Глава 1

Вариационное исчисление

Началу появления вариационного исчисления дала толчок работа И. Бернулли 1696 года “Новая задача, к решению которой приглашаются математики”, в которой поставлена задача о брахистохроне. В вертикальной плоскости даны две точки A и B. Определить путь AMB, спускаясь по которому под действием собственной тяжести тело M, начав двигаться из точки A, дойдет до точки B за кратчайшее время. Вводя в плоскости систему координат так, чтобы ось t была горизонтальна, а ось x вертикальна, и пользуясь законом Галилея о скорости тела, падающего вниз под действием силы тяжести, можно выписать формализованную постановку задачи:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}{\sqrt{x(t)}}\, dt \to \min;\ x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1.$$

Здесь и далее точка над функцией ($\dot{x}(t)$) обозначает производную этой функции по t. Поставленная задача была решена самим И. Бернулли, а также Я. Бернулли, Лейбницем, Лопиталем и Ньютоном. Решение Лейбница было основано на аппроксимации кривых ломаными. Развитая затем в работах Эйлера, эта идея заложила основы прямых методов в вариационном исчислении. Выписанная выше задача об экстремуме интегрального функционала при заданных условиях на концах, является простейшей задачей вариационного исчисления, к рассмотрению которых мы сейчас и перейдем.

В третьей главе приводятся также и другие элементарные задачи вариационного исчисления: задача Больца, изопериметрическая задача. Все они являются частными случаями более общей задачи Лагранжа. Как частные случаи задачи Лагранжа рассматриваются задача с подвижными концами и задача со старшими производными.

1 Простейшая задача вариационного исчисления

1.1 Постановка задачи

Простейшей задачей вариационного исчисления называется следующая экстремальная задача в пространстве $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$:

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \to \text{extr};\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1. \qquad (P)$$

Здесь $L = L(t, x, \dot{x})$ — функция трех переменных, называемая *интегрантом.* Отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$. Экстремум в задаче рассматривается среди непрерывно дифференцируемых функций $x \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$, удовлетворяющих *условиям на концах*, или *краевым условиям*: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. Такие функции называются *допустимыми.*

Определение. Говорим, что допустимая функция $\hat{x}$ доставляет *слабый локальный минимум* в задаче (P), и пишем $\hat{x} \in \text{wlocmin}^1 P$, если существует $\delta > 0$ такое, что $J(x(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot))$ для любой допустимой функции x ($x \in D(P)$), для которой $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1([t_0, t_1])}{}^2 < \delta$.

Наряду со слабым экстремумом в классическом вариационном исчислении также изучается сильный экстремум. При этом расширяется класс функций, среди которых рассматривается задача. Сильный экстремум ищется в более широком пространстве, чем $C^1([t_0, t_1])$, а именно, в пространстве кусочно-дифференцируемых функций $PC^1([t_0, t_1])$. Строгое определение сильного экстремума будет дано в главе 5 п. 1.

Однако, как правило, функции, доставляющие абсолютный (глобальный) экстремум в C^1 или PC^1, доставляют абсолютный экстремум и среди более широкого класса функций — всех абсолютно непрерывных функций, на которых функционал J определен.

---

[1] weak — слабый

[2] напомним, что $\|y\|_{C^1([t_0, t_1])} := \max\{\|y\|_{C([t_0, t_1])}, \|\dot{y}\|_{C([t_0, t_1])}\}$, где $\|y\|_{C([t_0, t_1])} := \max\{|y(t)| \mid t \in [t_0, t_1]\}$.

1.2 Вывод уравнения Эйлера с помощью основной леммы вариационного исчисления

Теорема. *Пусть функция $\hat{x}$ доставляет слабый локальный экстремум в задаче (P) ($\hat{x} \in wlocextr\, P$), функции $L, L_x, L_{\dot{x}}$ — непрерывны как функции трех переменных, $\hat{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0,\, t_1])$. Тогда функция $\hat{x}$ удовлетворяет уравнению Эйлера*

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\, t \in [t_0,\, t_1].$$

Здесь $\hat{L}_{\dot{x}}(t) := \dfrac{\partial}{\partial \dot{x}} L(t,x,\dot{x})\Big|_{\substack{x=\hat{x}(t)\\ \dot{x}=\dot{\hat{x}}(t)}}$, аналогично $\hat{L}_x(t) := \dfrac{\partial}{\partial x} L(t,x,\dot{x})\Big|_{\substack{x=\hat{x}(t)\\ \dot{x}=\dot{\hat{x}}(t)}}$. Выписанное дифференциальное уравнение второго порядка было впервые (в 1744 году) выведено Эйлером. Он, аппроксимируя кривые ломаными, вывел уравнение, которому были должны удовлетворять экстремали. Впоследствии Лагранж назвал его *уравнением Эйлера.* Сам Лагранж выводил это уравнение (в 1759 году) варьируя кривую, подозреваемую на экстремум. Выделил из приращения функционала главную линейную часть, которую назвал *вариацией*, и воспользовался тем, что в точке экстремума вариация должна обращаться в нуль. Метод вариации, предложенный Лагранжем, стал общепринятым. Этим методом мы и выведем далее уравнение Эйлера.

Функции, удовлетворяющие уравнению Эйлера задачи (P), называются *экстремалями.* Множество экстремалей обозначаем $E(P)$. Допустимые функции (класса C^1 с заданными граничными условиями), удовлетворяющие уравнению Эйлера, называются *допустимыми экстремалями.* Множество допустимых экстремалей в задаче (P) обозначаем $DE(P)$.

Доказательство теоремы. Возьмем произвольную, но фиксированную функцию $h \in C_0^1([t_0,\, t_1])$[3]. Поскольку $\hat{x} \in \mathrm{wlocextr}\, P$, то функция одного переменного

$$\varphi(\lambda) := J(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, \hat{x}(t) + \lambda h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t))\, dt$$

[3] $C_0^1([t_0,\, t_1]) := \big\{h(\cdot) \in C^1([t_0,\, t_1]) \mid h(t_0) = h(t_1) = 0\big\}$.

имеет экстремум при $\lambda = 0$. Положим $F(t, \lambda) = L(t, \hat{x}(t) + \lambda h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t))$. Из условий гладкости, наложенных на функции $L, \hat{x}, h$, следует, что функция φ дифференцируема в нуле. (Действительно, функции F и F_λ непрерывны в некотором прямоугольнике $[t_0,\, t_1] \times [-\lambda_0, \lambda_0]$, и, значит, по известной теореме из анализа можно дифференцировать под знаком интеграла.) Но тогда по теореме Ферма $\varphi'(0) = 0$. Дифференцируя функцию φ и полагая $\lambda = 0$, получаем

$$\varphi'(0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(\hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \hat{L}_x(t)h(t)\Big)dt = 0 \quad \forall\ h \in C_0^1([t_0,\, t_1]). \qquad (1)$$

Проинтегрируем по частям первое слагаемое в соотношении (1) для функции $h \in C_0^1([t_0,\, t_1])$ (здесь мы пользуемся условием теоремы, что функция $\hat{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0,\, t_1]))$:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \hat{L}_{\dot{x}}\dot{h}\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \hat{L}_{\dot{x}} dh = \hat{L}_{\dot{x}}(t)h(t)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1} h\, d\hat{L}_{\dot{x}} = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}\Big) h\, dt.$$

Свободные члены при интегрировании по частям равняются нулю, так как $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Тогда соотношение (1) перепишется в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t)\Big)h(t)\, dt = 0 \quad \forall\ h \in C_0^1([t_0,\, t_1]). \qquad (2)$$

Основная лемма вариационного исчисления (лемма Лагранжа). *Пусть функция a непрерывна на отрезке* $[t_0,\, t_1]$ $(a \in C([t_0,\, t_1])$ *и*

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)h(t)\, dt = 0 \quad \forall\ h \in C_0^1([t_0,\, t_1]).$$

Тогда $a(t) \equiv 0$.

Доказательство леммы. Предположим функция $a(\tau) \neq 0$ в некоторой точке $\tau \in (t_0,\, t_1)$ Для определенности, пусть $a(\tau) > 0$. Тогда в силу непрерывности функция $a(t) > 0$ и в некоторой окрестности точки τ, например, отрезке $[\tau_0,\, \tau_1] \subset [t_0,\, t_1]$.

Пусть $h \in C_0^1([t_0,\, t_1])$ — положительная в этой окрестности функция и равная нулю вне ее, типа “шапочки”, например,

$$h(t) = \begin{cases} (t-\tau_0)^2(t-\tau_1)^2, & t \in [\tau_0,\, \tau_1], \\ 0, & t \notin [\tau_0,\, \tau_1]. \end{cases}$$

Тогда $h \in C_0^1([t_0,\, t_1])$ — допустимая в лемме функция, но

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)h(t)\, dt > 0,$$

что противоречит условию леммы. Лемма Лагранжа доказана.

По лемме Лагранжа из соотношения (2) вытекает уравнение Эйлера.

1.3 Вывод уравнения Эйлера с помощью леммы Дюбуа-Реймона

В этом пункте мы выведем уравнение Эйлера для меньших условий гладкостей, наложенных на интегрант L. При выводе уравнения Эйлера вместо леммы Лагранжа будем использовать лемму Дюбуа-Реймона.

Теорема. *Пусть функция $\hat{x}$ доставляет слабый локальный экстремум в задаче (P) ($\hat{x} \in wlocextr\, P$), функции $L, L_x, L_{\dot{x}}$ — непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}} := \{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \mid t \in [t_0,\, t_1]\}$ $(L, L_x, L_{\dot{x}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})))$. Тогда $\hat{L}_{\dot{x}}$ непрерывно дифференцируемая функция ($\hat{L}_{\dot{x}} \in C^1([t_0,\, t_1])$) и выполнено уравнение Эйлера*

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \quad \forall\, t \in [t_0,\, t_1].$$

Доказательство. Возьмем произвольную, но фиксированную функцию $h \in C_0^1([t_0,\, t_1])$. Поскольку $\hat{x} \in \mathrm{wlocextr}\, P$, то функция одного переменного

$$\varphi(\lambda) := J(\hat{x}(\cdot) + \lambda h(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, \hat{x}(t) + \lambda h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t))\, dt$$

имеет экстремум при $\lambda = 0$. Положим $F(t, \lambda) = L(t, \hat{x}(t)+\lambda h(t), \dot{\hat{x}}(t)+\lambda\dot{h}(t))$. Из условий гладкости, наложенных на $L, \hat{x}, h$, следует, что функция φ дифференцируема в нуле. (Действительно, функции F и F_λ непрерывны в некотором прямоугольнике $[t_0,\, t_1] \times [-\lambda_0, \lambda_0]$, и, значит по известной теореме из анализа можно дифференцировать под знаком интеграла.) Но тогда по теореме Ферма $\varphi'(0) = 0$. Дифференцируя функцию φ и полагая $\lambda = 0$, получаем

$$\varphi'(0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(\hat{L}_x(t)h(t) + \hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{h}(t)\Big)dt = 0 \quad \forall\ h \in C_0^1([t_0,\, t_1]). \qquad (1)$$

Здесь мы не можем, как в предыдущем случае, брать второй интеграл по частям, поскольку не задана дифференцируемость функции $\hat{L}_{\dot{x}}(t)$.

Уравнение (1) означает, что вариация по Лагранжу функционала J равна нулю:

$$\delta J(\hat{x}(\cdot), h(\cdot)) = 0 \quad \forall\ h \in C_0^1([t_0,\, t_1]).$$

Лемма Дюбуа-Реймона. *Пусть функции* $a_0, a_1 \in C([t_0,\, t_1])$ *и*

$$\int_{t_0}^{t_1} \Big(a_1(t)\dot{h}(t) + a_0(t)h(t)\Big)dt = 0 \quad \forall\ h \in C_0^1([t_0,\, t_1]).$$

Тогда функция $a_1 \in C^1([t_0,\, t_1])$ *и выполняется дифференциальное уравнение* $-\dfrac{d}{dt}a_1(t) + a_0(t) = 0\ \forall\ t \in [t_0,\, t_1]$ (аналог уравнения Эйлера).

Из леммы Дюбуа-Реймона и соотношения (1) следует утверждение теоремы.

Доказательство леммы. Возьмем функцию $p \in C^1([t_0,\, t_1])$ такую, что

$$\dot{p}(t) = a_0(t), \qquad \int\limits_{t_0}^{t_1} p(t)\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} a_1(t)\, dt.$$

Она существует, так как $\dot{p}(t) = a_0(t)$ — дифференциальное уравнение 1-го порядка, решение которого определено с точностью до константы, а выбором константы можно удовлетворить второе условие.

Тогда равенство нулю из условия теоремы перепишется в следующем виде:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(a_1(t)\dot{h}(t) + a_0(t)h(t)\Big)dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} a_1(t)\dot{h}(t)\,dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} h(t)\,dp(t) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} a_1(t)\dot{h}(t)\,dt + h(t)p(t)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1} p(t)\dot{h}(t)\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(a_1(t) - p(t)\Big)\dot{h}(t)\,dt = 0$$
$$\forall\ h \in C_0^1([t_0,\,t_1]). \quad (2)$$

Положим функцию $\tilde{h}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Big(a_1(\tau) - p(\tau)\Big)d\tau$. Тогда $\dot{\tilde{h}} = a_1 - p$ и $\tilde{h} \in C_0^1([t_0,\,t_1])$. Действительно, равенство $\tilde{h}(t_0) = 0$ следует из определения функции $\tilde{h}$, равенство $\tilde{h}(t_1) = 0$ вытекает в силу выбора функции p:

$$\tilde{h}(t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(a_1(\tau) - p(\tau)\Big)d\tau = 0.$$

Значит, для выписанной функции $\tilde{h}$ должно выполняться равенство (2), то есть $\int\limits_{t_0}^{t_1}(a_1 - p)^2\,dt = 0$. Отсюда следует, что $a_1(t) \equiv p(t)$. Таким образом, $a_1 \in C^1([t_0,\,t_1])$ и $-\dfrac{d}{dt}a_1(t) + a_0(t) = 0$. Лемма Дюбуа-Реймона, а вместе с ней и теорема доказаны.

1.4 Векторный случай

Мы сформулировали теорему для одномерной простейшей задачи вариационного исчисления. Аналогично ставится векторная задача и формулируются необходимые условия экстремума.

Пусть $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — n-мерная вектор-функция, интегрант $L = L(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ — функция $2n+1$ переменного. Рассмотрим задачу в пространстве $C^1([t_0,\,t_1], \mathbb{R}) \times \cdots \times C^1([t_0,\,t_1], \mathbb{R})$:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)\,dt \to \mathrm{extr};$$

$$x_j(t_k) = x_{jk},\ i = 1, \ldots, n,\ k = 0, 1.$$

Необходимые условия экстремума в простейшей векторной задаче состоят из системы уравнений Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}_j}(t) + \hat{L}_{x_j}(t) = 0,\ j = 1, \dots, n.$$

Доказательство теоремы в векторном случае тривиально редуцируется к одномерному случаю.

1.5 Интегралы уравнения Эйлера

Если интегрант $L = L(t, x, \dot{x})$ не зависит явно от одной из переменных, то уравнение Эйлера сводится к более простым уравнениям.

1. Если интегрант $L = L(t, \dot{x})$ не зависит явно от x, то имеет место *интеграл импульса*

$$\hat{L}_{\dot{x}}(t) = \text{const}.$$

2. Если интегрант $L = L(x, \dot{x})$ не зависит явно от t, то имеет место *интеграл энергии* (оба названия интегралов взяты из классической механики)

$$\dot{\hat{x}}(t)\hat{L}_{\dot{x}}(t) - \hat{L}(t) = \text{const}.$$

Для доказательства интеграла энергии достаточно продифференцировать последнее равенство по t и воспользоваться уравнением Эйлера:

$$\ddot{\hat{x}}\hat{L}_{\dot{x}} + \dot{\hat{x}}\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} - \hat{L}_x\dot{\hat{x}} - \hat{L}_{\dot{x}}\ddot{\hat{x}} = 0 \iff -\dot{\hat{x}}\Big(- \frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x\Big) = 0.$$

Замечание. Отметим, что при выводе интеграла энергии мы использовали дополнительное предположение о существовании второй производной $\ddot{\hat{x}}$. Интеграл энергии имеет также лишнюю экстремаль $\hat{x}(t) = \text{const}$.

1.6 Примеры

Пример 1. $J(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \text{extr};\ x(0)=0,\ x(1)=1.$

Решение. Необходимое условие экстремума — уравнение Эйлера для интегранта $L = \dot{x}^2$

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \iff -\frac{d}{dt}2\dot{x} = 0 \iff -2\ddot{x} = 0 \iff \ddot{x} = 0.$$

Общее решение уравнения Эйлера: $x = C_1 t + C_2$.

Неизвестные константы C_1, C_2 находим из условий на концах

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0; \quad x(1) = 1 \Rightarrow C_1 = 1.$$

Значит, имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = t$.

Проверим, доставляет ли найденная допустимая экстремаль минимум или максимум в задаче. Для этого надо сравнить значение функционала $J(\hat{x})$ со значением функционала $J(x)$ на произвольной допустимой функции x. Это удобно сделать следующим образом. Представим функцию x в виде суммы $x = \hat{x} + h$, где функция h такова, что их сумма $\hat{x}+h$ допустима. Для этого надо взять $h \in C^1([0,\,1])$, для которой $h(0) = h(1) = 0$. Функционал J является квадратичным. Тогда в силу равенства

$$J(\hat{x}+h) - J(\hat{x}) = J(h) \quad \forall\ h \in C_0^1([0,\,1])$$

для квадратичного функционала на экстремали $\hat{x}$ имеем

$$J(\hat{x}+h) - J(\hat{x}) = \int\limits_0^1 \dot{h}^2\,dt \geq 0.$$

Таким образом, разность всегда неотрицательна, то есть $\hat{x} \in \text{absmin}$,

$$S_{\text{absmin}} = \int\limits_0^1 \dot{\hat{x}}^2\,dt = \int\limits_0^1 1\,dt = 1.$$

Покажем, что $S_{\text{absmax}} = +\infty$. Действительно, возьмем последовательность допустимых функций $x_n(t) = \hat{x}(t) + nt(t-1) = t + nt(t-1)$.

Тогда

$$J(x_n(\cdot)) = \int\limits_0^1 \dot{x}_n^2\,dt = \int\limits_0^1 \big(1+n(2t-1)\big)^2\,dt \to +\infty \text{ при } n \to \infty.$$

Ответ. Допустимая экстремаль $\hat{x} = t \in \text{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = 1$; $S_{\text{absmax}} = +\infty$.

Замечание. В примере 1 и во многих других задачах КВИ (где в отличии от задач оптимального управления нет ограничения на величину производной) показать, что $S_{\text{absmax}} = +\infty$ можно рассматривая значение функционала на допустимых функциях (типа "пилы") с большой по модулю производной. Как будет показано в Главе 5 (см. Лемма о скруглении углов) такие негладкие функции можно "сгладить".

Пример 2. $J(x(\cdot)) = \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}$; $x(0) = x\Big(\dfrac{3\pi}{2}\Big) = 0$.

Решение. Необходимое условие экстремума — уравнение Эйлера для интегранта $L = \dot{x}^2 - x^2$

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \iff -\frac{d}{dt}2\dot{x} - 2x = 0 \iff -2\ddot{x} - 2x = 0 \iff \ddot{x} + x = 0.$$

Общее решение уравнения Эйлера: $x = C_1 \sin t + C_2 \cos t$.

Неизвестные константы C_1, C_2 находим из условий на концах

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0; \quad x\Big(\frac{3\pi}{2}\Big) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Значит, имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x} \equiv 0$.

Проверим, доставляет ли найденная допустимая экстремаль минимум или максимум в задаче. Рассмотрим допустимые функции вида $x_\lambda(t) = \lambda \sin \dfrac{2t}{3}$. Очевидно, что $x_\lambda(\cdot) \to \hat{x}(\cdot)$ в метрике пространства $C^1([0, \frac{3\pi}{2}])$ при $\lambda \to 0$, но при этом

$$J(x_\lambda) = \lambda^2 \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \Big(\frac{4}{9}\cos^2\frac{2t}{3} - \sin^2\frac{2t}{3}\Big)dt =$$

$$= \lambda^2 \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \Big(\frac{4}{9}\cdot\frac{1+\cos\frac{4t}{3}}{2} - \frac{1-\cos\frac{4t}{3}}{2}\Big)dt = \lambda^2\frac{3\pi}{4}\Big(\frac{4}{9} - 1\Big) < 0 = J(\hat{x}).$$

Значение функционала на x_λ меньше чем на $\hat{x}$, значит, $\hat{x}$ не доставляет слабого локального минимума. Поскольку $J(x_\lambda(\cdot)) \to -\infty$ при $\lambda \to \infty$, то $S_{\text{absmin}} = -\infty$.

Если взять $h(t) = x_\lambda(t) = \lambda \sin \dfrac{4t}{3}$, то аналогично получим

$$J(x_\lambda) = \lambda^2 \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \Big(\frac{16}{9}\cos^2\frac{2t}{3} - \sin^2\frac{2t}{3}\Big) dt =$$

$$= \lambda^2 \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \Big(\frac{16}{9}\cdot\frac{1+\cos\frac{4t}{3}}{2} - \frac{1-\cos\frac{4t}{3}}{2}\Big) dt = \lambda^2 \frac{3\pi}{4}\Big(\frac{16}{9} - 1\Big) > 0 = J(\hat{x}).$$

Значение функционала на x_λ больше чем на $\hat{x}$, значит, $\hat{x}$ не доставляет слабого локального максимума. Поскольку $J(x_\lambda(\cdot)) \to +\infty$ при $\lambda \to \infty$, то $S_{\text{absmax}} = +\infty$.

Из этого примера видно, что уравнение Эйлера — необходимое, но не достаточное условие экстремума.

Ответ. Допустимая экстремаль $\hat{x} \equiv 0 \notin \operatorname{locextr}$; $S_{\text{absmin}} = -\infty$; $S_{\text{absmax}} = +\infty$.