-49.$$

Ответ. $x=8k+21$, $y=-19k-49$, $k\in\mathbb{Z}$.

21.31. Найти все целочисленные решения уравнения

$$5x + 7y = 6.$$

21.32. Найти наибольший общий делитель чисел 204 и 372, представить его через эти числа в виде $d = 204m+372n$ $(m, n \in \mathbb{Z})$, и решить полученное уравнение в целых числах.

21.33. (МГУ, мех-мат, 1969, 3(4))

$$\begin{cases} \sin^2 4x = \cos^2 5x, \\ \sin 5x + \sin 4x = 1, \\ |x| < 10. \end{cases}$$

21.34. (МГУ, социологический, апрель 2005, 6(6))

Фирма продавала чай в центре города по 7 рублей, а кофе по 10 рублей стакан, на вокзале по 4 рубля и 9 рублей, соответственно. Всего было продано за час 20 стаканов чая и 20 стаканов кофе, при этом выручка в центре и на вокзале оказалась одинаковой. Сколько стаканов кофе было продано в центре?

Домашнее задание

21.35. Решить уравнение $3x - 4y = 1$ в целых числах.

21.36. Найти все целочисленные решения уравнения

$$16x + 20y = 14.$$

21.37. Решить уравнение $\left(1 + \sin \dfrac{\pi x}{2}\right)^2 + \sin^2 \dfrac{\pi x}{5} = 0.$

21.38. Найти все x, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4} = 1, \\ \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{9} = \sqrt{3}, \\ \cos \dfrac{\pi x}{10} = 0. \end{cases}$$

21.39. Найти все целочисленные решения уравнения

$273x + 1014y = 156.$

21.40. Найти все целые числа, которые при делении на 15 дают остаток 2, при делении на 27 дают остаток 3, при делении на 12 дают остаток 4.

21.2.2 Квадратичные уравнения

21.41. Решить в целых числах уравнение:

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 3.$

21.42. (МГУ, психологический, 1975, 5(5))
Найти все целые положительные решения уравнения

$$2x^2 + 2xy - x - y = 112.$$

21.43. (МГУ, биологический, 1992, 4(5))
Найти все пары целых чисел (m, n), удовлетворяющие одновременно двум неравенствам

$$\begin{cases} m^2 + n^2 < 16m - 22n - 171, \\ 30m - n^2 > 252 + 14n + m^2. \end{cases}$$

21.44. (МГУ, психологический, 1979, 5(5))
Найти все тройки целых чисел (x, y, z), для которых выполняется соотношение $5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30$.

21.45. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2006", 9(10))
На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m \times n$ клеток, причем числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найти все возможные значения m и n.

21.46. (МГУ, психологический, 1985, 6(6))
Найти все значения a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x и y, удовлетворяющая уравнению $3x^2 + 11xy + 10y^2 = 7$ и двум неравенствам $x + y > 0$ и $4a^2x - 3ay < 0$.

Домашнее задание

21.47. Доказать, что уравнение $x^3 + x^2y + y^3 = 0$ не имеет ненулевых рациональных решений.

21.48. (МГУ, экономический, 1973, 2(4))
Найти все пары чисел (x, y), для которых выполняются одновременно следующие условия:
а) $x^2 - 2xy + 12 = 0$;
б) $x^2 + 4y^2 \le 60$;
в) x является целым числом.

21.49. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2008, 3(10))
При каких значениях параметра a каждый из квадратных трехчленов $x^2 + ax + 2008$ и $x^2 + 2008x + a$ имеет хотя бы один корень, причем все корни — целые числа?

21.50. (МГУ, почвоведения, май 2003, 4(6))
Найти все целочисленные решения уравнения
$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0.$$

21.51. (МГУ, почвоведения, май 2001, 5(6))
Решить уравнение в целых числах:
$$3x^2 + 5xy + 2y^2 = 7.$$

21.52. Решить в целых числах (x, y) уравнение
$$55x^2 - 12xy - 91y^2 = 59.$$

21.53. Решить в целых числах (x, y) уравнение
$$x^2 - 2xy + 2y^2 = 9.$$

21.54. (МГУ, Московская школа экономики, 2007, 6(8))
Найдите все целочисленные решения уравнения
$$x^2 - 14x + 4y^2 + 32y + 88 = 0.$$

21.55. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2004, 6(8))
Найдите все пары целых неотрицательных чисел $(k,\ m)$, являющихся решениями уравнения $2k^2 + 7k = 2mk + 3m + 36$.

21.56. Решить уравнение $xy + x - y = 2$ в целых числах.

21.57. (МГУ, психологический, 1975, 5(5))
Найти все целые положительные решения уравнения

$$2x^2 + 2xy - x + y = 112.$$

21.58. (МГУ, географический, 1998, 6(6))
Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению $3x = 5y^2 + 4y - 1$ и доказать, что для каждой такой пары сумма $x^3 + y^3$ является нечетным числом.

21.59. (МГУ, ИСАА, 1997, 7(7))
Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению

$$3xy + 14x + 17y + 71 = 0.$$

21.2.3 Разные задачи

21.60. (МГУ, мех-мат, 2000, устный)
Найти все пары натуральных чисел (m, n), для которых выполнено равенство $\log_m(n-7) + \log_n(5m-17) = 1$.

21.61. (МГУ, ВМиК, 2001, устный)
Решить уравнение в натуральных числах

$$k^3 - l^3 = kl + 61.$$

21.62.* (МГУ, мех-мат, 1990, 5(6))
Найти все тройки целых чисел (x, y, z), для которых

$$\log_2(2x + 3y - 6z + 3) + \log_2(3x - 5y + 2z - 2) +$$
$$+ \log_2(2y + 4z - 5x + 2) > z^2 - 9z + 17.$$

21.63.* (МГУ, экономический, 1989, 6(6))

Решить в целых числах уравнение

$$9x^2y^2+6xy^2-9x^2y+2x^2+y^2-18xy+7x-5y+6=0.$$

21.64. (МГУ, филологический, 2000, 6(6))

Расшифровать шифровку $\begin{pmatrix} * & + & * & = & \text{Л} \\ - & & \times & & : \\ * & + & * & = & \text{О} \\ \| & & \| & & \| \\ \text{Д} & : & \text{У} & = & \text{Б} \end{pmatrix}$, в которой:

1) буквы и звездочки означают цифры;
2) разные буквы означают разные цифры;
3) звездочки могут означать любые цифры.

21.65. Расшифровать шифровку $\begin{array}{r} +\begin{array}{r} с\,и\,н\,и\,ц\,а \\ с\,и\,н\,и\,ц\,а \end{array} \\ \hline п\,т\,и\,ч\,к\,и \end{array}$, в которой буквы означают цифры; разные буквы означают разные цифры.

21.66.* (МГУ, биологический, 2005, 7(7))

Задана функция f, причем $f(x+y)=f(x)+f(y)$ для всех рациональных чисел x, y. Известно, что $f(10)=-\pi$. Найти $f(-\frac{2}{7})$.

21.67.*(Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2005, 10(10))

Существуют ли функции f и g, определенные на всей числовой прямой и при каждом x удовлетворяющие равенствам:

$$f(g(x))=x^2,\ g(f(x))=x^3?$$

21.68.* (МГУ, Черноморский филиал, 2005, 8(10))

Решите уравнение $x^2+[x]=4$, где $[x]$ обозначает наибольшее целое, не превосходящее x.

Домашнее задание

21.69. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Найдите минимальное значение величины $x+y$, если x и y — целые числа, удовлетворяющие условиям $\begin{cases} |y-2x+1|\le 3, \\ y>-4. \end{cases}$

21.70. (МГУ, химический, 2005, 5(6))
Найти все целочисленные пары (x, y), удовлетворяющие уравнению: $\sqrt{2x-y-3}+\sqrt{2y-x+3}=2\sqrt{3-x-y}$.

21.71. (МГУ, ВМиК, 2007, 4(6))
Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие системе неравенств $\begin{cases} x-y\le -25, \\ x^2-y\le 8, \\ 4x+y\le 1. \end{cases}$

21.72. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 6(8))
Найти все целочисленные решения системы:

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-4)^2<5, \\ 4y\le x+11. \end{cases}$$

21.73. (МГУ, Московская школа экономики, 2006, 5(7))
Найдите все целочисленные решения системы $\begin{cases} |x^2-2x|<y+1, \\ y+|x-1|<2. \end{cases}$

21.74. (МГУ, химический, май 1997, 6(6))
Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению:

$$(x^2+y^2)(x+y-3)=2xy.$$

21.75. (МГУ, химический, май 2003, 5(6))
Найти все целочисленные пары (x, y), удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} y^3-3x^2-4y+18x-26>0, \\ y^3+x^2-4y-8x+14<0. \end{cases}$$

21.76. (МГУ, ВМиК, 1985, 5(6))
Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2-2y^2+2z^2+10z+6y+\frac{\sqrt{3}}{2}x-17}+$$
$$+\sqrt{3x^2-2\sqrt{3}(\cos\pi y+\cos\pi z)x+4}=0.$$

21.77. Написать цифры вместо букв:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,\textit{а б в г д е} & \underline{\textit{ж з и}} \\
\underline{\textit{м н п р}}\phantom{\textit{д е}} & \textit{к 8 л}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
-\,\textit{с т д} \\
\underline{\textit{у ф ч}} \\
-\,\textit{ш я э е} \\
\underline{\textit{ш я э е}} \\
0
\end{array}
$$

21.78. Найти десятичную цифру x числа $\overline{5x793x4}$, если известно, что это число делится на 9.

21.79. Найти цифры x и y пятизначного числа $42x4y$, если известно, что это число делится на 72.

21.80. (МГУ, филологический, 2000, 6(6))

Расшифровать шифровку $\begin{pmatrix} * & + & C & = & * \\ + & & : & & : \\ P & : & O & = & T \\ \| & & \| & & \| \\ * & - & K & = & * \end{pmatrix}$, в которой:

1) буквы и звездочки означают цифры;
2) разные буквы означают разные цифры;
3) звездочки могут означать любые цифры.

21.81. (МГУ, мех-мат, устный)

Найти все тройки натуральных чисел, для которых выполнено равенство $3xy + 3yz + 3xz = 5xyz + 3$.

21.82. Решить уравнение в натуральных числах:

$$xz + y = yx^2 + yz^2.$$

21.83. Даны десять чисел $S_1 \le S_2 \le \ldots \le S_{10}$, которые являются попарно взятыми суммами пяти чисел $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_5$. Выразить числа x через S.

21.84. Решить в натуральных числах уравнение

$$m \cdot n^2 = 10^5 n + m.$$

21.85. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2007, 8(10))
Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ целых чисел для некоторой (неизвестной) константы k удовлетворяет при каждом натуральном $n > 1$ условию $a_{n-1}a_{n+1} = ka_n$. Найти a_{2007}, если $a_1 = 1$ и $a_2a_3 = 2007$.

21.3 Целые числа, делимость

21.86. (МГУ, мех-мат, 1993, устный)
При каких целых n выражение $\dfrac{n^2 - n + 1}{n - 2}$ равно целому числу?

21.87. Доказать:

а) при целых n произведение $n(n+1)(n+2)$ делится на 3;

б) при целых n двучлен $n^3 + 5n$ делится на 6;

в) если p — простое число, $p > 3$, то число $p^2 - 1$ делится на 24;

г) если p и q простые и $p > q > 3$, то число $p^2 - q^2$ делится нацело на 24.

21.88. Дано: $m, n \in \mathbb{Z}$, $m^2 + n^2$ делится на 3. Доказать, что m и n делятся на 3.

21.89. Какие остатки может давать число n^2 ($n \in \mathbb{Z}$) при делении на 6?

21.90. (МГУ, экономический, 2008, 5(7))
Тринадцать пиратов делят клад золотых монет на палубе шхуны. При попытке разделить клад поровну оказалось, что остается 8 монет. Налетевшим штормом двух пиратов смыло за борт. Когда оставшиеся пираты снова стали поровну делить клад, то лишними оказались 3 золотые монеты. Затем в перестрелке погибли еще 3 пирата. Когда уцелевшие пираты опять стали делить клад, то на этот раз оказалось, что остается 5 монет. Из какого количества монет состоял клад, если для его переноски достаточно сундука, вмещающего 500 золотых монет.

21.91. Найти двузначное число, если известно, что две последние цифры его квадрата совпадают с этим числом.

21.92. Является ли полным квадратом число $111\ldots1$ (300 цифр)?

21.93. Доказать равенство $(\underbrace{6\ldots6}_{n\text{ цифр}})^2+\underbrace{8\ldots8}_{n\text{ цифр}}=\underbrace{4\ldots4}_{2n\text{ цифр}}$.

21.94. Дана арифметическая прогрессия, члены которой — целые положительные числа. Известно, что в этой прогрессии есть член, являющийся полным квадратом. Доказать, что прогрессия содержит бесконечное множество таких членов.

21.95. Доказать, что следующие числа составные: а) $2\ldots21$ (1996 двоек); б) $2^{3^{1996}}+1$; в) $2^{10}+5^{12}$; г) $22^{33}+33^{22}$; д) $223^{333}+331^{222}$.

21.96. Найти две последние цифры числа $7^{9^{9^9}}$.

21.97. Доказать, что при любом натуральном n числа $21n+1$ и $14n+3$ — взаимно простые.

21.98. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2011, 4(10))
Натуральные числа m, n таковы, что дробь $\dfrac{m}{n}$ несократима, а дробь $\dfrac{4m+3n}{5m+2n}$ сократима. На какие натуральные числа она сокращается?

21.99. (МГУ, "Ломоносов-2009", 5(9))
Каким может быть наибольший общий делитель натуральных чисел m и n, если при увеличении числа m на 6 он увеличивается в 4 раза?

21.100. (МГУ, "Ломоносов-2007", 6(10))
Натуральные числа a, b и c таковы, что $HOK(a,b)=60$ и $HOK(a,c)=270$ ($HOK(x,y)$ — наименьшее общее кратное чисел x и y). Найти $HOK(b,c)$.

21.101. (МГУ, “Ломоносов-2011”, заочный тур, 3(10))
Найдите все двузначные числа вида $\overline{XY}$, если число, имеющее шестизначную десятичную запись $\overline{64X72Y}$, кратно 72.

21.102. Доказать иррациональность следующих чисел: а) $\sqrt{2}$; б) $\log_2 3$; в) $\cos 10^\circ$; г) $\sin 10^\circ$.

21.103. Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящиеся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

21.104. Доказать, что в натуральном ряду существует 100, идущих подряд, составных чисел.

21.105. Доказать, что простых чисел бесконечно много.

21.106. (ЕГЭ, 2010–2011, С6 – *демоверсия*)
Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть чисел, наибольший общий делитель которых равен 1) a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятичную запись числа b, то получится десятичная запись числа, равного $\frac{b}{a}$.

21.107. (ЕГЭ, 2011, С6)
Сумма двух натуральных чисел равна 43, а их наименьшее общее кратное в 120 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите эти числа.

21.108. (ЕГЭ, 2012, С6 – *демоверсия*)
На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8. а) Сколько чисел написано на доске? б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных? в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Домашнее задание

21.109. Найти НОД$(54, 72)$ и НОК$(54, 72)$.

21.110. (МГУ, ВМиК (отд. бакалавров), 2007, 1(6)) Найдите наибольший общий делитель чисел $n = 720$, $m = 756$, $k = 468$.

21.111. Доказать, что для любого натурального n наименьшее общее кратное чисел n^2+6n+9 и $n+4$ равно $n^3+10n^2+33n+36$.

21.112. Доказать, что для любого натурального n наибольший общий делитель чисел $n^2 + 10n + 21$ и $n^2 + 9n + 18$ равен $n + 3$.

21.113. Сколько различных натуральных делителей имеет число $N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$, где числа $2 \le p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ — простые, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натуральные?

21.114. Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных натуральных делителя (включая единицу и само число).

21.115. Доказать, что для любого целого n число $n^3 + 2n$ делится на 3.

21.116. Доказать, что при любых натуральных n число $\dfrac{n^4}{24} + \dfrac{n^3}{4} + \dfrac{11n^2}{24} + \dfrac{n}{4}$ принимает натуральные значения.

21.117. Доказать, что $n^5 - 5n^3 + 4n$ при целых $n > 2$ делится на 120.

21.118. Доказать, что для любого целого n число $n^5 - n$ делится на 30.

21.119. Пусть длины всех трех сторон прямоугольного треугольника выражаются в целых числах. Могут ли длины обоих катетов быть нечетными числами?

21.120. Доказать, что ни при каких целых n число $n^2 + 1$ не делится на 3.

21.121. Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел никогда не является квадратом целого числа.

21.122. Доказать, что у числа, являющегося точным квадратом, произведение двух последних цифр четно.

21.123. Доказать, что если между цифрами числа 1331 написать по равному количеству нулей, то получится точный куб.

21.124. Доказать, что нет целых чисел, которые от перестановки начальной и конечной цифры увеличивались бы в 5, в 6 или в 8 раз.

21.125. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)
Может ли целое число (записанное в десятичной системе счисления) при зачеркивании первой цифры уменьшиться: а) в 58 раз; б) в 57 раз?

21.126. Доказать, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 9.

21.127. Какие остатки может давать число n^2 $(n \in \mathbb{Z})$ при делении на а) 4; б) 10?

21.128. Какие остатки может давать число n^4 $(n \in \mathbb{Z})$ при делении на 5?

21.129. Дано: $m, n \in \mathbb{Z}$, $m^2 + n^2$ делится на 7. Доказать, что m и n делятся на 7.

21.130. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)
Докажите, что при любом натуральном n число $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

21.131. Доказать, что следующие уравнения не имеют решения в целых числах: а) $x^2 + 1 = 3y$; б) $y^2 = 5x^2 + 6$; в) $2^x - 1 = y^2$ $(x > 1)$; г) $x(x^2 + 1) = 48$.

21.132. Доказать, что трехчлен $x^2 + 5x + 16$ ни при каком целом значении x не делится на 169.

21.133. (МГУ, ИСАА, 2000, 6(7))
Определите сумму всех таких натуральных n, для которых числа 5600 и 3024 делятся без остатка на n и $n+5$ соответственно.

21.134. Найти все натуральные n, при которых дробь $\dfrac{3n^2-3n+20}{n-1}$ принимает целые значения.

21.135. (МГУ, мех-мат, 1993, устный)
Сократима ли дробь $\dfrac{n+3}{2n+7}$ хотя бы при одном целом n?

21.136. Доказать, что при любом натуральном n дробь $\dfrac{3n+5}{5n+8}$ несократима.

21.137. (МГУ, мех-мат, 1998, устный)
Сколько различных целочисленных пар (x, y) удовлетворяет уравнению $x^2 = 4y^2 + 2025$?

21.138. (МГУ, мех-мат, 1998, устный)
Доказать, что для любого простого числа $p > 5$ число $p^4 - 50p^2 + 49$ делится на 2880.

21.139. (МГУ, мех-мат, 1998, устный)
Найти количество трехзначных чисел, делящихся на 5 или 7 (возможно одновременно), но не делящихся на 3.

21.140. Найти последнюю цифру числа 3^{1993}.

21.141. Являются ли полными квадратами числа:
а) $222\ldots2$ (n цифр); б) $666\ldots6$ (n цифр)?

21.142. Доказать, что в последовательности: 11, 111, 1111, 11111, … нет числа, которое является квадратом натурального.

21.143.* Доказать, что все числа вида
16, 1156, 111556, 11115556, … являются полными квадратами.

21.144. Найти наименьшее число, записываемое одними единицами, которое делилось бы на число $33\ldots3$ (сто троек).

21.145. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)
Пусть A, B, C — три натуральных числа, записанных в десятичной системе: A — единицами, число которых $2m$, B — единицами, число которых $m+1$, C — шестёрками, число которых m. Докажите, что число $A+B+C+8$ — квадрат некоторого целого числа.

21.146. Сколькими нулями оканчивается произведение всех целых чисел от 1 до 100 включительно? **"Тест"**

21.147. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)
Найдите все четырехзначные числа, являющиеся квадратом целого числа, у которых первая цифра совпадает со второй, а третья цифра совпадает с четвертой.

21.148. Найти трехзначное число, являющееся точным квадратом N^2, и такое, что произведение его цифр было равно $N-1$.

21.149. Доказать, что всякое простое число при делении на 30 дает в остатке снова простое число.

21.150. Найти все простые числа p такие, что p^2+8 — простое число.

21.151. Доказать, что $2010^{2010}-1$ делится на 2009.

21.152. Доказать, что следующие числа составные: а) $2^{5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{5}}}}}}+1$ (1000 пятерок); б) $2^{3^{1996}}-1$.

21.153. Доказать иррациональность следующих чисел:
а) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} 5^\circ$; г) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3n}$, n — целое число; д) $\cos n^\circ$, n — целое число от 1 до 89, но не равное 60.

21.154. Существуют ли иррациональные числа α и β такие, что а) $\alpha+\beta$; б) $\alpha\cdot\beta$; в) α^β рациональны?

21.155. Найти все числа вида $\overline{34x5y}$, такие, что делятся на 36.

21.156. Доказать, что между двумя неравными рациональными числами есть иррациональное число.

Ответы, указания, решения

17.1. *Решение.* Если $a-2\neq 0$, т. е. $a\neq 2$, то делим обе части уравнения на $a-2$ и находим, что $x=\dfrac{3}{a-2}$.

Если $a-2=0$, т. е. $a=2$, то, подставляя это значение a в исходное уравнение, получаем уравнение $0\cdot x=3$, решений не имеющее.

Ответ. $\begin{cases} a\neq 2, \\ x=\dfrac{3}{a-2}; \end{cases}$ $\begin{cases} a=2, \\ x\in\varnothing. \end{cases}$

17.3. $\begin{cases} a=0, \\ x\in\varnothing; \end{cases}$ $\begin{cases} a\neq 0, \\ x=\dfrac{1}{a}. \end{cases}$ **17.4.** $\begin{cases} a\neq -3, \\ x=\dfrac{1}{a+3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a=-3, \\ x\in\varnothing. \end{cases}$

17.5. $\begin{cases} a\neq \pm 2, \\ x=\dfrac{a-3}{a+2}; \end{cases}$ $\begin{cases} a=2, \\ x\in\mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a=-2, \\ x\in\varnothing. \end{cases}$ **17.6.** $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

17.7. $\begin{cases} a<0, \\ x\in\varnothing; \end{cases}$ $\begin{cases} a=0, \\ x=0; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ x=\pm\sqrt{a}. \end{cases}$ **17.8.** 0; 1.

17.10. *Решение.* Если $a=0$, то получаем уравнение $-x-1=0$, имеющее корень $x=-1$ меньший 1. Этот случай нам не подходит.

Если $a\neq 0$, то разделим обе части уравнения на a и обозначим квадратный трехчлен через $f(x)$:

$$f(x)=x^2-\frac{2a+1}{a}x+\frac{3a-1}{a}=0.$$

Ветви параболы $y=f(x)$ направлены вверх. Для выполнения условий задачи необходимо, во-первых, чтобы корни уравнения существовали, т. е. дискриминант $D\geq 0$. Во-вторых, оба корня уравнения находятся правее 1 на оси x, если вершина параболы $x_{в}=\dfrac{2a+1}{2a}$ лежит правее 1 и $f(1)>0$.

Таким образом, условие задачи эквивалентно системе

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_в > 1, \\ f(1) > 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{(2a+1)^2}{a^2} - 4 \cdot \dfrac{3a-1}{a} \geq 0, \\ \dfrac{2a+1}{2a} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2a} > 0 \Leftrightarrow a > 0, \\ 1 - \dfrac{2a+1}{a} + \dfrac{3a-1}{a} > 0, \end{cases}$$

(при $a > 0$ отбрасываем положительные знаменатели дробей)

$$\iff \begin{cases} 4a^2 + 4a + 1 - 12a^2 + 4a \geq 0 \Leftrightarrow 8a^2 - 8a - 1 \leq 0, \\ a > 0, \\ a - 2a - 1 + 3a - 1 > 0 \Leftrightarrow 2a > 2 \Leftrightarrow a > 1, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{6}}{4} \leq a \leq \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}, \\ a > 1, \end{cases} \iff 1 < a \leq \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ. $\left(1;\ \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$.

17.12. При $a = -3$ эта сумма равна 18. **17.13.** $-\dfrac{1}{2}$; 0; $\dfrac{3}{2}$.

17.14. 2007 при $a \in [-1338\sqrt{669};\ 1338\sqrt{669}]$; при остальных значениях a существует только один корень заданного уравнения.

17.15. 1; 2; 6. **17.16.** $(-4;\ 0) \cup (0;\ 1)$.

17.18. $\left(\dfrac{9-\sqrt{17}}{16};\ \dfrac{1}{3}\right) \bigcup \left(\dfrac{1}{3};\ \dfrac{9+\sqrt{17}}{16}\right)$.

17.19. $(-\sqrt{2};\ -1) \cup (1;\ \sqrt{2})$. **17.20.** $\left(-1;\ -\dfrac{2}{3}\right)$.

17.21. $\dfrac{a(a^2-18a+9)}{27}$. **17.22.** $a=2$. **17.23.** $\{0\} \cup [2+\sqrt{3};\, 2+\sqrt{5}]$.

17.24. $a \in (12;\ 13)$. **17.25.** $(1, 4)$. **17.26.** $(4-\sqrt{7};\ 4+\sqrt{7})$.

17.27. $a = 2$, $b = 3$. **17.28.** $a = 2$. **17.29.** $\begin{cases} a = 1, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq 1, \\ x = a. \end{cases}$

17.30. $y_{\min} = 1$, $y_{\max} = 3$.

17.32. При $a = -1$ выражение $\dfrac{x-a}{a+1}$ не определено; $\begin{cases} a \neq -1, \\ x = a. \end{cases}$

17.33. $\begin{cases} a = \pm 4, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq \pm 4, \\ x = 4. \end{cases}$ **17.35.** $\begin{cases} a = 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq 0, \\ x = \dfrac{a}{4}. \end{cases}$

17.37. $[0;\ 1]$. **17.38.** $\begin{cases} a < 2, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2, \\ x = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} a \geq 2, \\ x = -a + 1;\ a - 3. \end{cases}$

17.39. $\begin{cases} |a| > 1, \\ x = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} |a| < 1, \\ x = 1;\ \dfrac{a+7}{a-1}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = -1, \\ -3 \leq x \leq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1, \\ 1 \leq x. \end{cases}$

17.40. $-8;\ -4$. **17.41.** $\left(-\dfrac{5}{2};\ 7\right)$; $\left[\dfrac{9-\sqrt{211}}{2};\ -\dfrac{5}{2}\right] \bigcup \{7\}$.

17.42. $[-8;\ 6]$. **17.43.** $\left[\dfrac{4}{3};\ 2\right]$. **17.44.** $[-4;\ 2]$.

17.45. $\begin{cases} |a| > 1, \\ x = -3; \end{cases}$ $\begin{cases} |a| < 1, \\ x = -3;\ \dfrac{7-3a}{a+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = -1, \\ x \leq -3; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1, \\ -3 \leq x \leq 2. \end{cases}$

17.46. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < -1, \\ 1 \leq a, \end{array} \right. \\ x = \dfrac{2}{a+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \leq a < -\dfrac{1}{3}, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} -\dfrac{1}{3} \leq a < 1, \\ x = \dfrac{-4}{a-1};\ \dfrac{2}{a+1}. \end{cases}$

17.47. $\begin{cases} a < -1, \\ x = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} a = -1, \\ x \geq 4; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 < a < 1, \\ x = 4;\ \dfrac{4a-8}{a+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1, \\ -2 \leq x \leq 4; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1, \\ x = 4. \end{cases}$

17.48. $-2;\ -\dfrac{1}{2}$. **17.49.** -5. **17.50.** $\begin{cases} a < 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a \geq 0, \\ x = a^2. \end{cases}$

17.52. $\begin{cases} a < 1, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a \geq 1, \\ x = \dfrac{1+\sqrt{2a-1}}{2}. \end{cases}$

17.53. $\begin{cases} a \in (-\infty;\ 0) \bigcup \left(\dfrac{1}{2};\ +\infty\right), \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leq a \leq \dfrac{1}{2}, \\ x = \dfrac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}. \end{cases}$

17.54. $\begin{cases} a \leq 1, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1, \\ x = \dfrac{a}{a^{\frac{2}{3}}-1}. \end{cases}$

17.55. $\begin{cases} a=0, \\ x=0; \end{cases}$ $\begin{cases} a\in(-\infty;\,0)\cup(0;\,1), \\ x\in\emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a\geq 1, \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}. \end{cases}$

17.56. $\begin{cases} a\in\mathbb{R}, \\ x=a^3+1. \end{cases}$ **17.57.** $\begin{cases} a=1, \\ x\geq 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a\neq 1, \\ x=2. \end{cases}$

17.58. $\begin{cases} a<3, \\ x=3; \end{cases}$ $\begin{cases} a\geq 3, \\ \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=a. \end{array}\right. \end{cases}$ **17.59.** $x=\sqrt{3}$.

17.60. $\begin{cases} a<0, \\ x\in\emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a\geq 0, \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{4a^2+9}}{2}. \end{cases}$

17.62. Если $a<0$, то нет решений; если $a=0$, то три решения; если $0<a<1$, то четыре решения; если $a=1$, то два решения; если $a>1$, то нет решений.

17.63. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a\leq 0, \\ a>1, \end{array}\right. \\ x\in\emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} 0<a\leq 1, \\ x=\pm\left(\dfrac{1-a^2}{2a}\right)^2. \end{cases}$

17.64. $\begin{cases} 0\leq a<\dfrac{1}{2},\ a\geq 1, \\ x=\dfrac{a^2}{2a-1}; \end{cases}$ $\begin{cases} a<0,\ \dfrac{1}{2}\leq a<1, \\ x\in\emptyset. \end{cases}$

17.65. $\begin{cases} -\sqrt{2}-1<a<\sqrt{2}-1, \\ x\in\emptyset; \end{cases}$

$\begin{cases} a\leq -1-\sqrt{2},\ \sqrt{2}-1\leq a\leq \frac{1}{2}, \\ x=\dfrac{a+1\pm\sqrt{a^2+2a-1}}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} a>\frac{1}{2}, \\ x=\dfrac{a+1-\sqrt{a^2+2a-1}}{2}. \end{cases}$

17.66. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<-1, \\ a>\sqrt{2}, \end{array}\right. \\ x\in\emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} -1\leq a<1, \\ x=\dfrac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} 1\leq a\leq\sqrt{2}, \\ x=\dfrac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}. \end{cases}$

17.67. $\begin{cases} a<-\dfrac{1}{4}, \\ x\in\emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} -\dfrac{1}{4}\leq a\leq 0, \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ x=\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}. \end{cases}$

17.68. $\left(-\infty;\,-\dfrac{8}{7}\right)\bigcup\left(-\dfrac{1}{2};\,0\right)\bigcup\left(\dfrac{8}{9};\,+\infty\right)$. **17.69.** $[-3;\,3]$.

17.70. $[17;\ +\infty)$. **17.71.** $(1;\ 0)$. **17.72.** $\begin{cases} a \le 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ x = \log_2 a. \end{cases}$

17.73. $\begin{cases} a < 0, \\ x = \log_2 a^2; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ x = \log_2 a;\ \log_2 a^2. \end{cases}$

17.74. $\begin{cases} a < -\frac{3}{2}, \\ x = \log_5 \dfrac{a - 1 + \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} -\frac{3}{2} \le a < 11, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$

$\begin{cases} a = 11, \\ x = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 11, \\ x = \log_5 \dfrac{a - 1 \pm \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2}. \end{cases}$

17.75. $a \in (-\infty;\ 1] \bigcup \left\{\dfrac{5}{4}\right\} \bigcup \left[\dfrac{4}{3};\ +\infty\right)$.

17.76. При $a \le 0$ или $a = 1$ уравнение не определено;
$\begin{cases} a > 0,\ a \ne 1, \\ x = a^2. \end{cases}$

17.77. При $a \le 0$ или $a = 1$ уравнение не определено;
$\begin{cases} a = \dfrac{1}{9}, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a \in \left(0;\ \dfrac{1}{9}\right) \bigcup \left(\dfrac{1}{9};\ 1\right) \bigcup (1;\ +\infty), \\ x = 3^{\dfrac{10 \log_3 a}{3(\log_3 a + 2)}}. \end{cases}$

17.78. $(7;\ 7{,}5) \cup (7{,}5;\ +\infty)$. **17.80.** $\begin{cases} a \le 1, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1, \\ x = a - 1,\ \dfrac{1}{a-1}. \end{cases}$

17.81. При $a \le 1$ уравнение не определено;
$\begin{cases} 1 < a \le 3, \\ x = 1 \pm \sqrt{1 - 2\log_9 a}; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 3, \\ x \in \emptyset. \end{cases}$

17.82. $\begin{cases} a \ne \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \\ x = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \\ x = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

17.84. $a \ge 0$.

17.85. $\begin{cases} a \in (-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty), \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le a \le 1, \\ x = \pm \arcsin \sqrt{1-a} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

17.86. $(-1;\ 0), (0;\ 0), (1;\ 0)$. **17.87.** $2 \arccos\left(\pm \dfrac{1}{3}\right)$.

17.88. $\left[-2;\ -\dfrac{1}{2}\right)\bigcup\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}\bigcup\{2\}$. **17.89.** $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{2}$.

17.90. $(-\infty;\ -2]\bigcup\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}\bigcup\left[0;\ \dfrac{1}{2}\right]\bigcup\{2\}$.

17.91. $\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$. **17.92.** $\left(-\infty;\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ +\infty\right)$.

17.93. $\begin{cases}a=\pi+2\pi k,\\ x\in\mathbb{R};\end{cases}$ $\begin{cases}a\neq\pi+2\pi k,\\ x=(-1)^l\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{a}{2}+l\pi,\end{cases}$ $k,l\in\mathbb{Z}$.

17.94. $\begin{cases}|a|>1,\\ x\in\emptyset;\end{cases}$ $\begin{cases}|a|\leq 1,\\ x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}.\end{cases}$

17.95. $\begin{cases}a\in[4;\ 5],\\ x=\pm\arcsin\sqrt{a-4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z};\end{cases}$ $\begin{cases}a\in(-\infty;4)\cup(5;+\infty),\\ x\in\emptyset.\end{cases}$

17.96. $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a<-3,\\ -2<a,\end{array}\right.\\ x\in\emptyset;\end{cases}$ $\begin{cases}-3\leq a\leq -2,\\ x=\pm\arccos\sqrt{a+3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$

17.97. $(0;\ 0),(1;\ 0)$.

17.98. При $a=0$ выражение не определено;

$\begin{cases}a=-1,\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z};\end{cases}$ $\begin{cases}a=1,\\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z};\end{cases}$ $\begin{cases}a\neq\pm1,\\ x\in\emptyset.\end{cases}$

17.99. $\begin{cases}a\in\left[\dfrac{3-\sqrt{17}}{2};\ 1\right]\bigcup\left[2;\ \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right],\\ x=-\dfrac{\pi}{3}\pm\arccos\dfrac{a^2-3a}{2}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z};\end{cases}$

$\begin{cases}a\in\left(-\infty;\ \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\bigcup(1;\ 2)\bigcup\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};\ +\infty\right),\\ x\in\emptyset.\end{cases}$

17.100. $\begin{cases}a=-1,\\ x=2k\pi,\ \ \dfrac{\pi}{2}+k\pi;\end{cases}$ $\begin{cases}a=0,\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi;\end{cases}$

$\begin{cases}a=1,\\ x=\pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}+2k\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$.

17.101. $\frac{3\pi}{4}+2k\pi$; $\frac{\pi}{12}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **17.102.** $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\bigcup\{1\}\bigcup\left(\frac{3}{2};4\right]$.

17.104. $\begin{cases} a=k\pi, \\ x=2k\pi-2; \end{cases}$ $\begin{cases} a\neq k\pi, \\ x\in\emptyset, \end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$.

17.105. $\begin{cases} b=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, \\ x=\frac{\pi}{6}+2l\pi, \end{cases}$ $\begin{cases} b=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi, \\ x=\frac{5\pi}{6}+2l\pi, \end{cases}$ $\begin{cases} b\neq\pm\frac{5\pi}{6}+2k\pi, \\ x\in\emptyset, \end{cases}$ $k,l\in\mathbb{Z}$.

17.106. $(2;\,3]$. **17.107.** $(-2,-6)$, $(6,2)$. **17.108.** -4.

17.109. $a=-2,\ b=-\frac{7}{2}$. **17.110.** $-\frac{1}{2}$; 1; $\frac{-7\pm4\sqrt{2}}{2}$. **17.111.** 3.

17.112. $\alpha=4$. **17.113.** $a<6$. **17.114.** $b\neq0$. **17.115.** $(-2,6),(6,-2)$.

17.117. 0; 2. **17.118.** 0; $-\frac{1}{4}$. **17.119.** 0.

17.120. $a=0\Rightarrow$ одно решение; $a\neq0\Rightarrow$ два решения.

17.121. 1; 2; $1\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. **17.122.** $-\frac{9}{10}$. **17.123.** ±2.

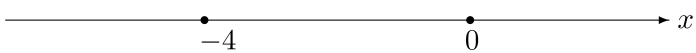
17.124. 0; $2\sin1$. **17.125.** $-\frac{2}{3}$; 0.

17.126. *Решение.* Решая первое уравнение системы как квадратное относительно x, найдем, что $D/4=(a+1)^2-a^2-2a+3=4=2^2$, значит, $x_1=a+1-2=a-1$, $x_2=a+1+2=a+3$.

Из второго уравнения системы вытекает, что единственное решение для y может быть только, если $y=a$. Следовательно,

$$\sqrt{x^2}+\sqrt{(x+4)^2}=4 \iff |x|+|x+4|=4.$$

Решим последнее уравнение по схеме решения уравнений с несколькими отдельно стоящими модулями. Найдем точки, в которых выражения под знаком модуля меняют знак. Это точки $-4;0$. Отметим их на числовой прямой. Числовая прямая разобьётся на три промежутка. Раскрывая модули, решим уравнение на каждом из полученных промежутков. При этом концы промежутков включаем в рассмотрение каждый раз.



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -4, \\ -x - x - 4 = 4 \Leftrightarrow x = -4, \end{cases} \Leftrightarrow x = -4, \\ \begin{cases} -4 \le x \le 0, \\ -x + x + 4 = 4 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-4; 0], \\ \begin{cases} 0 \le x, \\ x + x + 4 = 4 \Leftrightarrow x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, \end{array}\right. \Longleftrightarrow x \in [-4; 0].$$

Система имеет решение, если $x_1, x_2 \in [-4;\ 0]$, то есть

$$\left[\begin{array}{l} -4 \le a - 1 \le 0, \\ -4 \le a + 3 \le 0, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \le a \le 1, \\ -7 \le a \le -3. \end{array}\right.$$

Система имеет единственное решение по x, если при этом $a \ne -3$.

Ответ. $[-7;\ -3) \cup (-3;\ 1]$.

17.127. *Решение.* Заметим, что если пара (x, y) является решением, то пара $(x, -y)$ также является решением системы. Отсюда решением должна быть пара $(x, 0)$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 0 = a, \\ x^2 = b. \end{cases}$$

Рассмотрим систему при $a = 0$:

$$\begin{cases} x^y = 1, \\ x^2 + y^2 = b, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x > 0,\ x \ne 1, \\ y = 0, \\ x^2 = b, \end{cases} (1) \quad \text{или} \begin{cases} x = 1, \\ y \in \mathbb{R}, \\ y^2 = b - 1. \end{cases} (2)$$

При $b \le 0$ системы (1) и (2) не имеют решений.

При $0 < b < 1$ система (2) не имеет решений, система (1) имеет единственное решение $x = \sqrt{b}$, $y = 0$.

При $b = 1$ система (1) не имеет решений, система (2) имеет единственное решение $x = 1$, $y = 0$.

При $b > 1$ система (2) имеет два различных решения.

Ответ. $a = 0$; $0 < b \le 1$.

17.128. $a = 1$. **17.129.** $-\frac{3}{2}$. **17.130.** $\frac{1}{8}$. **17.131.** $0; \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$.
17.132. 2. **17.133.** $\left[\frac{4}{5}; \frac{72-116\sqrt{14}}{5}\right]$. **17.134.** 9; 49. **17.135.** 9.
17.136. -2. **17.137.** $\pm\frac{1}{3}; \pm\frac{1}{2}$. **17.138.** 2. **17.139.** $0; \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.
17.140. $\pm(3,3); \pm(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$. **17.141.** -1; 0. **17.142.** $\sqrt{2}$.
17.143. $\{-4\sqrt{2}\} \cup (-4;\ 4]$. **17.144.** $[2;\ 3) \cup (3;\ 4]$.
17.145. $\{-1\} \cup (1;\ 3) \cup (4;\ 6]$. **17.146.** $\frac{4}{3}$. **17.147.** 4.
17.148. $-\frac{1}{4}; -\frac{1}{32}$. **17.149.** 2. **17.150.** $\begin{cases} a = -1, \\ x = -4. \end{cases}$.
17.151. 2; 4. **17.152.** 6. **17.153.** $\left[\frac{17-\sqrt{29}}{2}; 9\right)$.

18.1. *Решение.* Рассмотрим 3 случая.

Если $a-2 < 0$, т. е. $a < 2$, то разделим обе части неравенства на отрицательное число $a-2$. Знак неравенства при этом поменяется на противоположный:

$$x \geq \frac{3}{a-2}.$$

Если $a-2 = 0$, т. е. $a = 2$, то неравенство приобретет вид:

$$0 \cdot x \leq 3 \iff x \in \mathbb{R}.$$

Если $a-2 > 0$, т. е. $a > 2$, то разделим все части неравенства на положительное число $a-2$. Знак неравенства при этом не изменится:

$$x \leq \frac{3}{a-2}.$$

Ответ. $\begin{cases} a < 2, \\ x \geq \dfrac{3}{a-2}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 2, \\ x \leq \dfrac{3}{a-2}. \end{cases}$

18.3. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < -3, \\ a > 1,\ a \neq 3, \end{array}\right. \\ x \leq \dfrac{a+1}{a-3}; \end{cases}$ $\begin{cases} -3 < a < 1, \\ x \geq \dfrac{a+1}{a-3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = \pm 3, \\ x \in \emptyset. \end{cases}$

18.4. $\begin{cases} a < -3, \\ x \le \dfrac{2}{a+3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = -3, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a > -3, \\ x \ge \dfrac{2}{a+3}. \end{cases}$

18.5. $\begin{cases} a \in \left(-\infty;\ \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\right) \bigcup \left(-3;\ \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right), \\ x \ge \dfrac{a+3}{a^2+3a-1}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = -3, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$

$\begin{cases} a \in \left(\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2};\ -3\right) \bigcup \left(\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2};\ +\infty\right), \\ x \le \dfrac{a+3}{a^2+3a-1}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = \dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}, \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

18.6. $[-4;\ 1] \cup (3;\ 4]$.

18.7. $\begin{cases} a < 0, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x \ne 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ x \in (-\infty;\ -\sqrt{a}\,) \cup (\sqrt{a};\ +\infty). \end{cases}$

18.8. $\begin{cases} a < 1, \\ x \in [2a;\ 3-a]; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1, \\ x = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1, \\ x \in [3-a;\ 2a]. \end{cases}$

18.9. $\begin{cases} a < -1, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le a < 0, \\ \dfrac{1+\sqrt{1+a}}{a} \le x \le \dfrac{1-\sqrt{1+a}}{a}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x \le -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} a > 0, \\ x \in \left(-\infty;\ \dfrac{1-\sqrt{1+a}}{a}\right] \bigcup \left[\dfrac{1+\sqrt{1+a}}{a};\ +\infty\right). \end{cases}$

18.10. $\left[-2;\ \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right]$. **18.11.** $\dfrac{1}{4}$; 1. **18.12.** $\left(\dfrac{1}{2};\ 4+\sqrt{6}\right)$.

18.13. $\begin{cases} a < 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ -\sqrt{a} \le x \le \sqrt{a}. \end{cases}$ **18.14.** $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x > \sqrt[3]{a}. \end{cases}$

18.15. $\begin{cases} a \in (-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty), \\ \dfrac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2} < x < \dfrac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} a \in [-2;\ 2], \\ x \in \emptyset. \end{cases}$

18.16. $\begin{cases} a \in (-\infty;\ 1] \cup [3;\ +\infty), \\ \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{a-2-\sqrt{a^2-4a+3}}{2}, \\ x > \dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a+3}}{2}; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} a \in (1;\ 3), \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

18.17. $\begin{cases} a < -2, \\ \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 2a}}{a}, \\ \dfrac{-a - \sqrt{a^2 + 2a}}{a} \le x; \end{array} \right. \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \le a \le 0, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < a, \\ \dfrac{-a - \sqrt{a^2 + 2a}}{a} \le x \le \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 2a}}{a}. \end{cases}$

18.19. $a \le 20$. **18.21.** 1) $a > 1$; 2) $a \ge 0$.

18.22. $\begin{cases} a > 0, \\ b \ge 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ x \in \left(-\infty;\ -\sqrt{-\dfrac{a}{b}}\right] \bigcup \left[\sqrt{-\dfrac{a}{b}};\ +\infty\right); \end{cases}$

$\begin{cases} a \le 0, \\ b > 0, \\ x \in \left[-\sqrt{-\dfrac{a}{b}};\ \sqrt{-\dfrac{a}{b}}\right]; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le 0, \\ b \le 0, \\ x \in (-\infty;\ +\infty.) \end{cases}$

18.23. $x \in [3 - \sqrt{6};\ 2] \cup [5;\ 3 + \sqrt{6}]$.

18.24. $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (2;\ +\infty)$.

18.25. $(-\infty;\ -35]$. **18.26.** $b \ne \dfrac{k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$.

18.27. $\begin{cases} a < 2, \\ x \in (-\infty; a) \cup [2; +\infty); \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2, \\ x \ne 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 2, \\ x \in (-\infty; 2] \cup (a; \infty). \end{cases}$

18.28. $\begin{cases} a < -2, \\ x \in \left(-\infty;\ \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right] \bigcup \left[\dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2};\ 0\right); \end{cases}$

$\begin{cases} -2 \le a < 2, \\ x < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \le a, \\ x \in (-\infty;\ 0) \bigcup \left[\dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2};\ \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right]. \end{cases}$

18.29. $(-\infty;\ -6) \bigcup \left(-\dfrac{1}{3};\ +\infty\right)$.

18.30. $\begin{cases} a < 1, \\ a \le x < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1, \\ 1 < x \le a. \end{cases}$

18.31. $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \in \left[\dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2};\ 0\right) \bigcup \left[\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2};\ +\infty\right). \end{cases}$

18.32. $(3-2\sqrt{3};\ 2\sqrt{15}-6)$.

18.33. $\begin{cases} a<0, \\ \left[\begin{array}{l} x \le a-2, \\ -2<x<3; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} a=0, \\ \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ -2<x<3; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} 0<a<5, \\ \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ a-2 \le x<3; \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} a=5, \\ x<-2; \end{cases}$ $\begin{cases} 5<a, \\ \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ 3<x \le a-2. \end{array}\right. \end{cases}$

18.34. $[-3;\ 3]$.

18.35. $\left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right] \bigcup \left(\dfrac{1}{3}; \infty\right)$.

18.36. $\begin{cases} a<0, \\ x \in \left(-\infty;\ \dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}\right] \bigcup \left(0;\ \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right]; \end{cases}$

$\begin{cases} a=0, \\ 0<x\le 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 0<a<\dfrac{1}{4}, \\ x \in \left(0;\ \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right] \bigcup \left[\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2a};\ +\infty\right); \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge \dfrac{1}{4}, \\ x>0. \end{cases}$

18.37. $\dfrac{1}{16}$.

18.38. $\begin{cases} a \le 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ -a+5<x<a+5. \end{cases}$

18.39. $\begin{cases} a<-3, \\ \dfrac{14}{a+3} \le x \le \dfrac{-4}{a+3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a=-3, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a>-3, \\ \dfrac{-4}{a+3} \le x \le \dfrac{14}{a+3}. \end{cases}$

18.40. $\begin{cases} a<0, \\ x \in (-\infty;\ 2a); \end{cases}$ $\begin{cases} a=0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ x \in (0;\ +\infty). \end{cases}$

18.41. $a>\dfrac{3}{2}$.

18.42. $[-1;\ 5]$.

18.43. $\begin{cases} a<0, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a=0, \\ x \ne 4; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ x \in (-\infty;\ -a+4) \cup (a+4;\ +\infty). \end{cases}$

18.44. $\begin{cases} a \le 0, \\ x \ge -\dfrac{a}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ x \in \emptyset. \end{cases}$

18.45. $\begin{cases} a \le 4, \\ -\dfrac{a+2}{3} \le x \le 2-a; \end{cases}$ $\begin{cases} a>4, \\ x \in \emptyset. \end{cases}$

18.46. $\begin{cases} a < 2, \\ \dfrac{9}{a-2} \le x \le \dfrac{-11}{a-2}; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 2, \\ \dfrac{-11}{a-2} \le x \le \dfrac{9}{a-2}. \end{cases}$

18.47. $\begin{cases} a < 0, \\ \left[\begin{array}{l} 0 < x < -a, \\ x > -a; \end{array} \right. \end{cases}$ $\begin{cases} a = 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < -3a, \\ -\dfrac{a}{3} < x < 0. \end{array} \right. \end{cases}$

18.48. $\begin{cases} |a| > 1, \\ x \in \left(-\infty;\ \dfrac{-1}{|a|+1} \right] \bigcup \left[\frac{1}{|a|-1};\ +\infty \right); \end{cases}$ $\begin{cases} |a| \le 1, \\ x \le \dfrac{-1}{|a|+1}. \end{cases}$

18.50. $\begin{cases} a \le 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < a, \\ 0 \le x < a^2. \end{cases}$ **18.51.** $\begin{cases} a < 0, \\ x \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le a, \\ x > a^2. \end{cases}$

18.52. $\begin{cases} a < -5, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} -5 \le a \le 1, \\ 0 \le x \le (a+5)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1, \\ (a-1)^2 \le x \le (a+5)^2. \end{cases}$

18.53. $\begin{cases} b < 1, \\ x \in \{-\frac{1}{3}\} \cup [1;\ +\infty); \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1, \\ x \in [-\frac{1}{3};\ +\infty); \end{cases}$ $\begin{cases} b > 1, \\ x \in [-\frac{1}{3};\ 1]. \end{cases}$

18.54. $\left(-\infty;\ \dfrac{1}{2} \right)$. **18.55.** $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, \\ x \le a^3 - 1. \end{cases}$

18.56. $\begin{cases} a < 1, \\ -1 \le x < \dfrac{3-2a}{a^2-2a+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le a < 2, \\ -1 \le x; \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \le a, \\ \dfrac{3-2a}{a^2-2a+1} < x. \end{cases}$

18.57. $\begin{cases} a = 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ne 0, \\ -\dfrac{|a|}{\sqrt{5}} < x \le |a|. \end{cases}$

18.58. $\begin{cases} a < -1, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le a \le 0, \\ 1 - \sqrt{a+1} \le x \le 1 + \sqrt{a+1}; \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < a, \\ -\dfrac{a}{2} \le x \le 1 + \sqrt{a+1}. \end{cases}$ **18.59.** $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$; 2.

18.60. $\begin{cases} a < -1, \\ a \le x \le -a; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le a \le -\frac{1}{2}, \\ -\sqrt{-2a-1} \le x \le \sqrt{-2a-1}; \end{cases}$ $\begin{cases} a > -\frac{1}{2}, \\ x \in \emptyset. \end{cases}$

18.61. $\begin{cases} a<0, \\ x\in\emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a=0, \\ x>0; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ x\in\Big[-\dfrac{a}{3};\,0\Big)\bigcup(8a;\,+\infty). \end{cases}$

18.63. $\begin{cases} a\le -1, \\ x\in\emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} -1<a<-\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{a^2}{2a+1}<x\le -1; \end{cases}$ $\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\le a\le 0, \\ x\le -1; \end{cases}$

$\begin{cases} a>0, \\ x\in(-\infty;\,-1]\bigcup\Big[0;\,\dfrac{a^2}{2a+1}\Big). \end{cases}$

18.64. $\begin{cases} a\le 0, \\ x\in\emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ x<\log_3 a. \end{cases}$ **18.65.** $\begin{cases} a\le 0, \\ x\in\mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ x\le -\log_3 a. \end{cases}$

18.66. $\begin{cases} a<0, \\ x>\log_3(-a); \end{cases}$ $\begin{cases} a=0, \\ x\in\mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ x>\log_3 a-2. \end{cases}$

18.67. $[2;\,+\infty)$. **18.68.** $\begin{cases} a\le 0, \\ x\in\mathbb{R}; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ x\ge\log_3 a. \end{cases}$

18.69. $\begin{cases} a\le 0, \\ x\in\emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ x>-\log_3 a. \end{cases}$

18.70. $\begin{cases} a<0, \\ x<\log_2(-a)-1; \end{cases}$ $\begin{cases} a=0, \\ x\in\emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a>0, \\ x<\log_2 a-2. \end{cases}$

18.71. $\begin{cases} a<1, \\ x\ge -1; \end{cases}$ $\begin{cases} a\ge 1, \\ x>\big((a-1)\log_3 2\big)^2-1. \end{cases}$

18.72. $(-8;\,4)\cup(7;\,+\infty)$.

18.73. При $a\le 0$ или $a=1$ выражение $\log_a x$ не определено; $\begin{cases} 0<a<1, \\ 0<x\le a; \end{cases}$ $\begin{cases} a>1, \\ x\ge a. \end{cases}$

18.74. При $a\le 0$ выражение $\log_x a$ не определено; $\begin{cases} 0<a<1, \\ x\in(0;a]\cup(1;+\infty); \end{cases}$ $\begin{cases} a=1, \\ x\in(0;1)\cup(1;+\infty); \end{cases}$ $\begin{cases} a>1, \\ x\in(0;1)\cup[a;+\infty). \end{cases}$

18.75. $\begin{cases} a<0, \\ 1<x\le\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a\ge 1, \end{array}\right. \\ x\in\emptyset; \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 < a < \dfrac{1}{4}, \\ x \in \left(a;\ \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right] \bigcup \left[\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2};\ 1\right); \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{4} \le a < 1, \\ a < x < 1. \end{cases}$$

18.76. $\begin{cases} a \in (-\infty;\ 0] \cup \{\frac{1}{2}\}, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a \in (0;\ \frac{1}{2}), \\ x \in [1-\sqrt{1-a};\ 1+\sqrt{1-a}]; \end{cases}$

$\begin{cases} a \in (\frac{1}{2};\ 1), \\ x \in (1-\sqrt{1+a};\ 1-\sqrt{1-a}] \cup [1+\sqrt{1-a};\ 1+\sqrt{1+a}); \end{cases}$

$\begin{cases} a \in [1;\ +\infty), \\ x \in (1-\sqrt{1+a};\ 1+\sqrt{1+a}). \end{cases}$

18.77. При $a \le 0$ или $a = 1$ выражение $\log_a x$ не определено; $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ x \ge a; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1, \\ 0 < x \le a. \end{cases}$

18.78. При $a \le 0$ выражение $\log_x a$ не определено; $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ a \le x < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1, \\ x \in \emptyset; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1, \\ 1 < x \le a. \end{cases}$ **18.80.** $\left[-\dfrac{24}{5};\ 0\right]$.

18.81. $\begin{cases} a < -2, \\ \left[\begin{array}{l} k\pi - \dfrac{\pi}{2} < t \le \operatorname{arctg} \dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2} + k\pi, \\ k\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2} \le t < k\pi; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \le a < 2, \\ k\pi - \dfrac{\pi}{2} < t < k\pi; \end{cases}$

$$\begin{cases} 2 \le a, \\ \left[\begin{array}{l} k\pi - \dfrac{\pi}{2} < t < k\pi, \\ k\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2} \le t \le \operatorname{arctg} \dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2} + k\pi, \end{array}\right. \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

18.82. $\begin{cases} a = 0, \\ x = k\pi,\ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1, \\ x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + k\pi; \end{cases}$

$$\begin{cases} a = 2, \\ x = (-1)^k \arcsin \dfrac{1-\sqrt{7}}{2} + k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

18.83. $(-5;\ -\sqrt{24}\,) \cup (-\sqrt{24};\ -3)$.

18.84. $a \le 0,\ t \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) \bigcup$

$\left[-\arccos\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}+2\pi k;\ \arccos\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}+2\pi k\right]$;

$a>0,\ t\in\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \arccos\dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}+2\pi k\right]\bigcup$

$\left[-\arccos\dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}+2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

19.3. *Доказательство.* По неравенству для средних для четырех чисел

$$a+b+c+\sqrt[3]{abc}\geq 4\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}=$$

$$=4\Big((abc)(abc)^{\frac{1}{3}}\Big)^{\frac{1}{4}}=4\Big((abc)^{\frac{4}{3}}\Big)^{\frac{1}{4}}=4(abc)^{\frac{1}{3}}=4\sqrt[3]{abc}.$$

Таким образом,

$$a+b+c+\sqrt[3]{abc}\geq 4\sqrt[3]{abc}\iff a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

19.7. *Доказательство.* Проведем преобразование неравенства

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geq 64\iff (a+1)(b+1)(c+1)\geq 64abc\iff$$

$$abc+ab+bc+ac+a+b+c+1\geq 64abc\iff ab+bc+ac+2\geq 63abc.$$

Поскольку по неравенству для средних $ab+bc+ac\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, то достаточно доказать, что

$$3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+2\geq 63abc.$$

Обозначим $t=\sqrt[3]{abc}$. Относительно t неравенство перепишется:

$$63t^3-3t^2-2\leq 0.$$

Причем, по неравенству для средних $1=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow t\leq\dfrac{1}{3}$.

При $t\leq\dfrac{1}{3}$ произведение $63t^3-3t^2-2=(3t-1)(21t^2+6t+2)\leq 0$, так как дискриминант квадратного трехчлена $\frac{D}{4}=3^2-2\cdot 21=-33<0$.

19.23. $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **19.26.** 1998.

19.29. *Доказательство.* Очевидно, что для любого действительного числа x выполняются неравенства:

$$(a_k x + b_k)^2 \geq 0 \iff a_k^2 x^2 + 2a_k b_k x + b_k^2 \geq 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Сложив все эти неравенства, получим:

$$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)x^2 + 2(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)x + (b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geq 0 \quad \forall\, x. \quad (*)$$

При $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ неравенство Коши–Буняковского очевидным образом выполняется.

Пусть $a_1^2 + \ldots + a_n^2 \neq 0$. Тогда для неотрицательности квадратного трехчлена по x в неравенстве $(*)$ необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного трехчлена был неположителен, т. е.

$$\frac{D}{4} = (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2 - (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \leq 0.$$

Но это и есть неравенство Коши–Буняковского.

19.41. $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. **19.45.** $\dfrac{1}{10}$. **19.46.** $y_{max} = 0$.

19.48. $e^\pi > \pi^e$. **19.49.** $y_{min} = 0$. **19.50.** 1.

20.1. $(1, 3)$; $(3, 1)$. **20.2.** $(-2, 3)$; $(3, -2)$.

20.3. $\left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$; $\left(1, \frac{1}{2}, 2\right)$; $\left(2, 1, \frac{1}{2}\right)$; $\left(2, \frac{1}{2}, 1\right)$; $\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$; $\left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$.

20.4. *Решение.* Данная система является симметрической системой относительно переменных x, y и z.

Сделаем замену переменных:

$$u = x + y + z, \quad v = xy + xz + yz, \quad w = xyz.$$

Поскольку

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz),$$

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+6xyz =$$
$$= x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + xz + yz) - 3xyz,$$

то

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = u^2 - 2v,$$

$$x^3+y^3+z^3=$$
$$=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz=u^3-3uv+3w,$$

и для нахождения u, v и w имеем систему уравнений

$$\begin{cases} u=2, \\ u^2-2v=6, \\ u^3-3uv+3w=8. \end{cases}$$

Откуда $u=2$, $v=-1$, $w=-2$. Исходная система уравнений эквивалентна кубическому уравнению

$$t^3-ut^2+vt-w=0 \iff t^3-2t^2-t+2=0 \iff$$

$$(t-1)(t+1)(t-2)=0 \iff t_1=1,\ t_2=2,\ t_3=-1.$$

Переходя к переменным x, y и z, находим решения исходной симметрической системы как перестановки тройки чисел 1, 2, -1.

Ответ. $(1,2,-1)$; $(1,-1,2)$; $(2,1,-1)$; $(2,-1,1)$; $(-1,1,2)$; $(-1,2,1)$.

20.5. (0,0,0). **20.6.** (3,3,3). **20.7.** (10,15); (15,10). **20.8.** (12,3); (3,12).
20.9. $\left(1,3,\frac{1}{3}\right)$; $\left(1,\frac{1}{3},3\right)$; $\left(3,1,\frac{1}{3}\right)$; $\left(3,\frac{1}{3},1\right)$; $\left(\frac{1}{3},1,3\right)$; $\left(\frac{1}{3},3,1\right)$.
20.10. $(1,2,-2)$; $(1,-2,2)$; $(2,1,-2)$; $(2,-2,1)$; $(-2,1,2)$; $(-2,2,1)$.
20.11. $(a,0,0)$; $(0,a,0)$; $(0,0,a)$.
20.12. $(a,b,-b)$; $(a,-b,b)$; $(b,a,-b)$; $(b,-b,a)$; $(-b,a,b)$; $(-b,b,a)$.
20.13. $\pm\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2},\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right)$; $\pm\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2},\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right)$; $(0,0)$; $\pm(2,-2)$; $\pm(\sqrt{6},\sqrt{6})$. **20.14.** $(-1,-1,-1)$.
20.15. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **20.16.** $(-3,-4)$; $(5,2)$.
20.17. $(-3\sqrt{3},-\sqrt{3})$; $(3\sqrt{3},\sqrt{3})$; $(-4,-5)$; $(4,5)$.
20.18. $(-9,-5)$; $(9,5)$; $(-6,-5)$; $(6,5)$. **20.19.** $(9,-4)$; $(16,-3)$.
20.20. $\pm(4,3,2)$; $\pm\left(\frac{10}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$. **20.21.** $(-2,-8)$.
20.22. $(2,-1)$; $\left(\frac{12}{7},-\frac{1}{7}\right)$. **20.23.** $(1,1)$. **20.24.** 30.
20.25. $(0,0)$; $(2,-1)$; $\left(-\frac{10}{7},-\frac{4}{7}\right)$. **20.26.** $(1,-1)$.

20.27. $(4, 1)$; $\left(-\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$. **20.28.** $(1, -1)$; $(-3, 3)$.
20.29. $(1, 2, 1)$; $\left(\frac{44}{25}, -\frac{28}{5}, -\frac{108}{25}\right)$. **20.30.** $(2, 1)$.
20.31. $(-1, 1, 2)$; $(-1, 1, -2)$. **20.32.** $(2, 2, -2)$.
20.33. $(-1, 3)$; $(t, 2)$, $t \in \mathbb{R}$. **20.34.** $(0, 0)$; $(5, 1)$; $\left(-\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
20.35. $\pm(0, \sqrt{3})$; $\pm\left(\sqrt{\frac{3}{119}}, 11\sqrt{\frac{3}{119}}\right)$. **20.36.** $\pm(0, 2)$; $\pm(1, -3)$.
20.37. $(2, 1)$. **20.38.** $\pm\left(\sqrt{6}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. **20.39.** $(4, -3, 0)$; $(2, -1, 2)$.
20.40. $(-2, -1)$. **20.41.** $(2, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9})$; $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$.
20.42. $\left(\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}, \frac{9}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}\right)$. **20.43.** $\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha, \frac{1}{3}\operatorname{tg}2\alpha, \operatorname{tg}4\alpha\right)$, где $\alpha = \pm\frac{\pi}{7}; \pm\frac{2\pi}{7}; \pm\frac{3\pi}{7}$. **20.44.** $(1, 5)$; $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$.
20.45. $(3, 2)$; $(-2, -3)$; $(3+\sqrt{10}, -3+\sqrt{10})$; $(3-\sqrt{10}, -3-\sqrt{10})$.
20.46. (18,2). **20.47.** $\left(\operatorname{tg}\alpha, \frac{\operatorname{tg}2\alpha}{2}, \frac{\operatorname{tg}4\alpha}{2}\right)$, где $\alpha = \pm\frac{\pi}{7}; \pm\frac{2\pi}{7}; \pm\frac{3\pi}{7}$.
20.48. $x = \frac{z+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}z}$, $y = \frac{\sqrt{3}z+1}{\sqrt{3}-z}$, $0 < z < \frac{1}{\sqrt{3}}$.
20.49. $\left(\frac{217-5\sqrt{415}}{29}, \frac{180+2\sqrt{415}}{29}\right)$. **20.50.** $24\sqrt{3}$.
20.51. $y = -\frac{6}{7}\,x + \frac{1}{7}$. **20.52.** $\max(x^2+y^2) = 8$, достигается при $z = 5$. **20.53.** $\left(-\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$. **20.54.** $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$. **20.55.** $(-4, -1)$.
20.56. $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$. **21.1.** $\frac{53}{450}$. **21.2.** $3^{400} > 4^{300}$.
21.3. $\sqrt{2}+\sqrt{11} < \sqrt{3}+3$. **21.4.** $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$. **21.5.** $\log_2 5 < \sqrt{8}$.
21.6. $3^{\sqrt{5}-2} < \frac{4}{3}$. **21.7.** $\frac{1}{2}\log_5 6 < \log_6 5$.
21.8. $\sqrt{1997}+\sqrt{1998} > \sqrt{1996}+\sqrt{1999}$. **21.9.** $\log_\pi\left(\operatorname{tg}\frac{3}{4}\right) < 0$.
21.10. $\sin\cos 1 < \cos\sin 1$. **21.11.** $\log_{189} 1323 > \log_{63} 147$.
21.12. $\sqrt[200]{2} < 1{,}006$. **21.13.** $\sqrt[3]{60} > 2 + \sqrt[3]{7}$.
21.14. Во второй четверти. **21.15.** $\sqrt[3]{4} > 3 - \sqrt{2}$.
21.16. $5 - \sqrt{15} > \sqrt{17} - 3$. **21.17.** $\sqrt{7}+\sqrt{10} < \sqrt{3}+\sqrt{19}$.

21.18. $\log_2\pi+\log_\pi 2>2$. **21.19.** $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}<\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\dfrac{11}{1000}$.
21.20. $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}<\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$. **21.21.** $\log_{11}119<\log_{15}227$.
21.22. $\dfrac{1}{2}\log_4 5<\log_5 4$. **21.23.** $\log_2 3>\log_5 8$.
21.24. $\log_3 7>\log_7 27$. **21.25.** $\log_{3\sqrt{3}}5<\cos\dfrac{\pi}{7}$.
21.26. Площадь круга меньше.
21.27. Корень трехчлена больше. **21.28.** $\cos 136^\circ<\operatorname{tg}153^\circ$.
21.29. $\operatorname{ctg}100^\circ$, $\cos 275^\circ$, $\sin 10^\circ$, $\operatorname{tg}190^\circ$. **21.30.** $\sin 31^\circ<\operatorname{tg}30^\circ$.
21.31. $x=7k+18$, $y=-5k-12$, $k\in\mathbb{Z}$.
21.32. $d=12=204\cdot 11-372\cdot 6$ уравнение $17m+31n=1$, $\begin{cases} m=31k+11,\\ n=-17k-6,\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$. **21.33.** $-\dfrac{3\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{5\pi}{2}$. **21.34.** 5.
21.35. $x=4k+3$, $y=3k+2$, $k\in\mathbb{Z}$. **21.36.** $\emptyset$.
21.37. $-5+20m$, $m\in\mathbb{Z}$. **21.38.** $-15+180s$, $s\in\mathbb{Z}$.
21.39. $\begin{cases} x=-44+26k,\\ y=12-7k,\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$. **21.40.** $\emptyset$. **21.41.** $\pm(1,2)$; $\pm(5,2)$.
21.42. (1,111), (4,12). **21.43.** (11,−9). **21.44.** $\pm(1,5,0)$; $\pm(1,-5,0)$.
21.45. $(2,117)$; $(3,59)$. **21.46.** $a\in\left(-\dfrac{5}{11};-\dfrac{1}{3}\right]$. **21.48.** $\pm\left(3,\dfrac{7}{2}\right)$.
21.49. $a=-2009$. **21.50.** $x=7n$, $y=3n$, $z=2n$, $n\in\mathbb{Z}$.
21.51. $\pm(5,-4)$; $\pm(13,-20)$.

21.52. *Решение.* Разложим левую часть уравнения на линейные множители, рассматривая ее как квадратный трехчлен относительно x:

$$(5x-7y)(11x+13y)=59.$$

Число 59 можно представить в виде произведения двух целых чисел следующими способами:

$$59=59\cdot 1=1\cdot 59=(-59)\cdot(-1)=(-1)\cdot(-59).$$

Соответственно, получаем 4 системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x-7y=59,\\ 11x+13y=1,\end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{387}{71}\notin\mathbb{Z},\\ y=-\dfrac{322}{71}\notin\mathbb{Z};\end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 7y = 1, \\ 11x + 13y = 59, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3, \\ y = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 7y = -59, \\ 11x + 13y = -1, \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{387}{71} \notin \mathbb{Z}, \\ y = \dfrac{322}{71} \notin \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 7y = -1, \\ 11x + 13y = -59, \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3, \\ y = -2. \end{cases}$$

Ответ. $\pm(3,2)$.

21.53. $\pm(3,0)$; $\pm(3,3)$.

21.54. $(12,-4)$; $(10,-2)$; $(2,-4)$; $(10,-6)$; $(4,-2)$; $(4,-6)$.

21.55. $(9,9)$. **21.56.** $(0,2)$; $(2,0)$. **21.57.** $(1,37)$.

21.58. $(15k^2-6k, 3k-1)$, $k \in \mathbb{Z}$. **21.59.** $(-4,-3)$, $(-6,-13)$, $(-14,-5)$.

21.60. $(4,9)$; $(5,8)$. **21.61.** $l = 5$, $k = 6$. **21.62.** $(5,4,4)$.

21.63. *Указание.* Представить многочлен в виде

$$(y(3x+1) - 2x - 3)(y(3x+1) - x - 2) = 0$$

и далее решить в целых числах два уравнения

$$y(3x+1) - 2x - 3 = 0 \iff (3x+1)(3y-2) = 7;$$

$$y(3x+1) - x - 2 = 0 \iff (3x+1)(3y-1) = 5.$$

Ответ. $(0,2)$; $(-2,0)$; $(0,3)$; $(2,1)$.

21.64. $\begin{pmatrix} 7 & + & 1 & = & 8 \\ - & & \times & & : \\ 1 & + & 3 & = & 4 \\ \| & & \| & & \| \\ 6 & : & 3 & = & 2 \end{pmatrix}$. **21.65.** $\begin{array}{r} +\,342457 \\ 342457 \\ \hline 684914 \end{array}$. **21.66.** $\dfrac{\pi}{35}$.

21.67. Таких функций не существует. **21.68.** $-\sqrt{7}$; $\sqrt{3}$.

21.69. -5. **21.70.** $(2,0)$. **21.71.** $(-5,20)$; $(-5,21)$.

21.72. $(3,2)$; $(2,3)$; $(3,3)$; $(4,3)$; $(5,4)$. **21.73.** $(0,0)$; $(2,0)$; $(1,1)$.

21.74. $(0,0)$; $(3,0)$; $(0,3)$; $(2,2)$. **21.75.** $(3,0)$; $(3,2)$; $(3,-2)$.

21.76. $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, 1, 1\right)$; $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, 7, -9\right)$.

21.77.
$$\begin{array}{r|l} -110768 & 112 \\ \underline{1008} & \overline{989} \\ -996 & \\ \underline{896} & \\ -1008 & \\ \underline{1008} & \\ 0 & \end{array}$$

21.78. 4. **21.79.** $x = 0$, $y = 8$ или $x = 8$, $y = 0$.

21.80. $\begin{pmatrix} 1 & + & 8 & = & 9 \\ + & & : & & : \\ 6 & : & 2 & = & 3 \\ \| & & \| & & \| \\ 7 & - & 4 & = & 3 \end{pmatrix}$.

21.81. $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$.

21.82. $(1,1,1)$.

21.83. $x_1 = S_1+S_2+S_{10}-\dfrac{S}{4}$, $x_2 = \dfrac{S}{4}-S_2-S_{10}$, $x_3 = \dfrac{S}{4}-S_1-S_{10}$, $x_4 = \dfrac{S}{4}-S_1-S_9$, $x_5 = S_1+S_9+S_{10}-\dfrac{S}{4}$, где $S = S_1+S_2+\ldots+S_{10}$.

21.84. $m = 37500$, $n = 3$; $m = 11250$, $n = 9$. **21.85.** ± 2007.

21.86. ± 1; 3; 5. **21.89.** $0, 1, 3, 4$. **21.90.** 333. **21.91.** $25, 76$.

21.92. Указанное число не является полным квадратом.

21.96. 07. **21.98.** 7. **21.99.** 2; 6. **21.100.** 108; 540. **21.101.** 80; 98.

21.103. Да. **21.106.** $a = 2$, $b = 5$.

21.108. а) 44; б) отрицательных; в) 17. **21.109.** 18, 216.

21.110. 36. **21.113.** $(a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1)$.

21.114. $42\cdot 2\cdot 3^5$, $42\cdot 2\cdot 7^5$, $42\cdot 3\cdot 2^5$, $42\cdot 3\cdot 7^5$, $42\cdot 7\cdot 2^5$, $42\cdot 7\cdot 3^5$.

21.119. Не могут. **21.125.** а) нет; б) да.

21.127. а) $0, 1$; б) $0, 1, 4, 5, 6, 9$. **21.128.** 0, 1. **21.133.** 30.

21.134. $2, 3, 5, 6, 11, 21$. **21.135.** Нет. **21.137.** 30. **21.139.** 188.

21.140. 3. **21.141.** Указанные числа не являются полными квадратами в обоих случаях.

21.144. Число состоит из 300 единиц. **21.147.** $7744 = 88^2$.

21.148. 361. **21.150.** $p = 3$.

21.154. Во всех случаях а)–в) такие числа существуют. Например, а) $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = 3-\sqrt{2}$; б) $\alpha = \beta = \sqrt{2}$; в) $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \log_{\sqrt{2}} 3$. **21.155.** 34452, 34056, 34956.

Литература

[1] Амелькин В. В., Рабцевич В. Л. Задачи с параметрами. Минск: Изд-во “Асар”, 2002.

[2] Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Пособие для учащихся 10-11 классов. М.: Изд-во “Наука”, 1987.

[3] Кравцев С. В., Макаров Ю. Н., Максимов М. И., Нараленков М. И., Чирский В. Г., Методы решения задач по алгебре. М.: Изд-во “Экзамен”, 2001.

[4] Моденов В. П. Пособие по математике. Часть I. М.: Изд-во МГУ, 1977.

[5] Родионов Е. М. Решение задач с параметрами. Пособие для поступающих в ВУЗы. М.: Изд-во МП “Русь – 90”, 1995.

[6] Сильвестров В. В. Обобщенный метод интервалов. Чебоксары.: Изд-во Чувашского университета, 1998.

[7] Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Учебное пособие. /Под редакцией Сканави М. И., М.: Изд-во “Высшая школа”, 1980.

[8] Тиняков Г. А., Тиняков И. Г. Задачи с параметрами. М., 1996.

[9] Ципкин А. Г., Пинский А. И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. М.: Изд-во “Наука”, 1989.

Учебно-методическое пособие

Галеев Эльфат Михайлович

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ (типы задач и методы их решений).

Часть 4

- **Уравнения и неравенства с параметрами**
- **Доказательство неравенств**
- **Системы уравнений**
- **Целочисленные задачи**

Издание девятое, дополненное

М.: Издательство “Попечительский совет мех-мат. ф-та МГУ”, 2012.—84 с.

Подписано в печать 15.06.2012 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 5.25 п.л.
Заказ 4. Тираж 300 экз.

Издательство “Попечительский совет механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова”.
119992, г. Москва, Ленинские Горы, д.1.

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета.