1. Пересечение любого числа выпуклых (конических, аффинных) множеств является выпуклым (коническим, аффинным) множеством.

$\triangleleft$ A_α — выпуклые множества $\Rightarrow A = \cap_\alpha A_\alpha$ — выпуклое.
Возьмем $a, b \in A \Rightarrow a, b \in A_\alpha \ \forall \ \alpha$
$\Rightarrow ta + (1 - t)b \in A_\alpha \ \forall \ 0 \leq t \leq 1, \ \forall \ \alpha \Rightarrow ta + (1 - t)b \in A$. $\triangleright$

Упражнение 1. Верно ли утверждение: если для любых двух точек a и b из множества A их полусумма $\dfrac{a+b}{2} \in A$, то множество A выпукло?

2. $f\colon X \to Y$ — линейное отображение[1] $\Rightarrow A$ — выпуклое (коническое, аффинное) множество $\Leftrightarrow f(A)$ — выпуклое (коническое, аффинное) множество.

$\lhd$ Пусть A — выпуклое множество. Возьмем $x_1, x_2 \in f(A)$ $\Rightarrow x_1 = f(a_1)$, $x_2 = f(a_2)$, $a_1, a_2 \in A$.

$tx_1+(1-t)x_2 = tf(a_1)+(1-t)f(a_2) \overset{f\text{ — линейное}}{=} f(ta_1+(1-t)a_2)$
$\Rightarrow tx_1+(1-t)x_2 \in f(A) \Rightarrow f(A)$ — выпукло.

Обратно. Пусть $B := f(A)$ — выпуклое множество. Возьмем $a_1, a_2 \in f^{-1}(B) = A$, тогда $x_1 = f(a_1) \in B$, $x_2 = f(a_2) \in B \Rightarrow tx_1 + (1-t)x_2 \in B \ \forall\, 0 \le t \le 1$, так как B выпукло. В силу линейности отображения f:
$tx_1 + (1-t)x_2 = tf(a_1) + (1-t)f(a_2) = f(ta_1 + (1-t)a_2)$.
Значит, $ta_1 + (1-t)a_2 \in f^{-1}(B) = A \Rightarrow A$ — выпукло. $\rhd$

[1] f — линейное, если $f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b) \ \forall\, a, b \in X, \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Сдвиг $A \to b + A$ выпуклого (аффинного) множества является выпуклым (аффинным) множеством.
4. Гомотетия $A \to \lambda A$, $\lambda \in \mathbb{R}$, выпуклого множества является выпуклым множеством.
5. Прямое (декартово) произведение выпуклых множеств выпукло ($A \subset X$ и $B \subset Y$ выпуклы $\Rightarrow A \times B$ выпукло в $X \times Y$).
6. Алгебраическая сумма $A + B$ и разность $A - B$ выпуклых множеств выпуклы. Линейная комбинация конечного числа выпуклых множеств $\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k$ выпукла.

Свойства 3.-6. легко следуют из определений.

Упражнение 2. Доказать, что $\forall\ \alpha, \beta > 0$ и выпуклого множества A выполняется равенство: $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta) A$; в частности, $A + A = 2A$. Показать, что для невыпуклых множеств это, вообще говоря, неверно.

Лемма (1-v)

A — выпукло $\Rightarrow \mathrm{conv}\{a_1, \dots, a_n\} \subset A \ \forall\ a_1, \dots, a_n \in A$.

$\triangleleft$ Индукция по n. $n = 1$ – очевидно, $n = 2$ – по определению выпуклого множества. Предположим, лемма верна $\forall$ вып. оболочки не более, чем $n-1$ точки. Докажем для n.

Пусть $a \in \mathrm{conv}\{a_1, \dots, a_n\} \Rightarrow a = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i a_i, \ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1, \ t_i \geq 0$.

Если $t_1 = 1$, то $a = a_1 \in A$. Если же $t_1 \neq 1$, то полагаем

$\tilde{t}_k = \frac{t_k}{1-t_1} \geq 0$ при $k = 2, \dots, n$. Так как $\sum\limits_{k=2}^{n} \tilde{t}_k = \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} t_k}{1-t_1} = \frac{1-t_1}{1-t_1} = 1$,

то $\tilde{a} = \sum\limits_{k=2}^{n} \tilde{t}_k a_k$ – выпуклая комбинация, и по индукции $\tilde{a} \in A$.

Тогда в силу выпуклости A имеем $a = t_1 a_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} t_k a_k =$

$= t_1 a_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} (1 - t_1)\tilde{t}_k a_k = t_1 a_1 + (1 - t_1)\tilde{a} \in A$. $\triangleright$

Обозначим $\operatorname{conv} A := \bigcup\limits_{a_1,\ldots,a_n\in A,\ n\in\mathbb{N}} \operatorname{conv}\{a_1,\ldots,a_n\}$.

Из определения ($n=1$) следует, что $\operatorname{conv} A \supset A$.

Лемма (2-v)

Множество $\operatorname{conv} A$ — выпукло.

$\lhd$ Возьмем $a, b \in \operatorname{conv} A \Rightarrow a = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$, $b = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j b_j$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j = 1$, $\lambda_i, \mu_j \geq 0$. Тогда $\forall\ t \in [0;1]$ имеем

$$(1-t)a+tb = (1-t)\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + t\sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j = \sum_{i=1}^{m}(1-t)\lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{n} t\mu_j b_j.$$

Заметим, что все множители $(1-t)\lambda_i$ и $t\mu_j$ неотрицательны и $\sum\limits_{i=1}^{m}(1-t)\lambda_i + \sum\limits_{j=1}^{n} t\mu_j = (1-t)+t = 1$, значит, получили выпуклую комбинацию точек $a_1,\ldots,a_m, b_1,\ldots,b_n$, которая принадлежит $\operatorname{conv} A$. $\rhd$

Лемма 1-v.
A — выпукло $\Rightarrow \operatorname{conv}\{a_1,\dots,a_n\} \subset A\ \forall\ a_1,\dots,a_n \in A$.

$$\operatorname{conv} A := \bigcup_{a_1,\dots,a_n \in A,\ n\in\mathbb{N}} \operatorname{conv}\{a_1,\dots,a_n\}.$$

Лемма 2-v. Множество $\operatorname{conv} A$ — выпукло.

Теорема

A — выпукло $\Leftrightarrow \operatorname{conv} A = A$.

$\lhd$ A — выпукло $\Rightarrow$ по лемме 1-v $\operatorname{conv} A \subset A$.
Вложение $\operatorname{conv} A \supset A$ следует из определения $\operatorname{conv} A$ $(n=1)$.
Обратно. Пусть $\operatorname{conv} A = A$. По лемме 2-v $\operatorname{conv} A$ — выпукло $\Rightarrow A$ — выпукло. $\rhd$

Лемма 1-v.
A — выпукло $\Rightarrow \operatorname{conv}\{a_1, \dots, a_n\} \subset A \ \forall\ a_1, \dots, a_n \in A$.
Лемма 2-v. Множество

$$\operatorname{conv} A := \bigcup_{a_1,\dots,a_n \in A,\ n \in \mathbb{N}} \operatorname{conv}\{a_1, \dots, a_n\} \text{ — выпукло.}$$

Обозначим $\tilde{A} = \cap_\alpha A_\alpha$ — пересечение всех выпуклых множеств A_α, содержащих A $(A_\alpha \supset A)$.
Тогда $\tilde{A}$ — выпукло как пересечение выпуклых множеств.

Теорема $(\operatorname{conv} A = \tilde{A})$

$\lhd$ Поскольку по лемме 2-v $\operatorname{conv} A$ — выпукло и $\operatorname{conv} A \supset A$ следует из определения $\operatorname{conv} A$ $(n = 1)$, то $\operatorname{conv} A \supset \tilde{A}$.
Докажем, что $\operatorname{conv} A \subset \tilde{A}$. Пусть $a \in \operatorname{conv} A$
$\Rightarrow a \in \operatorname{conv}\{a_1, \dots, a_n\}$, $a_i \in A \subset A_\alpha \ \forall\ \alpha$. Поскольку A_α — выпукло, то по лемме 1-v $a \in A_\alpha \ \forall\ \alpha \overset{\cap_\alpha A_\alpha = \tilde{A}}{\Rightarrow} a \in \tilde{A}$. $\rhd$

Теорема

X — линейное нормированное пространство, $A \subset X$ — выпуклое множество $\Rightarrow \operatorname{int} A$ и $\overline{A}$ выпуклы.

$\lhd$ Пусть $a, b \in \operatorname{int} A \Rightarrow$ по определению внутренней точки $\exists\ \varepsilon > 0 : a + B_\varepsilon, b + B_\varepsilon \subset A \Rightarrow$ в силу выпуклости A $\forall\ t_1, t_2 \geq 0,\ t_1 + t_2 = 1$, имеем

$$t_1(a + B_\varepsilon) + t_2(b + B_\varepsilon) \subset A \overset{t_1 B_\varepsilon + t_2 B_\varepsilon = B_\varepsilon}{\Leftrightarrow} t_1 a + t_2 b + B_\varepsilon \subset A$$

$\Rightarrow t_1 a + t_2 b \in \operatorname{int} A \Rightarrow \operatorname{int} A$ — выпуклое множество.

Пусть $a, b \in \overline{A}$. Покажем, что $\forall\ t_1, t_2 \geq 0,\ t_1 + t_2 = 1$, $t_1 a + t_2 b \in \overline{A}$. Поскольку $a, b \in \overline{A}$, то $\exists$ последовательности $a_k, b_k \in A : a_k \to a,\ b_k \to b$. В силу выпуклости A точки $c_k := t_1 a_k + t_2 b_k \in A \Rightarrow\ c = \lim c_k \in \overline{A} \Rightarrow \overline{A}$ — выпуклое множество. $\rhd$

Лемма (1-k)

A — выпуклый конус $\Rightarrow \operatorname{conev}\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$, $\forall\, a_1, \dots, a_n \in A$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

$\lhd$ Пусть $a \in \operatorname{conev}\{a_1, \dots, a_n\} \Rightarrow a = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i a_i$, $t_i \geq 0$.

Если $t_1 = \ldots = t_n = 0$, то $a = 0 \in A$.

Если же $\lambda := \sum\limits_{i=1}^{n} t_i > 0$, то рассмотрим $b := \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{t_i}{\lambda} a_i = \dfrac{a}{\lambda}$.

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{t_i}{\lambda} = 1$, то b – выпуклая комбинация, и $b \in A$ по лемме 1-v в силу выпуклости A.

Поскольку A — конус, то $a = \lambda b \in A$. $\rhd$

Обозначим $\operatorname{conev} A := \bigcup\limits_{a_1,\ldots,a_n \in A,\ n \in \mathbb{N}} \operatorname{conev}\{a_1,\ldots,a_n\}$.

Из определения ($n = 1$) следует, что $\operatorname{conev} A \supset A$.

Лемма (2-k)

Множество $\operatorname{conev} A$ — выпуклый конус.

$\triangleleft$ $\operatorname{conev} A$ — конус следует из определения.

Докажем выпуклость. Возьмем $a, b \in \operatorname{conev} A$

$$\Rightarrow a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i,\ b = \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j,\ a_i, b_j \in A,\ \lambda_i, \mu_j \geq 0 \Rightarrow \forall\ t \in [0;1]$$

$$(1-t)a + tb \ = (1-t)\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + t\sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m}(1-t)\lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{n} t\mu_j b_j \in \operatorname{conev} A,$$ поскольку все множители $(1-t)\lambda_i$ и $t\mu_i$ неотрицательны (получили коническую комбинацию точек $a_1,\ldots,a_m, b_1,\ldots,b_n$)

$\Rightarrow \operatorname{conev} A$ — выпуклый конус. $\triangleright$

Лемма 1-k.
A — выпуклый конус $\Rightarrow \operatorname{conev}\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$,
$\forall\, a_1, \dots, a_n \in A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$\operatorname{conev} A := \bigcup_{a_1,\dots,a_n \in A,\, n \in \mathbb{N}} \operatorname{conev}\{a_1, \dots, a_n\}.$$

Лемма 2-k. Множество $\operatorname{conev} A$ — выпуклый конус.

Теорема

A — выпуклый конус $\Leftrightarrow \operatorname{conev} A = A$.

$\lhd$ A — выпуклый конус $\Rightarrow$ по лемме 1-k $\operatorname{conev} A \subset A$.
Вложение $\operatorname{conev} A \supset A$ следует из определения $\operatorname{conev} A$ $(n = 1)$.
Обратно. Пусть $\operatorname{conev} A = A$. По лемме 2-k $\operatorname{conev} A$ — выпуклый конус $\Rightarrow A$ — выпуклый конус. $\rhd$

Лемма 1-k.
A — выпуклый конус $\Rightarrow \operatorname{conev}\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$, $\forall\, a_1, \dots, a_n \in A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$\operatorname{conev} A := \bigcup_{a_1,\dots,a_n \in A,\ n \in \mathbb{N}} \operatorname{conev}\{a_1, \dots, a_n\}.$$

Лемма 2-k. Множество $\operatorname{conev} A$ — выпуклый конус.

Обозначим $\tilde{A} = \cap_\alpha A_\alpha$ — пересечение всех выпуклых конусов A_α, содержащих A ($A_\alpha \supset A$). Тогда $\tilde{A}$ — выпуклый конус как пересечение выпуклых конусов.

Теорема ($\operatorname{conev} A = \tilde{A}$)

$\lhd$ Поскольку по лемме 2-k $\operatorname{conev} A$ — выпуклый конус и $\operatorname{conev} A \supset A$ по определению $\operatorname{conev} A$ ($n = 1$) $\Rightarrow \operatorname{conev} A \supset \tilde{A}$.
Докажем, что $\operatorname{conev} A \subset \tilde{A}$. Пусть $a \in \operatorname{conev} A$
$\Rightarrow a \in \operatorname{conev}\{a_1, \dots, a_n\}$, $a_i \in A \subset A_\alpha\ \forall\, \alpha$. Поскольку A_α — выпуклый конус, то по лемме 1-k $a \in A_\alpha\ \forall\, \alpha \overset{\cap_\alpha A_\alpha = \tilde{A}}{\Rightarrow} a \in \tilde{A}$. $\rhd$

Лемма (1-а)

A — аффинное $\Rightarrow \operatorname{aff}\{a_1, \dots, a_n\} \subset A\ \forall\ a_1, \dots, a_n \in A$.

$\lhd$ Индукция по n. $n = 1$ – очевидно. Предположим, лемма верна $\forall$ аффинной комбинации не более, чем $n-1$ точки. Пусть $a \in \operatorname{aff}\{a_1, \dots, a_n\} \Rightarrow a = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i a_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$. Если $t_1 = 1$, то $a = a_1 \in A$. Если же $t_1 \neq 1$, то полагаем $\tilde{t}_k = \frac{t_k}{1-t_1}$ при $k = 2, \dots, n$. Так как $\sum\limits_{k=2}^{n} \tilde{t}_k = \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} t_k}{1-t_1} = \frac{1-t_1}{1-t_1} = 1$, то $\tilde{a} = \sum\limits_{k=2}^{n} \tilde{t}_k a_k$ – аффинная комбинация, и по индукции $\tilde{a} \in A$. Тогда, в силу аффинности A, имеем $a = t_1 a_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} t_k a_k =$
$= t_1 a_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} (1 - t_1)\tilde{t}_k a_k = t_1 a_1 + (1 - t_1)\tilde{a} \in A$. $\rhd$

Обозначим $\operatorname{aff} A := \bigcup\limits_{a_1,\ldots,a_n \in A,\, n\in\mathbb{N}} \operatorname{aff}\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Из определения ($n = 1$) следует, что $\operatorname{aff} A \supset A$.

Лемма (2-а)

Множество $\operatorname{aff} A$ — аффинное.

$\lhd$ Возьмем $a, b \in \operatorname{aff} A \Rightarrow a = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$, $b = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j b_j$,

$\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j = 1$. Тогда $\forall\ t \in \mathbb{R}$ имеем

$(1-t)a + tb = (1-t)\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + t\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j b_j$

$= \sum\limits_{i=1}^{m} (1-t)\lambda_i a_i + \sum\limits_{j=1}^{n} t\mu_j b_j$. Заметим, что

$\sum\limits_{i=1}^{m} (1-t)\lambda_i + \sum\limits_{j=1}^{n} t\mu_j = (1-t) + t = 1$, значит, получили

аффинную комбинацию точек $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$, которая

Лемма 1-а.
A — аффинное $\Rightarrow \operatorname{aff}\{a_1, \dots, a_n\} \subset A \ \forall\ a_1, \dots, a_n \in A$.

$$\operatorname{aff} A := \bigcup_{a_1,\dots,a_n \in A,\ n \in \mathbb{N}} \operatorname{aff}\{a_1, \dots, a_n\}.$$

Лемма 2-а. Множество $\operatorname{aff} A$ — аффинное.

Теорема

A — аффинное $\Leftrightarrow \operatorname{aff} A = A$.

$\lhd$ A — аффинное $\Rightarrow$ по лемме 1-а $\operatorname{aff} A \subset A$.
Вложение $\operatorname{aff} A \supset A$ следует из определения $\operatorname{aff} A$ $(n = 1)$.
Обратно. Пусть $\operatorname{aff} A = A$. По лемме 2-а $\operatorname{aff} A$ — аффинное $\Rightarrow A$ — аффинное. $\rhd$

Лемма 1-а.
A — аффинное $\Rightarrow \operatorname{aff}\{a_1, \ldots, a_n\} \subset A \; \forall \; a_1, \ldots, a_n \in A$.

$$\operatorname{aff} A := \bigcup_{a_1,\ldots,a_n \in A,\, n \in \mathbb{N}} \operatorname{aff}\{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Лемма 2-а. Множество $\operatorname{aff} A$ — аффинное.

Обозначим $\tilde{A} = \cap_\alpha A_\alpha$ — пересечение всех аффинных множеств A_α, содержащих A $(A_\alpha \supset A)$.
Тогда $\tilde{A}$ — аффинное как пересечение аффинных множеств.

Теорема ($\operatorname{aff} A = \tilde{A}$)

$\lhd$ Поскольку по лемме 2-а $\operatorname{aff} A$ — аффинное и $\operatorname{aff} A \supset A$ по определению $\operatorname{aff} A$ $(n = 1)$, то $\operatorname{aff} A \supset \tilde{A}$.
Докажем, что $\operatorname{aff} A \subset \tilde{A}$. Пусть $a \in \operatorname{aff} A \Rightarrow a \in \operatorname{aff}\{a_1, \ldots, a_n\}$, $a_i \in A \subset A_\alpha \; \forall \; \alpha$. Поскольку A_α — аффинное, то по лемме 1-а

$$a \in A_\alpha \; \forall \; \alpha \overset{\cap_\alpha A_\alpha = \tilde{A}}{\Rightarrow} a \in \tilde{A}. \rhd$$