4.4 Выпуклые, конические, аффинные множества

4.4.1 Свойства операций над множествами

1. *Пересечение любого числа выпуклых (конических, аффинных) множеств является выпуклым (коническим, аффинным) множеством.*

$\lhd$ Пусть A_α — выпуклые множества. Докажем, что $A = \cap_\alpha A_\alpha$ — выпуклое множество. Возьмем точки $a, b \in A$. Поскольку $A = \cap_\alpha A_\alpha$, то точки $a, b \in A_\alpha$ для любого α. В силу выпуклости множества A_α точка $ta + (1-t)b \in A_\alpha$ для любого $0 \le t \le 1$ и для любого α. Следовательно, точка $ta + (1-t)b \in A$.

Аналогично свойство доказывается для конических и аффинных множеств. $\rhd$

Упражнение 1. Верно ли утверждение: если для любых двух точек a и b из множества A их полусумма $\frac{a+b}{2} \in A$, то множество A выпукло?

2. $f\colon X \to Y$ — *линейное отображение*[1] $\Rightarrow$ A — *выпуклое (коническое, аффинное) множество* $\Leftrightarrow$ $f(A)$ — *выпуклое (коническое, аффинное) множество.*

$\lhd$ Пусть A — выпуклое множество. Возьмем точки $x_1, x_2 \in f(A)$. Тогда $x_1 = f(a_1)$, $x_2 = f(a_2)$, где $a_1, a_2 \in A$. Следовательно,

$$tx_1 + (1-t)x_2 = tf(a_1) + (1-t)f(a_2) \overset{f\text{ — линейное}}{=} f\big(ta_1 + (1-t)a_2\big).$$

Значит, $tx_1 + (1-t)x_2 \in f(A)$, т. е. множество $f(A)$ — выпукло.

Обратно. Пусть $B := f(A)$ — выпуклое множество. Возьмем точки $a_1, a_2 \in f^{-1}(B) = A$, тогда $x_1 = f(a_1) \in B$, $x_2 = f(a_2) \in B$. В силу выпуклости множества B точки $tx_1 + (1-t)x_2 \in B$ для любого $0 \le t \le 1$. Поскольку f — линейное отображение, то

$$tx_1 + (1-t)x_2 = tf(a_1) + (1-t)f(a_2) = f(ta_1 + (1-t)a_2).$$

[1] f — линейное, если $f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)\ \forall\ a, b \in X, \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Значит, $ta_1 + (1-t)a_2 \in f^{-1}(B) = A$, т. е. множество A — выпукло.

Аналогично свойство доказывается для конических и аффинных множеств. $\rhd$

3. *Сдвиг $A \to b + A$ выпуклого (аффинного) множества является выпуклым (аффинным) множеством.*

4. *Гомотетия $A \to \lambda A$, $\lambda \in \mathbb{R}$, выпуклого множества является выпуклым множеством.*

5. *Прямое (декартово) произведение выпуклых множеств выпукло ($A \subset X$ и $B \subset Y$ выпуклы $\Rightarrow A \times B$ выпукло в $X \times Y$).*

6. *Алгебраическая сумма $A+B$ и разность $A-B$ выпуклых множеств выпуклы. Линейная комбинация конечного числа выпуклых множеств $\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k$ выпукла.*

Свойства 3.-6. легко следуют из определений.

Упражнение 2. Доказать, что для любых $\alpha, \beta > 0$ и выпуклого множества A выполняется равенство: $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$; в частности, $A + A = 2A$. Показать, что для невыпуклых множеств это, вообще говоря, неверно.

4.4.2 Эквивалентные определения выпуклых множеств

Лемма (1-v)**.** *Пусть* A *— выпуклое множество. Тогда для любых точек* $a_1, \dots, a_n \in A$ *выпуклая оболочка* $\operatorname{conv}\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$.

Доказательство. Индукция по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. При $n = 2$ утверждение следует из определения выпуклого множества. Предположим, лемма верна для любой выпуклой оболочки не более, чем $n-1$ точки. Докажем для n точек. Пусть точка a принадлежит выпуклой оболочке n точек: $a \in \operatorname{conv}\{a_1, \dots, a_n\}$. Тогда $a = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i a_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$, $t_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Поскольку $n > 1$, а $t_i > 0$, то $t_1 \neq 1$. Положим $\tilde{t}_k = \frac{t_k}{1-t_1} \geq 0$ при $k = 2, \dots, n$. Так как $\sum\limits_{k=2}^{n} \tilde{t}_k = \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} t_k}{1-t_1} = \frac{1-t_1}{1-t_1} = 1$, то точка $\tilde{a} = \sum\limits_{k=2}^{n} \tilde{t}_k a_k$ – выпуклая комбинация, и по предположению индукции $\tilde{a} \in A$. Тогда в силу выпуклости A имеем $a = t_1 a_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} t_k a_k = t_1 a_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} (1-t_1)\tilde{t}_k a_k = t_1 a_1 + (1-t_1)\tilde{a} \in A$. □

Обозначим $\operatorname{conv} A := \bigcup\limits_{a_1,\dots,a_n \in A,\, n \in \mathbb{N}} \operatorname{conv}\{a_1, \dots, a_n\}$.
Из определения ($n = 1$) следует, что $\operatorname{conv} A \supset A$.

Лемма (2-v)**.** *Множество* $\operatorname{conv} A$ *— выпукло.*

Доказательство. Возьмем точки $a, b \in \operatorname{conv} A$. Тогда по определению выпуклой оболочки множества $a = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$, $b = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j b_j$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j = 1$, $\lambda_i, \mu_j \geq 0$. Для любого $t \in [0;1]$ имеем

$$(1-t)a + tb = (1-t)\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + t\sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j = \sum_{i=1}^{m} (1-t)\lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{n} t\mu_j b_j.$$

Заметим, что все множители $(1-t)\lambda_i$ и $t\mu_j$ неотрицательны и $\sum\limits_{i=1}^{m} (1-t)\lambda_i + \sum\limits_{j=1}^{n} t\mu_j = (1-t) + t = 1$, значит, получили выпуклую комбинацию точек $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$, которая принадлежит $\operatorname{conv} A$. □

Теорема 1. *Множество A — выпукло тогда и только тогда, когда* $\operatorname{conv} A = A$.

Доказательство. Пусть A — выпукло. Тогда по лемме 1-v $\operatorname{conv} A \subset A$. Вложение $\operatorname{conv} A \supset A$ следует из определения $\operatorname{conv} A$ $(n = 1)$.

Обратно. Пусть $\operatorname{conv} A = A$. По лемме 2-v $\operatorname{conv} A$ — выпукло, значит, и A — выпукло. $\square$

Обозначим $\widetilde{A} = \cap_\alpha A_\alpha$ — пересечение всех выпуклых множеств A_α, содержащих A $(A_\alpha \supset A)$.
Тогда $\widetilde{A}$ — выпукло как пересечение выпуклых множеств.

Теорема 2. *Имеет место равенство* $\operatorname{conv} A = \widetilde{A}$.

Доказательство. Поскольку по лемме 2-v $\operatorname{conv} A$ — выпукло и $\operatorname{conv} A \supset A$ следует из определения $\operatorname{conv} A$ $(n = 1)$, то $\operatorname{conv} A \supset \cap_\alpha A_\alpha = \widetilde{A}$. Докажем, что $\operatorname{conv} A \subset \widetilde{A}$. Пусть $a \in \operatorname{conv} A$. Тогда $a \in \operatorname{conv}\{a_1, \ldots, a_n\}$, где $a_i \in A \subset A_\alpha$ для любого α. Поскольку A_α — выпукло, то по лемме 1-v $a \in A_\alpha$ для любого α. Так как $\cap_\alpha A_\alpha = \widetilde{A}$, то $a \in \widetilde{A}$. $\square$

Теорема 3. *Пусть X — линейное нормированное пространство, $A \subset X$ — выпуклое множество. Тогда внутренность* $\operatorname{int} A$ *и замыкание* $\overline{A}$ *множества A выпуклы.*

Доказательство. Пусть точки $a, b \in \operatorname{int} A$. Тогда по определению внутренней точки существует $\varepsilon > 0$, для которого шары $a + B_\varepsilon, b + B_\varepsilon \subset A$. В силу выпуклости множества A для любых $t_1, t_2 \geq 0$, $t_1 + t_2 = 1$, множество $t_1(a + B_\varepsilon) + t_2(b + B_\varepsilon) \subset A$. Согласно утверждению из упражнения 2 множество

$$t_1(a + B_\varepsilon) + t_2(b + B_\varepsilon) = t_1 a + t_2 b + t_1 B_\varepsilon + t_2 B_\varepsilon = t_1 a + t_2 b + B_\varepsilon.$$

Значит, множество $t_1 a + t_2 b \in \operatorname{int} A$, т. е. $\operatorname{int} A$ — выпуклое множество.

Пусть $a, b \in \overline{A}$. Покажем, что для любых $t_1, t_2 \geq 0$, $t_1 + t_2 = 1$, точка $t_1 a + t_2 b \in \overline{A}$. Поскольку $a, b \in \overline{A}$, то существуют последовательности $a_k, b_k \in A$ такие, что $a_k \to a$, $b_k \to b$. В силу выпуклости множества A точки $c_k := t_1 a_k + t_2 b_k \in A$. Поэтому $c = \lim c_k \in \overline{A}$. Следовательно, $\overline{A}$ — выпуклое множество. $\square$

4.4.3 Эквивалентные определения выпуклых конусов

Лемма (1-k)**.** *Пусть A — выпуклый конус. Тогда коническая выпуклая оболочка* $\operatorname{conev}\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$, *для любых* $a_1, \dots, a_n \in A$, *для любого* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть точка $a \in \operatorname{conev}\{a_1, \dots, a_n\}$. Значит, точка a представляется в виде $a = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i a_i$, $t_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Если $t_1 = \ldots = t_n = 0$, то $a = 0 \in A$ (ноль всегда принадлежит конусу). Если же $\lambda := \sum\limits_{i=1}^{n} t_i > 0$, то рассмотрим точку $b := \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{t_i}{\lambda} a_i = \dfrac{a}{\lambda}$. Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{t_i}{\lambda} = 1$, то b – выпуклая комбинация точек a_i. Следовательно, $b \in A$ по лемме 1-v в силу выпуклости A. Поскольку A — конус, то точка $a = \lambda b \in A$. □

Обозначим $$\operatorname{conev} A := \bigcup_{a_1, \dots, a_n \in A,\, n \in \mathbb{N}} \operatorname{conev}\{a_1, \dots, a_n\}.$$
Из определения ($n = 1$) следует, что $\operatorname{conev} A \supset A$.

Лемма (2-k)**.** *Множество* $\operatorname{conev} A$ *— выпуклый конус.*

Доказательство. То, что множество $\operatorname{conev} A$ является конусом следует из определения, поскольку объединение конусов есть конус. Докажем выпуклость. Возьмем точки $a, b \in \operatorname{conev} A$. Значит, точки a, b представляются в виде $a = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$, $b = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j b_j$, $a_i, b_j \in A$, $\lambda_i, \mu_j \geq 0$. Тогда для любого $t \in [0; 1]$ точка $(1-t)a + tb = (1-t)\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + t\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j b_j = \sum\limits_{i=1}^{m} (1-t)\lambda_i a_i + \sum\limits_{j=1}^{n} t\mu_j b_j \in \operatorname{conev} A$, поскольку все множители $(1-t)\lambda_i$ и $t\mu_i$ неотрицательны (получили коническую комбинацию точек $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$). Следовательно, $\operatorname{conev} A$ — <u>выпуклый</u> конус. □

Теорема 4. *Множество A — выпуклый конус тогда и только тогда, когда* $\operatorname{conev} A = A$.

Доказательство. Пусть A — выпуклый конус, тогда по лемме 1-k $\operatorname{conev} A \subset A$. Вложение $\operatorname{conev} A \supset A$ следует из определения $\operatorname{conev} A$ $(n = 1)$.

Обратно. Пусть $\operatorname{conev} A = A$. По лемме 2-k $\operatorname{conev} A$ — выпуклый конус, значит, и A — выпуклый конус. $\square$

Обозначим $\widetilde{A} = \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ — пересечение всех выпуклых конусов A_α, содержащих A $(A_\alpha \supset A)$. Тогда $\widetilde{A}$ — выпуклый конус как пересечение выпуклых конусов.

Теорема 5. *Имеет место равенство* $\operatorname{conev} A = \widetilde{A}$.

Доказательство. Поскольку по лемме 2-k $\operatorname{conev} A$ — выпуклый конус и $\operatorname{conev} A \supset A$ по определению $\operatorname{conev} A$ $(n = 1)$, то $\operatorname{conev} A \supset \widetilde{A}$.

Докажем, что $\operatorname{conev} A \subset \widetilde{A}$. Пусть $a \in \operatorname{conev} A$. Тогда $a \in \operatorname{conev}\{a_1, \dots, a_n\}$, $a_i \in A \subset A_\alpha$ для любого α. Поскольку A_α — выпуклый конус, то по лемме 1-k $a \in A_\alpha$ для любого α. Так как $\cap_\alpha A_\alpha = \widetilde{A}$, то $a \in \widetilde{A}$. $\square$

4.4.4 Эквивалентные определения аффинных множеств

Лемма (1-а)**.** *Пусть A — аффинное множество. Тогда аффинная оболочка конечного число точек* $\operatorname{aff}\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$ *для любых* $a_1, \dots, a_n \in A$, *для любого* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Индукция по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, лемма верна для любой аффинной комбинации не более, чем $n - 1$ точки. Докажем для n точек. Пусть точка a принадлежит аффинной оболочке n точек: $a \in \operatorname{aff}\{a_1, \dots, a_n\}$, где $a_1, \dots, a_n \in A$. Тогда $a = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i a_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$. Если $t_1 = 1$, то $a = a_1 \in A$. Если же $t_1 \neq 1$, то полагаем $\widetilde{t}_k = \frac{t_k}{1-t_1}$ при $k = 2, \dots, n$. Так как $\sum\limits_{k=2}^{n} \widetilde{t}_k = \frac{\sum_{k=2}^{n} t_k}{1-t_1}$ $= \frac{1-t_1}{1-t_1} = 1$, то $\widetilde{a} = \sum\limits_{k=2}^{n} \widetilde{t}_k a_k$ – аффинная комбинация, и по предположению индукции $\widetilde{a} \in A$. Тогда, в силу аффинности A, имеем $a = t_1 a_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} t_k a_k = t_1 a_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} (1-t_1)\widetilde{t}_k a_k = t_1 a_1 + (1-t_1)\widetilde{a} \in A$. □

Обозначим $\operatorname{aff} A := \bigcup\limits_{a_1,\dots,a_n \in A,\, n \in \mathbb{N}} \operatorname{aff}\{a_1, \dots, a_n\}$.
Из определения ($n = 1$) следует, что $\operatorname{aff} A \supset A$.

Лемма (2-а)**.** *Множество* $\operatorname{aff} A$ — *аффинное.*

Доказательство. Возьмем точки $a, b \in \operatorname{aff} A$. Значит, точки a, b представляются в виде $a = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$, $b = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j b_j$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j = 1$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ точка $(1-t)a + tb = (1-t)\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + t\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j b_j = \sum\limits_{i=1}^{m}(1-t)\lambda_i a_i + \sum\limits_{j=1}^{n} t\mu_j b_j \in \operatorname{aff} A$, так как $\sum\limits_{i=1}^{m}(1-t)\lambda_i + \sum\limits_{j=1}^{n} t\mu_j = (1-t) + t = 1$, и, следовательно, получили аффинную комбинацию точек $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$. □

Теорема 6. *Множество A — аффинное тогда и только тогда, когда* $\operatorname{aff} A = A$.

Доказательство. Пусть A — аффинное, тогда по лемме 1-а $\operatorname{aff} A \subset A$. Вложение $\operatorname{aff} A \supset A$ следует из определения $\operatorname{aff} A$ $(n = 1)$.

Обратно. Пусть $\operatorname{aff} A = A$. По лемме 2-а $\operatorname{aff} A$ — аффинное, значит, и A — аффинное. $\square$

Обозначим $\widetilde{A} = \cap_\alpha A_\alpha$ — пересечение всех аффинных множеств A_α, содержащих A $(A_\alpha \supset A)$.
Тогда $\widetilde{A}$ — аффинное как пересечение аффинных множеств.

Теорема 7. *Имеет место равенство* $\operatorname{aff} A = \widetilde{A}$.

Доказательство. Поскольку по лемме 2-а $\operatorname{aff} A$ — аффинное и $\operatorname{aff} A \supset A$ по определению $\operatorname{aff} A$ $(n = 1)$, то $\operatorname{aff} A \supset \widetilde{A}$.

Докажем, что $\operatorname{aff} A \subset \widetilde{A}$. Пусть $a \in \operatorname{aff} A$. Тогда $a \in \operatorname{aff}\{a_1, \dots, a_n\}$, $a_i \in A \subset A_\alpha$ для любого α. Поскольку A_α — аффинное, то по лемме 1-а $a \in A_\alpha$ для любого α. Так как $\cap_\alpha A_\alpha = \widetilde{A}$, то $a \in \widetilde{A}$. $\square$