МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Галеев Э. М.

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ

(типы задач и методы их решений)

Часть 2

- **Иррациональные уравнения и неравенства**
- **Показательные уравнения и неравенства**
- **Логарифмические уравнения и неравенства**

Москва 2012

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Галеев Э. М.

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ

(типы задач и методы их решений)

Часть 2

- **Иррациональные уравнения и неравенства**
- **Показательные уравнения и неравенства**
- **Логарифмические уравнения и неравенства**

Издание десятое, дополненное

Москва 2012

ББК 22.1 я 729
УДК 373.3

Учебно-методическое пособие

Галеев Э.М.

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ. Часть 2. Иррациональные уравнения и неравенства. Показательные уравнения и неравенства. Логарифмические уравнения и неравенства. Изд. 10-е, дополненное. Издательство "Попечительский совет механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова". 2012. - 80 с.

В пособии рассматриваются иррациональные уравнения и неравенства, показательные уравнения и неравенства, логарифмические уравнения и неравенства. Предпринята попытка систематизации видов встречающихся задач и схем их решений. Схема решений уравнений определенного вида подобрана таким образом, чтобы решение было наиболее простым. К задачам даны ответы, а к некоторым ключевым задачам даны и решения.

Предназначено для абитуриентов МГУ, выпускников школ при подготовке к ЕГЭ, для слушателей подготовительных отделений и курсов, учащихся математических классов.

Рецензент: д.ф.-м.н., Богатый С. А.

$\mathbf{Г}\dfrac{\mathbf{1702070000-08}}{\mathbf{3Ш7(03)-02}}$ **Без объявл.**

ISBN 5-87597-024-3

Оглавление

Предисловие

В пособии рассматриваются иррациональные уравнения и неравенства, показательные уравнения и неравенства, логарифмические уравнения и неравенства.

Книга состоит из шести параграфов: иррациональные уравнения, иррациональные неравенства, показательные уравнения, показательные неравенства, логарифмические уравнения, логарифмические неравенства. Параграфы делятся на пункты по типам задач. Например, параграф иррациональные уравнения делится на пункты: уравнения вида $\sqrt{f} = g$, уравнения вида $\sqrt{f} = \sqrt{g}$, уравнения с несколькими отдельно стоящими корнями, уравнения на замену переменных, системы уравнений и т. д. Таким образом, иррациональные уравнения разбиваются на определенные виды уравнений, которые имеют одинаковую схему решений. Предпринята попытка систематизации видов встречающихся задач и схем их решений. Схема решений уравнений определенного вида подобрана таким образом, чтобы решение было наиболее простым.

В начале каждого параграфа приводятся краткие сведения об изучаемых понятиях. Предполагается, что читатель уже знаком со школьной программой и собирается углубить имеющиеся у него знания и научиться правильным подходам и схемам решений уравнений и неравенств.

В начале каждого пункта приводятся схемы решений задач определенного вида. Иногда эти схемы могут отличаться от тех, что давались в школе, но тем не менее имеет смысл разобраться в них, понять, что заложенные в них идеи помогают приобрести более общий взгляд на уже известные факты, учат наиболее простым методам решений задач. Приведенные схемы подробно иллюстрируются при решении задач.

При работе с пособием рекомендуется вначале прочитать имеющуюся краткую теоретическую часть. Перед решением задачи вначале следует разобраться к какому виду относится или к какому виду сводится имеющаяся задача, а затем воспользоваться схемой решения задач этого вида.

Имеющиеся задачи распределены на две части. Одна часть предполагает решение задач на занятии под руководством преподавателя. Другая часть — для самостоятельного решения дома. Домашние задачи предназначены для закрепления материала, пройденного на занятии с преподавателем. Как правило, задачи подобные домашним уже решены на занятии.

Часть задач приведена с подробными решениями в разделе “Ответы, указания, решения”. Как правило, решения первых задач встречающихся видов подробно разобраны в разделе “Ответы, . . . ”. Рекомендуется прочитать решение, приведенное в книге. Понять, почему автор предпочел именно такое решение, а не другое. При решении подобных задач научиться использовать предложенный способ и форму записи решения. Для аналогичных задач решения не приводятся, а даются только ответы.

В пособии содержатся задачи и простые, и сложные. Задачи взяты из пособий по элементарной математике, приведенных в списке литературы (некоторые из них при этом изменены), составлены автором или взяты из вступительных экзаменов в МГУ. В этом случае указан факультет, год, номер задачи и общее количество задач. Для выездных экзаменов указывается город, в котором эта задача давалась.

Пособие предназначено для абитуриентов ВУЗов с повышенными требованиями по математике, для слушателей подготовительных отделений и курсов, учащихся математических классов и школ. В то же время знания приведенных приемов решения задач окажутся полезными и для любого школьника.

Галеев Э. М.

5 Иррациональные уравнения

Уравнение, в котором некоторые выражения, зависящие от неизвестного, находятся под знаком корня (радикала), называется *иррациональным.*

Основная идея большинства способов решения таких уравнений заключается, как правило, в сведении к рациональным алгебраическим уравнениям.

Возведение обеих частей уравнения или неравенства в нечетную степень или извлечение корня нечетной степени является эквивалентным преобразованием.

При решении иррациональных уравнений с четными степенями можно использовать два способа решения:

I. Избавление от иррациональности путем возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень с учетом равносильности преобразований. При этом уравнение заменяется эквивалентной ему смешанной системой уравнений и неравенств. В этом случае проверка не нужна. При возведении уравнения в четную степень необходимо, чтобы обе части уравнения имели один и тот же знак.

II. Избавление от иррациональности путем возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень без учета равносильности (эквивалентности) преобразований. Поскольку при возведении обеих частей уравнения в четную степень могут появиться посторонние корни (в этом случае мы получаем уравнение, являющееся следствием исходного), то необходимо сделать проверку. Иногда проверка корней бывает достаточно сложной. Проверка производится подстановкой корня в исходное уравнение и выяснения истинности соотношения. Недостаточно проверить, входит ли корень в ОДЗ.

При решении иррациональных уравнений можно использовать любой из этих способов решения. В наших примерах мы, как правило, пользуемся эквивалентными преобразованиями, поскольку при решении иррациональных неравенств зачастую удобнее пользоваться также эквивалентными преобразованиями.

5.1 Уравнения вида $\sqrt{f} = g$

Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ проводится по следующей схеме:

$$\sqrt{f} = g \iff \begin{cases} f = g^2, \\ g \geq 0. \end{cases}$$

Отметим, что условие из ОДЗ $f \geq 0$ не пишем, поскольку $f = g^2$ — полный квадрат и, следовательно, неотрицателен.

Решить уравнения:

5.1. (МГУ, социологический, 2005, 1(6))
$\sqrt{x^2 - 4x + 9} = 3.$

5.2. (МГУ, социологический, 2002, 1(6))
$\sqrt{3x + 10} = x + 2.$

5.3. (МГУ, химический, 1997, 1(6))
$\sqrt{3x^2 - 25x + 51} = 7 - 2x.$

5.4. (МГУ, физический, 1985, 2(6))
$\sqrt{x^4 - 4x - 16} = 2 - x.$

5.5. (МГУ, мех-мат, 1980, 1(5))
$(x^2 - 4)\sqrt{x + 1} = 0.$

5.6. (МГУ, химический, физико-химический, ФНМ, биолог., ФФМ, ФБиБ, географический, психологический, 2007, 1(8))
$(x^2 - 7|x| + 6)\sqrt{4x + 23} = 0.$

5.7. (МГУ, геологический, 1983, 1(6))
$(x + 1)\sqrt{x^2 + x - 2} = 2x + 2.$ **“Тест”**

5.8.* (МГУ, ФНМ, апрель 2001, 3(6))

$$x^2 - \frac{1}{2} = \sqrt{x + \frac{1}{2}}.$$

Домашнее задание

5.9. $\sqrt[3]{16 - x^3} = 4 - x.$

5.10. $\sqrt{7-x} = x-1.$

5.11. $2\sqrt{1-x^2} = x-2.$

5.12. (МГУ, почвоведения, 1977, 1(5))
$2\sqrt{x+5} = x+2.$

5.13. (МГУ, биологический, 1977, 1(5))
$\sqrt{6-4x-x^2} = x+4.$

5.14. (МГУ, экономический, 1973, 3(5))
$\sqrt{24-10x} = 3-4x.$

5.15. (МГУ, психологический, 1996, 1(5))
$\sqrt{2x^2-21x+4} = 2-11x.$

5.16. (МГУ, психологический, 1996, 1(5))
$\sqrt{x^2+51x+16} = 4+13x.$

5.17. $\sqrt{x+7} = x-3.$

5.18. (МГУ, мех-мат, 1980, 1(5))
$(9-x^2)\sqrt{2-x} = 0.$

5.19. (МГУ, геологический, 1983, 1(6))
$(x+1)\sqrt{16x+17} = (x+1)(8x-23).$ **"Тест"**

5.20. (МГУ, физический, 1985, 2(6))
$\sqrt{x^4-2x-5} = 1-x.$

5.21. (МГУ, почвоведения, 2006, 2(7))
$\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = 2\sqrt{x^3}.$ **"Тест"**

5.22. (МГУ, географический, май 1995, 3(5))
$\sqrt{2-x^2} = |x|-1.$

5.23. $\sqrt{1-\sqrt{1+x}} = x.$

5.24. $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}} = x.$

5.25. (МГУ, экономический, 1990, 2(6))
$5\sqrt{1+|x^2-1|} = 3+|5x+3|.$ **"Тест"**

5.2 Уравнения вида $\sqrt{f}=\sqrt{g}$

Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ проводится по следующей схеме:

$$\sqrt{f}=\sqrt{g} \iff \begin{cases} f=g, \\ f \geq 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f=g, \\ g \geq 0. \end{cases}$$

Условие $g \geq 0$ в первой системе можно не писать, поскольку $g=f$, а $f \geq 0$. Вместо условия $f \geq 0$ можно было написать условие $g \geq 0$, т. е. выписывается из условий $f \geq 0$ или $g \geq 0$ то, которое проще решить.

5.26. $\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{2x+2}$.

Домашнее задание

5.27. $\sqrt{5x-1}=\sqrt{3x+19}$.

5.28. $\sqrt{7x+1}=2\sqrt{x+4}$.

5.3 Уравнения с несколькими отдельно стоящими корнями

При решении уравнений с несколькими отдельно стоящими корнями надо последовательно избавляться от иррациональности путем возведения в квадрат обеих частей уравнения. Для соблюдения эквивалентности преобразования надо добавлять условие неотрицательности подкоренных выражений. Обе части уравнения должны иметь один и тот же знак (обычно плюс). Для этого корень, перед которым стоит знак минус, следует перенести в другую часть уравнения.

5.29. (МГУ, психологический, 2001, 1(5))
$\sqrt{x+2}+\sqrt{8-x}=\sqrt{15}$.

5.30. $3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=7$. **“Тест”**

5.31. (МГУ, геологический, экономический, 1982, 2(6))
$\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$.

Задачи №№ 5.32–5.38 решить устно:

5.32. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3}=0.$

5.33. $\sqrt{4-x}-\sqrt{x-6}=1.$

5.34. $\sqrt{x-3}-\sqrt{x+9}=\sqrt{4-x}.$

5.35. $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=2.$

5.36. (Элиста, 1995, 5(10))
$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}+\sqrt{x+1}=6.$

5.37. $\sqrt{-1-x}=\sqrt[3]{x-5}.$

5.38. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}>\dfrac{1}{2}.$

Домашнее задание

5.39. (МГУ, экономический, 2008, 1(7))
$$\frac{6x^2-21x+16}{1+\sqrt{2x-4}}=\sqrt{2x-4}-1.$$

5.40. (МГУ, психологический, 2001, 1(5))
$\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}=\sqrt{12}.$

5.41. (МГУ, ИСАА, 1991, 1(6))
$\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1.$ **"Тест"**

5.42. (МГУ, социологический, 2003, 1(6))
$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{3x+7}.$

5.43. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}.$

5.44. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}.$

5.45. $\sqrt{4x+9}-\sqrt{11x+1}-\sqrt{7x+4}=0.$

5.46. $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-7}.$

5.47. (МГУ, экономический, 1974, 1(5))
$\sqrt{2x^2-4x}=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}.$

5.48. $\sqrt{x+3}-1=\sqrt{x-\sqrt{x-2}}$.

5.49. $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$.

5.50. $\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=3$.

5.51. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}$.

5.52. $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$.

5.4 Уравнения на замену переменных

5.53. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0$.

5.54. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$.

5.55. (МГУ, ВМиК, 1989, 2(6))
$8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33$.

5.56. (МГУ, географический, 1976, 2(5))
$4\sqrt{x+1}=|2x-1|+3$.

5.57. (МГУ, географический, май 1999, 3(6))
$\sqrt{|x^2-8x+14|-1}=|x-4|-1$.

5.58.* $4x^2+12x\sqrt{x+1}=27(x+1)$. **“Тест”**

5.59.* $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{x^2+2x-3}=4-2x$.

5.60.* $x(x+4)+3x\sqrt{\dfrac{x+4}{x}}-4=0$. **“Тест”**

5.61.* $\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{5-x}=2$.

5.62.* $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$.

Домашнее задание

5.63. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$.

5.64. (МГУ, социологический, филологический, 2007, 1(8))
$-x-3\sqrt{-x}=10$.

5.65. $2\sqrt{x^2-3x+11}-\sqrt{x^2-3x+3}=5.$

5.66. $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}.$

5.67. (МГУ, геологический, 1994, 3(10))
$y^2+2\sqrt{y^2+3y-4}-4+3y=0.$

5.68. (МГУ, экономический (отд. экономики), 2006, 1(7))
$2\sqrt{2x^2-x+8}=x-2x^2+7.$

5.69. (МГУ, ВМиК, 1989, 2(6))
$6\sqrt{81x^2+54x+45}+6x+9x^2=35.$

5.70. $x\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}=2.$

5.71. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2011, 5(10))
$\sqrt[3]{15x+1-x^2}+\sqrt[3]{x^2-15x+27}=4.$

5.72. $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x.$ **"Тест"**

5.73.* (МГУ, ИСАА, 2005, 3(7))
$\sqrt{x}+\sqrt{x(x+2)}=\sqrt{(x+1)^3}.$

5.74. $\dfrac{(5-x)\sqrt{5-x}+(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2.$

5.75.* $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{13+x^2}=13-2x.$

5.76.* $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}+2x+2\sqrt{x^2-4}=6.$

5.77.* $\dfrac{10}{x-3}+\sqrt{\frac{x}{x-3}}=3x.$

5.78.* $(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}-28=0.$ **"Тест"**

5.79.* (МГУ, географический, май 1995, 5(6))
$\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{19-x}=3.$

5.80.* $\sqrt[4]{8-x}+\sqrt[4]{89+x}=5.$

5.81.* $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{35}{12}.$

5.5 Выделение полного квадрата в подкоренных выражениях

В тех случаях, когда под знаком квадратного корня стоит полный квадрат функции, можно корень извлечь. Необходимо здесь только помнить, что при извлечении квадратного[1] корня надо ставить знак модуля:

$$\sqrt{f^2} = |f|.$$

5.82. $2\sqrt{x^2-2x+1} - \sqrt{x^2+4x+4} = 3.$

5.83. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 1.$

Домашнее задание

5.84. $\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2-6x+9} = 1.$ **"Тест"**

5.85. $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} = 1.$

5.86. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$

5.87.* $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}} + \sqrt{x-\sqrt{6x-9}} = \sqrt{6}.$

5.6 Уравнения вида $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} = \sqrt[3]{h}$

Рассмотрим решение уравнений вида $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)}$. Возведем обе части уравнения в куб по формуле
$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$:

$$\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} = \sqrt[3]{h} \iff f+g+3\sqrt[3]{f}\sqrt[3]{g}(\sqrt[3]{f}+\sqrt[3]{g}) = h. \qquad (*)$$

По условию $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g} = \sqrt[3]{h}$. Поэтому вместо $\sqrt[3]{f} + \sqrt[3]{g}$ подставим $\sqrt[3]{h}$ в уравнение $(*)$. Получим следствие[2] исходного уравнения

$$f+g+3\sqrt[3]{f}\sqrt[3]{g}\sqrt[3]{h} = h \iff 3\sqrt[3]{f}\sqrt[3]{g}\sqrt[3]{h} = h-f-g.$$

---

[1] То же самое относится к корням четной степени: четвертой, шестой и т. д.

[2] Покажем на более простом примере, что при такой подстановке действительно получается не равносильное уравнение, а лишь его следствие:

$$x=1 \iff x^3=1 \iff x\cdot x^2 = 1 \Rightarrow x^2=1.$$

При последнем переходе подставили в первый сомножитель $x=1$. В итоге получили уравнение $x^2=1$, имеющее уже два корня $x_1=1$, $x_2=-1$.

Возведем опять обе части уравнения в куб:

$$27fgh = (h - f - g)^3.$$

Таким образом, избавились от иррациональности и получили алгебраическое уравнение. Отметим, что при подстановке условия уравнения в куб этого уравнения могут появиться посторонние корни. Поэтому обязательно надо сделать проверку полученных корней, подставляя их в исходное уравнение.

5.88. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1.$

5.89.* $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}.$

Домашнее задание

5.90. $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1.$

5.91. $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}.$ **"Тест"**

5.92. (МГУ, ВМиК, апрель 2004, устный)

$$\frac{\sqrt[3]{7-x} - \sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{x-5}} = 6 - x.$$

5.93.* $\sqrt[3]{(3-x)^2} + \sqrt[3]{(6+x)^2} - \sqrt[3]{(3-x)(6+x)} = 3.$

5.7 Нестандартные уравнения

5.94.* (МГУ, мех-мат, 2007, 5(6))

Найти наибольшее значение выражения

$$\sqrt{(x-1)(y-x)} + \sqrt{(7-y)(1-x)} + \sqrt{(x-y)(y-7)}$$

при $x \in [-2;\, 3]$ и $y \in [0;\, 11]$.

5.95. (МГУ, мех-мат, март 2001, 1(6))

$$3x - 2|x-2| = 3\sqrt{3x+18} - 2|\sqrt{3x+18} - 2|.$$

5.96. (МГУ, химический, 1989, 5(5); ВМиК, 2006, устный)

$$(2x+1)(2 + \sqrt{(2x+1)^2+3}) + 3x(2 + \sqrt{9x^2+3}) = 0.$$

5.97. $\sqrt{5+\sqrt{5+x}}=x.$

5.98. (МГУ, геологический (отд. геофизики), 1985, 5(6))
$\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2+2}=\sqrt{3x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+3x-1}.$

5.99. (МГУ, геологический (отд. общей геологии), 1985, 5(6))
$\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}.$

5.100. $\dfrac{1}{\sqrt{x+\dfrac{7}{2}}}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{7}{2}.$

5.101. $\sqrt{2x^2-7x+3}=\sqrt[4]{-2x^2-3x-1}.$

Домашнее задание

5.102. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)
$x+\sqrt{3+\sqrt{x}}=3.$

5.103. (МГУ, почвоведения, 2003, 4(6))
Найти наименьшее значение функции $y=\sqrt{3x^2+5}-\sqrt{3x^2}$ на интервале $[0;\,3]$.

5.104. $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4.$

5.105. $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}.$

5.106. $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{2}.$

5.107. $\dfrac{36}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{4}{\sqrt{y-1}}=28-4\sqrt{x-2}-\sqrt{y-1}.$

5.108. $\dfrac{45}{\sqrt{x^2+9}-x}=\frac{5x^2}{\sqrt{x^2+9}+3}+\sqrt{3x+31}.$

5.109. (МГУ, мех-мат, март 2001, 1(6))
$4x-3|x-1|=4\sqrt{5x+14}-3|\sqrt{5x+14}-1|.$

5.110. (МГУ, химический, 1989, 5(5))
$$(2x+1)(1+\sqrt{(2x+1)^2+7})+x(1+\sqrt{x^2+7})=0.$$

5.111. $3+\sqrt{3+\sqrt{x}}=x.$ **"Тест"**

5.112. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)
$$x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}.$$

5.113. $x^2-5=\sqrt{x+5}.$

5.114. (МГУ, геологический (отд. геофизики), 1985, 5(6))
$$\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}.$$

5.115.* (МГУ, ВМиК (отд. специалистов), 2006, 5(6))
При каждом значении параметра d решите уравнение
$$\sqrt{x^2-y^2-dx+3dy-2d^2}+\sqrt{x-y+d}\cdot\sqrt{4-2x+d}+$$
$$+\sqrt{-2x^2-2xy+(5d+4)x+(d+4)y-2d^2-8d}=4.$$

5.116. (МГУ, геологический (отд. общей геологии), 1985, 5(6))
$$\sqrt{(x+4)(2x+3)}-3\sqrt{x+8}=4-\sqrt{(x+8)(2x+3)}+3\sqrt{x+4}.$$

5.8 Вычисления

5.117. (МГУ, мех-мат, 1978, 1(5))
Разность $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$ является целым числом. Найдите это число.

5.118. Вычислить $\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}-\sqrt{3}.$

5.119. Вычислить $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}.$

5.120. (МГУ, почвоведения, 2002, 3(7))
Пусть $a=\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{50}$. Доказать, что число a^3-30a целое и найти его.

5.121. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2008”, 1(10))
Найти k, если $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{5}-2k}+4}+4}+4=\sqrt{5}+2.$

5.122.* Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби
$\dfrac{59}{1+3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}}.$

Домашнее задание

5.123. Вычислить $\dfrac{\sqrt{18}+\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{2}}.$

5.124. Упростите выражение
$$\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{x\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt[4]{x}+x}{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}+1.$$

5.125. Упростите выражение
$$\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$$
и вычислите при $a=-2{,}5$, $b=0{,}5$.

5.126. Упростите выражение
$$\left(\left(\frac{\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\sqrt[4]{bc}\right)^2+bc+3\right)(\sqrt{bc}+3)^{-1}.$$

5.127. Вычислить $\sqrt{(10-\sqrt{101})^2}-\sqrt{(10+\sqrt{101})^2}.$

5.128. $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-\dfrac{5}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^3}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{2}\sin\dfrac{7\pi}{4}.$

5.129. Вычислить $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}.$

5.130. Вычислить $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$.

5.131. Вычислите $x^3+3x-14$ при $x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}$.

5.132. Докажите, что если $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$, то $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

5.133. Вычислить $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$.

5.134. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе

$$\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}.$$

5.9 Системы уравнений

5.135. (МГУ, географический, май 1995, 1(6))

$$\begin{cases}\sqrt{x}(x+3y)=36,\\ \sqrt{y}(3x+y)=28.\end{cases}$$

5.136.* $\begin{cases}(x-y)^4=13x-4,\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{3x-y}=\sqrt{2}.\end{cases}$

5.137.* $\begin{cases}\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{y+\dfrac{1}{x}}=2\sqrt{2},\\ (x^2+1)y+(y^2+1)x=4xy.\end{cases}$

5.138.* (МГУ, геологический, 1976, 4(5))

$$\begin{cases}3-\sqrt{-1-y}=\sqrt{x+y},\\ \sqrt{x+y}+2=\sqrt{-3+x}.\end{cases}$$

Домашнее задание

5.139. (МГУ, экономический, отд. менеджмента, 2007, 2(6))

$$\begin{cases} x^2 = 81, \\ x + 1 = -2\sqrt{y^2 + 10y + 41}. \end{cases}$$

5.140. (МГУ, мех-мат, 1980, 4(5))

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 4xy - 3y^2} = x + 1, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

5.141. (МГУ, химический, 1977, 2(5))

$$\begin{cases} \sqrt{x + y - 1} = 1, \\ \sqrt{x - y + 2} = 2y - 2. \end{cases}$$

5.142. (МГУ, экономический, 1996, 1(6))

$$\begin{cases} |-x| - \sqrt[3]{y + 3} = 1, \\ (-x\sqrt{-x})^2 - y = 10. \end{cases}$$

5.143. (МГУ, химический, 1991, 3(5))

$$\begin{cases} \sqrt{2x - 1} + \sqrt{y + 3} = 3, \\ 2xy - y + 6x - 3 = 4. \end{cases}$$

5.144. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2004, 3(8))

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{y - 2} = 1, \\ x + y - 20 = 0. \end{cases}$$

5.145.* $\begin{cases} \sqrt{-1 - x} - \sqrt{2y - x} = 1, \\ \sqrt{1 - 2y} + \sqrt{2y - x} = 4. \end{cases}$

6 Иррациональные неравенства

6.1 Неравенства вида $\sqrt{f} < g$

Приведем формулу для решений неравенств вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ для строгого и нестрогого неравенства:

$$\sqrt{f} < g \iff \begin{cases} f < g^2, \\ g \geq 0, \\ f \geq 0, \end{cases} \qquad \sqrt{f} \leq g \iff \begin{cases} f \leq g^2, \\ g \geq 0, \\ f \geq 0. \end{cases}$$

Решить неравенства:

6.1. $\sqrt{2x+1} < 3$.

6.2. (МГУ, биологический, 2005, 4(7))
$\sqrt{x-1} < 3 - x$.

6.3. (МГУ, геологический, 1984, 2(6))
$\sqrt{x^2-3x+2} \leq 3x - 3$. **“Тест”**

6.4. (МГУ, мех-мат, 2010, 2(6))
$\dfrac{1-x}{x} > \sqrt{\dfrac{3x-2}{3x+4}}$.

Домашнее задание

6.5. $\sqrt{x+2} \leq x$.

6.6. $\sqrt{x+14} < x + 2$.

6.7. $\sqrt{(x-4)(5x+4)} < 2(2x-7)$.

6.8. $\sqrt{x^2-3x-10} < 8 - x$.

6.9. (МГУ, Московская школа экономики, 2007, 1(8))
$\sqrt{x^2-3x+2} \leq x - 1$.

6.10. (МГУ, геологический, 1984, 2(6))
$\sqrt{x^2-5x+6} \leq 3x - 6$. **“Тест”**

6.11. (МГУ, экономический, 2007, 1(7))

Для каждого значения x, удовлетворяющего условию $x^2 - |x| - 42 = 0$, найдите все числа y, для которых выполнено неравенство $-7\sqrt{y^2 - 10y + 34} \geq 4x + 7$.

6.12. (МГУ, экономический, 1983, 3(6))

$$\sqrt{5x^2 + 61x} < 4\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

6.13. Решите неравенство $\sqrt{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{4}} < \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}$.

6.14. (МГУ, географический, май 2003, 3(6))

$$2\sqrt{9 - x^2} < x + 3(\sqrt{2} + 1) - |x + 3(\sqrt{2} - 1)|.$$

6.15. (МГУ, биологический, 1997, 3(6))

$$\sqrt{|1 - 8x| - 2} \leq x + 1.$$

6.16.* (МГУ, мех-мат, май 1996, 1(6))

Найти все целочисленные решения неравенства

$$\sqrt{x^3 - 5x - 3} \leq 6 - x.$$

6.17.* $(7 - x)|2x - 9| > 2\sqrt{4x^3 - 52x^2 + 225x - 324}$.

6.2 Неравенства вида $\sqrt{f} > g$

Приведем формулу для решений неравенств вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$:

$$\sqrt{f} > g \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g \geq 0, \\ f > g^2, \end{cases} \\ \begin{cases} g < 0, \\ f \geq 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{1}$$

Такая схема решения наиболее часто используется при решении подобных неравенств в школе.

Однако решение системы (1) можно упростить, если заметить, что в системе (1) в первом случае неравенство $g \geq 0$ можно отбросить, поскольку при $g < 0$ решения неравенства $f > g^2$ все равно являются решением исходного неравенства. Поэтому неравенство можно также решать по одной из формул

$$\sqrt{f} > g \iff \left[\begin{array}{l} f > g^2, \\ \begin{cases} g < 0, \\ f \geq 0, \end{cases} \end{array}\right. \quad (2) \quad \text{или} \quad \sqrt{f} > g \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f > g^2, \\ g < 0, \end{array}\right. \\ f \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

При решении неравенств этого вида следует пользоваться той формулой, которая является более понятной.

6.18. (МГУ, физический, 1979, 4(6))
$\sqrt{x^2 + x - 2} > x.$

6.19. (МГУ, мех-мат, май 1995, 1(6))
$\dfrac{4x + 15 - 4x^2}{\sqrt{4x + 15} + 2x} \geq 0.$ **"Тест"**

6.20. (МГУ, мех-мат, март 1996, 2(6))
$\dfrac{x^3 - 8 + 6x(2 - x)}{|3 - 4x|} \leq \sqrt{4x - 3}.$

6.21. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2005", 6(10))
$5|x| \leq x(3x + 2 - 2\sqrt{8 - 2x - x^2}).$ **"Тест"**

6.22.* (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2006", 6(10))
$\sqrt{4 - x} - 2 \leq x|x - 3| + 4x.$

Домашнее задание

6.23. $\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 1} \geq x + 1.$

6.24. $\sqrt{2x + 2} \geq x - 3.$

6.25. $\sqrt{x + 46} > x + 4.$

6.26. (МГУ, геологический, МШЭ, 2008, 2(8))
$|x+1| \le \sqrt{(x+1)^2(x^2-25)}$. **"Тест"**

6.27. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 2(8))
$\sqrt{x^2+2x} - x > 1$.

6.28. (МГУ, химический, 1979, 2(5))
$\sqrt{x+3} > x+1$.

6.29. (МГУ, биологический, 1980, 3(5))
$\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

6.30. $\sqrt{(x+5)(3x+4)} > 4(x-1)$. **"Тест"**

6.31. (МГУ, геологический, 2005, 2(8))
$\sqrt{-x^2-x+6} - x \ge 2$.

6.32. $\sqrt{2x^2-4x-7} - x + 1 > 0$.

6.33. (МГУ, ВМиК, 1975, 1(5))
$\sqrt{x^2+4x-5} - 2x + 3 > 0$.

6.34. (МГУ, ИСАА, 1993, 2(6))
$$\frac{\sqrt{x^2-5x+8}}{3-x} \ge 1.$$

6.35. $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}} + 2 > x$.

6.36. (МГУ, психологический, 1999, 1(6))
$$\frac{5x-3}{\sqrt{7x-4}} < 1.$$

6.37. (МГУ, биологический, ФФМ, 1993, 3(6))
$$5\sqrt{1-\frac{1}{z}} > \frac{7z-1}{z}.$$

6.3 Неравенства вида $\sqrt{f} > \sqrt{g}$

Приведем формулу для решений неравенств вида $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$:

$$\sqrt{f} > \sqrt{g} \iff \begin{cases} f > g, \\ g \geq 0. \end{cases}$$

6.38. $\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}$.

6.39. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} > 0$.

6.40. (МГУ, “Ломоносов-2011”, заочный тур, 2(10))
$\sqrt{x^2-1} \leq \sqrt{5x^2-1-4x-x^3}$. **“Тест”**

Домашнее задание

6.41. $\sqrt{(x-3)(2-x)} < \sqrt{4x^2+12x+11}$.

6.42. (МГУ, геологический, май 1997, 3(8))
$\sqrt{|x+1|-1} > \sqrt{|x+1|-1997}$.

6.43. (МГУ, геологический, 2006, 2(8))
$\sqrt{\frac{5}{2}x^2 - x^3} \geq \sqrt{6x - \frac{5}{2}x^2}$.

6.44. (МГУ, химический, 1968, 2(4))
$\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x}$. **“Тест”**

6.45. (МГУ, мех-мат, 1998, 1(6))
$3\sqrt{|x+1|-3} \geq \sqrt{x^2-2x-3}$.

6.4 Неравенства с несколькими корнями

При решении неравенств с несколькими корнями приходится возводить обе части неравенства в квадрат. Для соблюдения эквивалентности необходимо, чтобы обе части неравенства были неотрицательны. Если в какой-то части неравенства имеется слагаемое со знаком минус, то будем переносить его в другую часть неравенства.

6.46. $\sqrt{2-x}-\sqrt{x}>1.$

6.47. $\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}<1.$

6.48. (МГУ, психологический, 1993, 2(5))

$\sqrt{1-x}-\sqrt{x}>\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$ **"Тест"**

6.49. (МГУ, мехмат, 2003, 1(6))

$$5\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}}+4\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}}\le 9\sqrt{x+4}.$$

Домашнее задание

6.50. $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-2x+1}<\sqrt{9x^2+12x+4}.$

6.51. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}\le 1.$

6.52. $\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}-1\ge 0.$

6.53. (МГУ, психологический, 1993, 2(5))

$\sqrt{x}-\sqrt{1-x}>\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}.$ **"Тест"**

6.54. (МГУ, физический, 1961)

$\sqrt{7x-13}-\sqrt{3x-19}>\sqrt{5x-27}.$

6.55. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}<\sqrt{x-2}.$

6.56. (МГУ, ФФМ, май 2003, 3(7))

$\sqrt{2-x}-\sqrt{4+x}\le\sqrt{x+3}.$

6.57. (МГУ, химический, 1968, 2(4))

$\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1.$

6.58. (МГУ, ВМиК, 1998, 2(6))

$|\sqrt{x-4}-3|>|\sqrt{9-x}-2|+1.$

6.59. $\sqrt{|3x-8|-5}\ge\dfrac{3\sqrt{3x^2-16x+13}}{x-1}.$

6.5 Дробно-рациональные неравенства

При решении иррациональных неравенств можно воспользоваться методом интервалов. Особенно удобно его применять при решении дробно-рациональных неравенств. Напомним вкратце суть метода (см. также Часть 1, п. 1.3).

Выписать ОДЗ (область допустимых значений) неравенства, отметить её на числовой прямой. Найти корни числителя и знаменателя, отметить из них на прямой только те, что входят в ОДЗ. Далее решить неравенство методом интервалов.

В рассматриваемых ниже задачах множество точек, не входящих в ОДЗ, мы будем заштриховывать и в дальнейшем из рассмотрения исключать. Особое внимание нужно обратить на граничные точки заштрихованных множеств, которые могут входить в ОДЗ и даже могут быть в числе решений неравенства.

6.60. $(2+x)\sqrt{(4-x)(5-x)} \geq 0.$

6.61. (МГУ, 2011, 4(8))
$$\frac{\sqrt{4x-2}-1}{\sqrt{3x-1}-1} > 1.$$

6.62. $x\sqrt{3-2x}+1 > 0.$

6.63. (МГУ, ВМиК, 1982, 3(6))
$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geq 2.$$

6.64. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2008, 2(10))
$$\frac{\sqrt{x^2(10-x^2)}}{x} \leq 2x+5.$$

6.65. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2007”, 4(10))
$$\frac{\sqrt{8-x}-|2x-1|}{\sqrt{x+7}-|2x-1|} \leq 1.$$

6.66.* (МГУ, мех-мат, май 2002, 2(6))
$$\sqrt[3]{2x-x\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}+\sqrt[3]{1-2x} \leq 0.$$ **“Тест”**

Домашнее задание

6.67. $(x+3)\sqrt{\dfrac{6-x}{8-x}} \geq 0.$

6.68. $\dfrac{(x+3)\sqrt{6-x}}{\sqrt{8-x}} \geq 0.$

6.69. $(2+x)\sqrt{4-x}\sqrt{5-x} \geq 0.$

6.70. $\sqrt{x}(3x-1) \geq \sqrt{x}(2x+4).$ **"Тест"**

6.71. (МГУ, географический, 1968, 4(4))
$\dfrac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1.$

6.72. $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{13-x^2}} \geq x-1.$

6.73. $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1.$

6.74. (МГУ, биологический, 2003, 2(6))
$\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{4-2x} \geq -1.$

6.75. $\dfrac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x} < 1.$

6.76. (МГУ, экономический, 1988, 3(6))
$\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5} > 1.$

6.77. (МГУ, психологический, 1998, 3(6))
$\dfrac{\sqrt{5x+3}-2x+5}{6-7x^2+41x} \leq 0.$ **"Тест"**

6.78. (МГУ, ВМиК, 1998, 2(6))
$\dfrac{3(4x^2-9)}{\sqrt{3x^2-3}} \leq 2x+3.$

6.79. $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+9}} < \sqrt{1+2x}-1.$

6.80. (МГУ, мех-мат, март 1990, 3(6))
$$\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x} \leq x.$$

6.81. $x\sqrt{10-x^2} > x^2-6.$ **"Тест"**

6.82.* (МГУ, мех-мат, май 2002, 2(6))
$$\sqrt[3]{2x-(x+2)\sqrt{x+2}+3}+\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3+2x} \leq 0.$$ **"Тест"**

6.6 Неравенства на замену переменных

6.83. $\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} > 2.$ **"Тест"**

6.84. (МГУ, геологический, 1991, 3(6))
$$\frac{1}{\sqrt{x}+2} \geq \frac{2}{4-\sqrt{x}}.$$

6.85. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2} > 1.$

6.86. $2\sqrt[3]{(x-1)^2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}} \geq 1.$

6.87. (МГУ, биологический, 1983, 3(5))
$$8+6\,|3-\sqrt{x+5}| > x.$$

6.88.* (МГУ, ВМиК, 1990, 4(6))
$$\sqrt{9v^2-48v-21}+\sqrt{9v^2-51v-15} \leq |3v-6|.$$

Домашнее задание

6.89. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x} < 12.$

6.90. $\sqrt{x^2+17}-\sqrt[4]{x^2+17} > 6.$

6.91. $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x} < 2.$

6.92. $\sqrt{2x-4} > 4-\sqrt{x}.$

6.93. $\sqrt{5x^2+10x+1} \geq 7-x^2-2x.$

6.94. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} \leq \dfrac{3}{2}$.

6.95. $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}} + \sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}} > 2$. **"Тест"**

6.96. $\sqrt{2 - \dfrac{2}{x+1}} < \sqrt{2 + \dfrac{2}{x}} + 1$.

6.97. $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} > 1$.

6.98. $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} \leq 2$.

6.99. (МГУ, экономический, 1993, 3(6))
$|x+3| \leq 6 - 3\sqrt{1-x}$. **"Тест"**

6.100. (МГУ, психологический, 2003, 3(5))
$|3x+1| + \sqrt{3x+4} \leq 3$.

6.101. (МГУ, ВМиК (отд. специалистов), 2006, 3(6))
$11\sqrt{2x - \sqrt{48x - 144}} > 2x - 12$.

6.7 Нестандартные неравенства

6.102.* $\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2} < \sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-4}$.

6.103.* (МГУ, геологический, 1975, 5(5))
$\sqrt{x+7} - 1 < \sqrt{-x-5} + \sqrt{(x+7)(-x-5)}$.

6.104.* (МГУ, экономический, 1975, 3(4))
$$\sqrt{9 - \frac{9}{x}} < x - \sqrt{x - \frac{9}{x}}.$$

6.105.* (МГУ, ф-т Государственного управления, 2008, 5(7))
$x - \sqrt{6x - x^2 - 8} \leq 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

6.106.* $5\sqrt{18x^2 - 15x + 3} + 7\sqrt{6x-3} + 3\sqrt{3x-1} \geq 48x - 17$.

Домашнее задание

6.107. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов, 2007, 2(8))
$$\frac{1}{\sqrt{x^2-7}} + x \leq \frac{1}{\sqrt{x^2-7}} + 9.$$

6.108. $x^3 - \sqrt{1-x} \ge x - \sqrt{1-x}$. **“Тест”**

6.109. (МГУ, мех-мат, тест, 2003, 7(10))
$$\sqrt{6x-3x^2} - 2\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{6x-5-x^2} > 3-x.$$

6.110.* $\sqrt{x} + \sqrt{x^2+3x} > 3$.

6.111.* $\sqrt{25-x^2} + \sqrt{x^2+7x} > 3$.

6.112.* $\sqrt{x^2-8x+15} + \sqrt{x^2+2x-15} > \sqrt{4x^2-18x+18}$.

6.113.* (МГУ, геологический, 1975, 5(5))
$$\sqrt{x+5} < 1 + \sqrt{-x-3} + \sqrt{(x+5)(-x-3)}.$$

6.114.* (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2010”, 4(10))
$$\frac{1}{\sqrt{-x-2}} - \frac{1}{\sqrt{x+4}} \le 1 + \frac{1}{\sqrt{(x+4)(-x-2)}}.$$

6.115.* (МГУ, биологический, биоинженерии, май 2002, 4(5))
$$\log_3(\sqrt{4x^2-1} + |x|) \le \log_{|x+4|}(3x^2-1)\log_3|x+4|.$$

6.8 Системы неравенств

6.116.* (МГУ, химический, май 1996, 5(5)
$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+5x+5} \ge 2, \\ x^2+6x+5 \le 0. \end{cases}$$

Домашнее задание

6.117. $\begin{cases} \dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} > \dfrac{1}{x}, \\ \sqrt{x-2}\sqrt{4-x^2} \le 0. \end{cases}$

6.118. $\begin{cases} \sqrt{4-3x} \ge x, \\ \sqrt{x} + \sqrt{x-1} < 5. \end{cases}$

7 Показательные уравнения

Показательной функцией является функция a^x, где основание $a > 0$. Если $a = 1$, то $a^x = 1$ для любого значения x.

Для преобразования показательных функций используются формулы:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad \sqrt[x]{a} = a^{\frac{y}{x}} \quad (x = 2;\, 3, \ldots),$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \qquad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется *показательным уравнением.*

7.1 Уравнения с постоянным основанием

Простейшим показательным уравнением является уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Приведем формулу для решения таких уравнений:

$$a^f = a^g \iff f = g.$$

При решении уравнения вида $a^{f(x)} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, необходимо представить число b как a в некоторой степени: $b = a^{\log_a b}$. Эта формула называется *основным логарифмическим тождеством.* Логарифмические функции и логарифмические уравнения более подробно будут изучаться далее. Приведем формулу для решения таких уравнений:

$$a^f = b \iff f = \log_a b.$$

Решить уравнения:

7.1. $\sqrt{3^x} \cdot \sqrt{5^x} = 225$.

7.2. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2007”, 2(10))
$\sqrt{2^{(x^2)}} = \left(2^{\sqrt[5]{x}}\right)^5$.

7.3. (МГУ, географический, 1973, 4(5))

Найти решения уравнения $3^{x^2+4x} = \dfrac{1}{25}$, удовлетворяющие неравенству $x > -3$.

Домашнее задание

7.4. (МГУ, психологический, 2006, 1(6))
$|7^x - 3| = 7^x + 1.$

7.5. (МГУ, экономический, 1986, 1(6))
$2^{|x+1|} = (\sqrt{2})^{-2x+3}.$

7.6. $9^{3-5x} \cdot 7^{5x-3} = 1.$

7.7. (МГУ, почвоведения, 1990, 1(6))
$2 - 3^{x-2} = 3^{x-1}.$

7.8. (МГУ, физический, 1999, 2(8))
$2^{2x-5} - 4^{x-2} = 32^{\frac{2x}{5}} - 66.$

7.9. (Ташкентский ф-л МГУ, 2007, 3(10))
$$2^{2x+3} \cdot 3^x + 2 \cdot 4^x \cdot 3^{x+2} = \frac{13}{72}.$$

7.10. $16^{\frac{x+5}{x-7}} = 512 \cdot 64^{\frac{x+17}{x-3}}.$

7.11. $8^{\frac{x-3}{3x-7}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{0{,}25^{\frac{3x-1}{x-1}}}} = 1.$

7.12. (МГУ, экономический, 1997, 1(6))
$3^{|x|} = 5^{x^2+3x}.$ **“Тест”**

7.13.* (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2005, 5(10))
Найти произведение всех действительных корней уравнения:
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2^{\log_2^2 x} = 2^{\frac{3}{\sqrt{2}}(\log_2 x - \log_x 2)}.$$

7.2 Замена переменных

7.14. (МГУ, экономический, апрель 2003, 1(5))
$2 \cdot 4^x - 31 \cdot 2^x - 16 = 0.$

7.15. (МГУ, химический, 1970, 2(5))
$4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}.$

7.16. (МГУ, психологический, 1993, 1(5))
$3^{\frac{x+2}{3x-4}} - 7 = 2 \cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}.$

7.17. Решить уравнение $\left(4+\sqrt{15}\right)^x + \left(4-\sqrt{15}\right)^x = 62$ и показать, что корни являются целыми числами. **"Тест"**

7.18. (МГУ, химический, 2000, 6(6))
$(26+15\sqrt{3})^x - 5(7+4\sqrt{3})^x + 6(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 5.$

Домашнее задание

7.19. (МГУ, химический, 1990, 1(6))
$4^x + 3 \cdot 2^{x+2} = 64.$

7.20. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810.$

7.21. (МГУ, социологический, 2005, 2(6))
$3 \cdot 81^x - 10 \cdot 9^x + 3 = 0.$

7.22. (МГУ, психологический, 2004, 1(5))
$16^x - 8 \cdot 4^x - 2 = 0.$

7.23. (МГУ, Московская школа экономики, 2007, 4(8))
$4 \cdot 25^{\sqrt{x}} - 23 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 15 = 0.$

7.24. (МГУ, психологический, 2002, 3(6))
$$2^{2^x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^x-1} = 3.$$

7.25. (МГУ, биологический, 1973, 5(5))
$$4^{3x^2+x}-8=2\cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}.$$

7.26. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2007, 2(10))
$$2^{\sqrt{4x^2-12x+9}}+4^{x-1}=6.$$

7.27. $9^x+9^{-x}-3^{1+x}+3^{1-x}=6.$

7.28. (МГУ, мех-мат, 1998, 1(6))
$$3^{2x}-2\cdot 3^{x-1}+\left|3^x-\frac{1}{4}\right|=\frac{13}{12}.$$

7.29. Решить уравнение $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10$ и показать, что корни являются целыми числами. **“Тест”**

7.30. (МГУ, химический, 2000, 6(6))
$$(26+15\sqrt{3})^x-3(7+4\sqrt{3})^x-2(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=3.$$

7.3 Однородные уравнения

Напомним, что *однородным многочленом* называется многочлен от нескольких переменных, у которого все слагаемые (одночлены) имеют одинаковую суммарную степень.

Например, суммарная степень одночлена $4x^2y^3$ равняется $2+3=5$.

Если после замены переменных функция становится однородным многочленом, то такая функция называется *однородной функцией*. Однородные уравнения решаются делением обеих частей уравнения на один из одночленов. При этом получается алгебраическое уравнение уже относительно одной переменной.

7.31. $6\cdot 9^x-13\cdot 6^x+6\cdot 4^x=0.$

7.32. (МГУ, физический, 1997, 2(8))
$$7\cdot\frac{4^{x-2}}{4^x-3\cdot 5^x}=1+3\cdot\left(\tfrac{5}{4}\right)^x.$$

Домашнее задание

7.33. (МГУ, почвоведения, 1988, 3(5))
$3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0.$

7.34. $7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0.$

7.35. (МГУ, геологический, 1982, 3(6))
$9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}.$

7.36. (МГУ, геологический, 1986, 3(6))
$\dfrac{2 \cdot 6^x - 4^x - 15}{6^x - 9^x - 5} = 3.$

7.37. (МГУ, 2011, 6(8))

Найти максимальное значение функции $\dfrac{4^x}{2 \cdot 5^{2x} - 10^x + 4^x}$ и точку, в которой оно достигается.

7.4 Уравнения вида $f^g = f^h$

Функция $f(x)^{g(x)}$ является сложнопоказательной функцией, у которой, в отличие от показательной функции a^x, основание a не является константой. Область определения (допустимых значений) основания сложнопоказательной функции: $f(x) > 0$.

Решение уравнений на ОДЗ f, g, h проводится по схеме:

$$f^g = f^h \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f = 1, \\ g = h, \end{array} \right. \\ f > 0. \end{cases}$$

7.38. $|x-2|^{10x^2-1} = |x-2|^{3x}.$

Домашнее задание

7.39. $|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1.$

7.40. $(x^2 - 4x + 3)^{\sqrt{x-2}} = 1.$ **“Тест”**

7.5 Трансцендентные уравнения

Трансцендентными уравнениями называются уравнения, в которых присутствуют функции разной природы, например, тригонометрические и показательные, показательные и многочлены. Такие уравнения в общем случае не решаются. Они могут быть решены в частных случаях, например, иногда можно угадать корень и доказать, что других корней нет или разложить выражение на множители.

7.41. $7^{6-x} = x + 2$.

7.42. $3^x + 5^x = 34$.

7.43. $x2^x = 8$.

7.44. $4^x + 3^x = 5^x$.

7.45. $4^x + (x-1)2^x = 6 - 2x$.

7.46.* (МГУ, химический, 1993, 5(5))
Найдите число решений уравнения $2^{x+1} + 2^{1-x} = 1 - 4x - x^2$ и дайте обоснование ответа.

7.47.* (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2008, 6(10))
Найти все положительные корни уравнения $x^{-2x} = 2$.

Домашнее задание

7.48. $2^x = 3 - x$.

7.49. $6^x - 3^x = 3$.

7.50. $1 + 3^{x/2} = 2^x$.

7.51. $5^x - 2^{2x} = 3^x$.

7.52. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

7.53. $(x+1)9^{x-3}+4x\cdot 3^{x-3}-16=0$.

7.54. $2^{3x^2-2x^3}=\dfrac{x^2+1}{x}$.

7.55. (МГУ, мех-мат, 1994, устный)
Доказать, что уравнение $2^{x^2}\cdot 3^{-x}=\dfrac{2}{5}$ не имеет решений.

7.6 Системы уравнений

7.56. (МГУ, географический, 1972, 4(5))
Найти все числа x и y, для которых $\begin{cases}2^{x+1}=4y^2+1,\\ 2^x\le 2y.\end{cases}$

7.57. (МГУ, географический, 1983, 4(5))

$$\begin{cases}2^{|x^2-2x-3|-\log_2 3}=3^{-y-4},\\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2\le 8.\end{cases}$$

7.58. (МГУ, ВМиК, 1997, 4(6))

$$\begin{cases}4^x+5\cdot 2^x-2\cdot 3^y=2,\\ 2\cdot 9^y+2^x+2\cdot 3^y=1.\end{cases}$$

Домашнее задание

7.59. (МГУ, ВМиК, 1985, 1(6))

$$\begin{cases}6^x-2\cdot 3^y=2,\\ 6^x\cdot 3^y=12.\end{cases}$$

7.60. (МГУ, почвоведения, 1983, 3(5))

$$\begin{cases}x+2^{y+1}=3,\\ 4x+4^y=32.\end{cases}$$

7.61. (МГУ, экономический (отд. менеджмента), 1996, 2(6))

$$\begin{cases}x+3^y=2,\\ x^3+27^y=26.\end{cases}$$

7.62. (МГУ, географический, 1974, 3(5))

$$\begin{cases} 25\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2y-2} = \dfrac{1}{5^{2x}}, \\ \sqrt{x+2}+\sqrt{2x+y+14}=\sqrt{x+y+12}. \end{cases}$$

7.63. (МГУ, географический, май 2001, 1(6))

$$\begin{cases} 9\cdot 2^x\cdot 5^y - 5\cdot 3^{x+y} = 3^x\cdot 5^y, \\ 2^{x-2}\cdot 3^{y-x+1}\cdot 5^{1-y} = 1. \end{cases}$$

7.64. (МГУ, экономический, 2003, 3(7))

$$\begin{cases} 4\cdot 49^x - 4\cdot 7^{x+y\log_7 3} + 9^y = 9, \\ 49^x + 12\cdot 3^{x\log_3 7+y} - 4\cdot 9^y = 9. \end{cases}$$

7.65. (МГУ, мех-мат, 1984, 4(5))

$$\begin{cases} 2^{3x+1}+2^{y-2}=3\cdot 2^{y+3x}, \\ \sqrt{3x^2+1+xy}=\sqrt{x+1}. \end{cases}$$

8 Показательные неравенства

8.1 Неравенства с постоянным основанием

При решении показательных неравенств надо помнить, что показательная функция a^x с основанием a, большим единицы, монотонно возрастает при возрастании аргумента, а с основанием, меньшим единицы (но положительным), монотонно убывает. Таким образом, при отбрасывании оснований, если $a > 1$, то знак неравенства для степеней сохраняется:

$$a^f \geq a^g \iff f \geq g;$$

если $0 < a < 1$, то знак неравенства меняется на противоположный:

$$a^f \geq a^g \iff f \leq g.$$

Решить неравенства:

8.1. (МГУ, биолого-почвенный (почвенное отд.), 1969, 4(4))
$3^{x+1} < \dfrac{9^{4x^2}}{\sqrt{27}}$.

8.2. $\left(\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}\right)^{x^2} \geq 1$.

8.3. $3^{2x-1} < 11^{3+x}$. **“Тест”**

8.4. (МГУ, химический, 1982, 3(5))
$f(g(x)) < g(f(x))$, где $f(x) = 2^x - 1$, $g(x) = 2x + 1$.

8.5. (МГУ, почвоведения, май 2000, 3(6))
$2^{x^2} \cdot 3^x < 6$.

8.6. (МГУ, экономический, 1997, 2(6))
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{(x^2-2x-15)^3}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \leq 1$.

Домашнее задание

8.7. (МГУ, экономический, 1983, 1(6))
$2^{x+2} \cdot 5^{x+2} \le 2^{3x} \cdot 5^{3x}$.

8.8. $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2-2x} \ge 1.$ **"Тест"**

8.9. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}.$

8.10. (МГУ, химический, 2005, 2(6))
$\sqrt{3} \cdot 4^x \le \sqrt{2} \cdot 9^x$.

8.11. (МГУ, мех-мат, май 1993, 1(6))
$5\left(\sqrt[6]{\frac{1}{5}}\right)^{35x} < 5^{|x^2+6x-1|}$.

8.12. (МГУ, геологический, май 1997, 4(8))
$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2} > (2{,}25)^{x^2-10}$.

8.13. (МГУ, физический, 1982, 4(6))
$5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2})$.

8.14. (МГУ, физический, 1998, 3(8))
$9^x - 2^{\frac{2x+1}{2}} < 2^{\frac{2x+7}{2}} - 3^{2x-1}$.

8.15. (МГУ, почвоведения, май 2000, 3(6))
$3^{x^2} \cdot 5^x > 15$. **"Тест"**

8.16. (МГУ, ИСАА, 2008, 2(8))
$\frac{128}{729} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{x}} \ge \frac{4^x}{\sqrt[4]{81^{2x-1}}}$.

8.17. (МГУ, ВМиК, 1988, 4(6))
$8^x \ge 6 \cdot 9^{|x-1|}$.

8.18. $f(f(g(x))) > g(g(f(x)))$, где $f(x) = 2^{-x}$, $g(x) = 4^{-x}$.

8.2 Замена переменных

8.19. $25^x < 6 \cdot 5^x - 5.$

8.20. (МГУ, биологический, 1978, 4(5))
$9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1}.$

8.21. (МГУ, биологический, май 2002, 2(5))
$\left(2^{|2x-1|} - 1\right)\left(\sqrt{4 \cdot 2^{-|2x-1|} - 3} - 1\right) \geq 0.$

8.22. $4^x + 2^{x+2} \geq 19 - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}.$

Домашнее задание

8.23. (МГУ, почвоведения, май 2004, 3(6))
$4^x < 2^{x+1} + 3.$

8.24. (МГУ, геологический, 1996, 4(8))
$2 \cdot 2^{-2x^2} - 7 \cdot 2^{-x^2} + 3 > 0.$

8.25. $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} > 29.$

8.26. (МГУ, географический, 1988,1(5))
$3^x - 3^{\frac{1}{2}-x} > \sqrt{3} - 1.$

8.27. $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0.$

8.28. $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9.$

8.29. (МГУ, химический, 1978, 3(5))
$\sqrt{13^x - 5} < \sqrt{2(13^x + 12)} - \sqrt{13^x + 5}.$ **“Тест”**

8.30. $\dfrac{1}{3^x + 5} \leq \dfrac{1}{3^{x+1} - 1}.$

8.31. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2005”, 2(10))
$\dfrac{3 \cdot 2^{1-x} + 1}{2^x - 1} \geq \dfrac{1}{1 - 2^{-x}}.$

8.32. (МГУ, геологический, 1977, 1(5))
$$\frac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^x-11\cdot 3^{x-1}-5}\geq 5.$$

8.33. (МГУ, мех-мат, 1995, 1(6))
Найти наибольшее целое число k, удовлетворяющее неравенству
$$4\cdot 3^{2k+1}+3^k<1.$$

8.34. (МГУ, мех-мат, май 1997, 1(6))
$$\frac{21-2^x-2^{6-x}-|3-2^x|}{5-|3-2^x|}\geq 1.$$

8.35. (МГУ, мех-мат, 2006, 2(6))
$$\frac{\sqrt{1+3^{-x}}}{\sqrt{1+3^{-x}}-\sqrt{1-3^{-x}}}-\frac{3^{-x}-1}{\sqrt{1-9^{-x}}+3^{-x}-1}\geq\frac{1+\sqrt{1-9^{-x}}}{3^{-x}}.$$

8.36. $3^{1-x}+9^x-3\cdot 3^x\geq 6-9^{-x}$.

8.3 Взаимно-обратные числа

8.37. (МГУ, химический, 1982, 3(5))
$$(\sqrt{5}+2)^{x-1}\geq(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Домашнее задание

8.38. (МГУ, химический, 1982, 3(5))
$$(\sqrt{2}+1)^{\frac{6x-6}{x+1}}\leq(\sqrt{2}-1)^{-x}.$$

8.39. (МГУ, химический, 1997, 2(6))
$$(\sqrt{2}+1)^x+1<2(\sqrt{2}-1)^x.$$

8.4 Разложение на множители

8.40. (МГУ, физический, 1993, 1(8))
$$\frac{2x-1}{2^x-1}<0.$$

8.41. (МГУ, физический, 1984, 3(6))
$$2^{x+3}-x^3\cdot 2^x\leq 16-2x^3.$$

8.42.* (МГУ, мех-мат, март 2001, 1(6))
$$26^x + 27 \geq 9(6-\sqrt{10})^x + 3(6+\sqrt{10})^x.$$

8.43.* $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x \cdot 30^x.$

Домашнее задание

8.44. (МГУ, физический, 1975, 3(5))
$$(7x^2 - 10x + 3)(2 - 4^x) < 0.$$

8.45. (МГУ, экономический, 1992, 2(6))
$$(x^2 - 8x + 15)(2^{x-3} + 2^{3-x} - 2)^{-1}\sqrt{x-1} \leq 0.$$

8.46. (МГУ, мех-мат, 1963)
$$4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x \cdot 3^{\sqrt{x}} < 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6.$$ **"Тест"**

8.47. (МГУ, мех-мат, 1973, 3(5))
$$\sqrt{2-5x-3x^2} - 2 > 2 \cdot 3^x \cdot \sqrt{2-5x-3x^2} - 4 \cdot 3^x.$$

8.48.* (МГУ, мех-мат, март 2001, 1(6))
$$27^x + 24 \geq 2(7+\sqrt{22})^x + 12(7-\sqrt{22})^x.$$ **"Тест"**

8.49.* $4^{2x+1} + 5^{x+1} - 4^x \cdot 20^x > 20.$

8.5 Однородные неравенства

8.50. $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0.$

8.51. $5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} \geq 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}.$

8.52. $4^x < 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}} + 4^{\sqrt{x}+1}.$ **"Тест"**

8.53. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2008", 6(10))
$$\sqrt{25^x - 2^{3-x}} < 7 \cdot 2^{-x/2} - 2 \cdot 5^x.$$

Домашнее задание

8.54. $2 \cdot 5^{2x} - 5 \cdot 10^x + 2 \cdot 4^x \geq 0.$

8.55. (МГУ, химический, 1975, 1(5))
$$5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4 \cdot 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}}.$$

8.56. (МГУ, мех-мат, 1996, 2(6))
$\sqrt{17 \cdot 9^x - 4^x} \geq 3^x - 3 \cdot 2^x.$

8.57. (МГУ, мех-мат, 2000, 1(6))
$2\sqrt{5 \cdot 6^x - 2 \cdot 9^x - 3 \cdot 4^x} + 3^x < 2^{x+1}.$

8.58. (МГУ, химический, май 2002, 3(6))
$|4^{3x} - 2^{4x+2} \cdot 3^{x+1} + 20 \cdot 12^x \cdot 3^x| \geq 8 \cdot 6^x(8^{x-1} + 6^x).$

8.59.* $9^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} - 4^{\frac{1}{x}} \geq 0.$

8.6 Неравенства вида $f^g > f^h$

Функция $f(x)^{g(x)}$ является сложнопоказательной функцией.[3] Область определения (допустимых значений) основания сложнопоказательной функции: $f(x) > 0$.

Решение неравенств проводится по схеме:

$$f^g > f^h \iff \begin{cases} (f-1)(g-h) > 0, \\ f > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Неравенства вида $f^g > 1$ также решаются по аналогичной схеме с $h = 0$:

$$f^g > 1 \iff \begin{cases} (f-1)g > 0, \\ f > 0. \end{cases} \tag{2}$$

В случае нестрогих неравенств первые неравенства в системах также являются нестрогими.

8.60. $x^x > 2^x.$

8.61. $(x-2)^{x^2-5} \geq (x-2)^{4x}.$

Домашнее задание

8.62. (МГУ, почвоведения, май 2002, 5(7))
$6^{\sqrt[10]{x}} \leq 10^{\sqrt[6]{x}}.$

[3] О сложнопоказательной функции см. также п. 7.4.

8.63. $|x-3|^{2x^2-7x} \geq 1$.

8.64. $(x^2-4x+3)^{x^2-6x+4} \leq 1$. **"Тест"**

8.65. $(x^2+3x-4)^{x^2-1} \geq 1$.

8.7 Системы неравенств

8.66.* (МГУ, психологический, 1984, 7(7))

$$\begin{cases} 4^{x+y-1}+3\cdot 4^{2y-1} \leq 2, \\ x+3y \geq 2-\log_4 3. \end{cases}$$

Домашнее задание

8.67. (МГУ, геологический, 1974, 2(5))

$$\begin{cases} 3^{2x+1}-3^{x+2}+6>0, \\ 3^{2x+2}-2\cdot 3^{x+2}-27<0. \end{cases}$$

8.68. (МГУ, мех-мат, март 1999, 2(6))

$$\begin{cases} 2^{x+2}=\dfrac{49}{4}x^2+4, \\ 2^{x+2}-4 \leq x^2(14-2^{x+2})\cdot 2^x. \end{cases}$$

8.69. (МГУ, социологический, 1997, 5(6))

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{32}}\cdot 8^{3x^2} > 2^{x+3}, \\ |\sqrt{2}x-1| = \sqrt{2}x-1. \end{cases}$$

8.70. (МГУ, химический, 1995, 5(5))

$$\begin{cases} 2^{-x}y^4-2y^2+2^x \leq 0, \\ 8^x-y^4+2^x-1=0. \end{cases}$$

8.71.* (МГУ, психологический, 1984, 7(7))

$$\begin{cases} 3^{x+2y-1}+2\cdot 3^{3y-1} \leq 2, \\ x+5y \geq 2-\log_3 2. \end{cases}$$

9 Логарифмические уравнения

Логарифмом числа b, $b > 0$, по основанию a, $a > 0$, $a \neq 1$, называют такое число c, что $a^c = b$, и пишут $c = \log_a b$.

Таким образом, логарифмы возникают при решении простейших показательных уравнений

$$a^x = b \iff x = \log_a b.$$

Из сказанного вытекает, что для функций $f(x)$ и $g(x)$ область определения (ОДЗ) выражения $\log_g f$ есть $\begin{cases} f > 0, \\ g > 0, \ g \neq 1. \end{cases}$

Логарифмической функцией является функция $\log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$. Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется *логарифмическим уравнением.*

Непосредственно из определения логарифма следует *основное логарифмическое тождество*

$$a^{\log_a b} = b.$$

Для преобразования логарифмов положительных чисел справедливы формулы:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc, \quad \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}, \quad \log_a b^c = c \log_a b.$$

Отметим, что для функций $\log_a f^2 = 2 \log_a |f|$.

Имеет место *формула перехода к новому основанию*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Из этой формулы перехода легко вытекают формулы

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad \log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b, \quad \log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b = \log_a b^{\frac{1}{c}}.$$

Любое число b можно представить как логарифм по основанию a следующим образом: $b = \log_a a^b$. Отметим также формулу

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a},$$

которая легко доказывается логарифмированием, то есть приписыванием к обеим частям равенства логарифма (в нашем случае по основанию c).

9.1 Уравнения с постоянным основанием

Приведем формулу для решения уравнений вида
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ с основанием $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\log_a f = \log_a g \iff \begin{cases} f = g, \\ f > 0, \end{cases} \quad \text{или} \begin{cases} f = g, \\ g > 0. \end{cases}$$

Условие $g > 0$ в первой системе можно не писать, поскольку $g = f$, а $f > 0$. Вместо условия $f > 0$ можно было написать условие $g > 0$, т. е. выписывается из условий $f > 0$ или $g > 0$ то, которое проще решить.

9.1.1 Простейшие уравнения

Решить уравнения:

9.1. (МГУ, филологический, 1983, 1(5))
$\log_5(x-1) = \log_5 \dfrac{x}{x+1}$.

9.2. $\dfrac{1}{2}\log_2 x^2 + \log_2(x+4) = 2.$ **"Тест"**

9.3. (МГУ, ФНМ, апрель 2003, 2(6))
$\log_{\frac{1}{3}}(1 + (x^2 - 3x + 2)^2) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$.

Домашнее задание

9.4. $\lg(x + 1{,}5) = -\lg x$.

9.5. (МГУ, химический, май 2000, 1(6))
$\log_2 \dfrac{x+3}{5} + \log_2 \dfrac{5}{x+1} = 1$.

9.6. (МГУ, филологический, 1998, 3(6))
$\dfrac{\log_5(-2x)}{\log_5(x+1)} = 2$.

9.7. (МГУ, физический, 1989, 3(6))
$\frac{1}{2}\log_2 x^2 + \log_2(x-6) = 4.$

9.8. (МГУ, физический, 1978, 4(6))
$\log_3(3^x - 8) = 2 - x.$

9.9. (МГУ, ИСАА, 1995, 2(6))
$\log_2(x^2 - 4x + 3) - \log_2(x-1)\log_2(x-3) = 1.$

9.1.2 Переход к одному основанию

9.10. (МГУ, 2011, 3(8))
$\log_2(1-3x) = \log_4(5x-1).$

9.11. $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11.$

9.12. (МГУ, биологический, 1989, 1(5))
$\log_{49}(2x^2 + x - 5) + \log_{\frac{1}{7}}(1+x) = 0.$

9.13. $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3.$

Домашнее задание

9.14. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 3(8))
$1 + \log_4(x+2)^2 = \log_2(2x+8).$ **"Тест"**

9.15. (МГУ, биологический, 1989, 1(5))
$\log_9(2x^2 + 9x + 5) + \log_{\frac{1}{3}}(x+3) = 0.$

9.16. (МГУ, ФНМ, апрель 2002, 2(6))
$\log_3(x-5)^2 - 4 = \log_{\sqrt{3}}(x-1).$

9.17. (МГУ, ВМиК, отделения бакалавров, 2008, 1(6))
$\log_2 \frac{1-x}{3-x} = \log_4 \sqrt[3]{(x-1)^6} - 3.$

9.18. (МГУ, мех-мат, март 1996, 1(6))
$\log_{x+5}(x^3 + 10x^2 + 20x) \cdot \log_3(x+5) = \log_3(3x^2 + 8x).$ **"Тест"**

9.1.3 Повторные логарифмы

9.19. $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0.$ **"Тест"**

9.20. (МГУ, экономический, 1970, 3(4))
$\log_2 \log_2 x = \log_4 \log_4 2x.$

Домашнее задание

9.21. $\log_5 \Big(2 + \log_3(3 + x)\Big) = 0.$

9.22. $2\log_2 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} \log_2(2\sqrt{2}\,x) = 1.$

9.2 Уравнения с переменным основанием

Простейшим уравнением с переменным основанием является уравнение вида $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$. Приведем формулу для решения уравнений такого вида:

$$\log_h f = \log_h g \iff \begin{cases} f = g, \\ f > 0, \\ h > 0, \;\; h \neq 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f = g, \\ g > 0, \\ h > 0, \;\; h \neq 1. \end{cases}$$

Условие $g > 0$ в первой системе можно не писать, поскольку $g = f$, а $f > 0$. Вместо условия $f > 0$ можно было написать условие $g > 0$, т. е. выписывается из условий $f > 0$ или $g > 0$ то, которое проще решить.

9.23. (МГУ, геологический, 1966, 2(4))
$\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 = 4.$

Домашнее задание

9.24. (МГУ, географический, 1980, 2(5))
$\log_{x-1} 3 = 2.$

9.25. (МГУ, психологический, 2003, 1(5))
$\log_{3x+3} 5 = 2.$

9.26. (МГУ, филологический, 1989, 3(5))

$$\log_{2x+2}(2x^2 - 8x + 6) = 2.$$

9.27. (МГУ, геологический, 1988, 3(6))

$$(2x^2 - 5x + 2)(\log_{2x}(18x) + 1) = 0.$$ **“Тест”**

9.3 Задачи на вычисления

9.28. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2008”, 2(10))

Какое наибольшее число раз можно последовательно взять логарифм по основанию 3 от числа 27^{81} (первый раз логарифм берется от этого числа, а затем всякий раз — от числа, полученного в предыдущий раз)?

9.29. (МГУ, хим, географ, биолог, психолог, ФББ, ФФМ, ФНМ, физико-химический, 2008, 2(7))

Найдите $\log_3 x$, если $x < 3$ и

$$\log_3(3x) \cdot \log_3(9x) \cdot \log_3(27x) = \log_3^3 x + 23.$$

9.30.* (МГУ, тест, мех-мат, 2003, 3(10))

$$7^{1-\sqrt[5]{\log_7^3 2}} \cdot 2^{2+\sqrt[5]{\log_2^2 7}}.$$

9.31.* (МГУ, тест, мех-мат, 2001, 9(10))

Вычислить $\log_{\sqrt{x}}(x^7 + x^2 - 1)^3$, где x — положительный корень уравнения $x^{16} + x^9 + x^2 = 1$.

Домашнее задание

9.32. (МГУ, тест, мех-мат, 1998, 3(9))

Пусть $a = \log_9 6$. Найти $\log_{3\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt{12}}$.

9.33. (МГУ, биологический, 1998, 1(5))

Вычислить $\log_{(d^4 \cdot \sqrt[5]{c^6})} \dfrac{c \cdot \sqrt[3]{c}}{\sqrt[5]{d}}$, если $\log_d c = \sqrt{5}$.

9.34. (МГУ, мех-мат, 2007, 1(6))

Учитель назвал Пете натуральное число и попросил найти сумму его логарифмов по основаниям 3 и 75. Однако Петя по ошибке не сложил эти логарифмы, а перемножил их, получив неверный ответ, который оказался вдвое меньше верного. Какое число назвал ему учитель?

9.35. (МГУ, мех-мат, 2006, 1(6))

Игорь и Володя решали задачу: некоторое заданное трёхзначное число прологарифмировать по основанию 2, из полученного числа вычесть некоторое заданное натуральное число, а затем разность разделить на то же самое натуральное число. Игорь перепутал и в первом действии прологарифмировал по основанию 3, а Володя посчитал правильно. Когда они сверили свои результаты, оказалось, что полученные ими числа взаимно обратны. Найти исходное трёхзначное число.

9.36. (МГУ, мех-мат, май 1996, 2(6))

Вычислить $\log^2_{\frac{x}{y}} x + \log^2_{\frac{y}{x}} y$, если $\log_{\frac{x}{y}}(x^9) = \log_{\sqrt{y}} \dfrac{y}{x}$.

9.37. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2006", 1(10))

$$\log_4 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{16}}}}_{40}\ .$$

9.38. Найти предел выражения: $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\ldots}}}}}$.

9.39. (МГУ, тест, мех-мат, 2003, 3(10))

$$5^{1+\sqrt[5]{\log_5^2 2}} : 2^{\sqrt[5]{\log_2^3 5}+2}.$$

9.4 Показательно-логарифмические уравнения вида $f^g = f^h$

Уравнения такого вида уже встречались нам при решении показательных уравнений в п. 7.3. В отличие от предыдущих уравнений здесь функции $g(x)$ или $h(x)$ будут логарифмами функций.

Напомним, что в области определения (допустимых значений) сложнопоказательной функции $f(x)^{g(x)}$ должно выполняться неравенство $f(x) > 0$.

Решение уравнений на ОДЗ f, g, h проводится по схеме:

$$f^g = f^h \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f = 1, \\ g = h, \end{array}\right. \\ f > 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Эта формула на ОДЗ f, g, h получается, если прологарифмировать обе части уравнения (по какому-нибудь основанию или по основанию уже имеющегося логарифма):

$$f^g = f^h \iff \lg f^g = \lg f^h \iff g \lg f = h \lg f$$

$$\iff g \lg f - h \lg f = 0 \iff (g - h) \lg f = 0 \iff (*).$$

9.40. (Черноморский ф-л МГУ (г. Севастополь), 2007, 6(10)) $x^{\log_3 x} = 9x.$

9.41. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162.$

9.42. $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}.$

9.43. (МГУ, мех-мат, 2003, 2(6)) $|5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x} + 614| = 636 - 5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x}.$

Домашнее задание

9.44. $x^{\lg^3 x - 5 \lg x} = 0{,}0001.$

9.45. $x^{2 \lg^2 x} = 10x^3.$

9.46. (МГУ, почвоведения, 1996, 3(6))
$$x^{2\log_4 x} = \frac{8}{x^2}.$$

9.47. (МГУ, социологический, 2008, 4(7))
$$(x^2)^{\log_3 x} = \frac{x^5}{9}.$$

9.48. (МГУ, географический, 1979, 1(5))
$$4^{\log_9 x} - 6 \cdot 2^{\log_9 x} + 2^{\log_3 27} = 0.$$

9.49. $10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20.$

9.50. $x^{2\lg 2} - 5 \cdot 2^{\lg x} + 6 = 0.$

9.51. (МГУ, психологический, 1999, 2(6))
$$x^{\log_7 4} + 5 \cdot 2^{\log_7 x} - 4 = 0.$$

9.52. (МГУ, физический, 1975, 2(5))
$$9^{\log_{\frac{1}{3}}(x+2)} = 7^{\log_{\frac{1}{7}}(2x^2+3x+2)}.$$

9.53. (МГУ, Высшая школа гос. аудита, 2008, 6(9))
$$9^{(\log_3 x)^2 - \frac{1}{2}} = x^{\log_3 x} + 18.$$

9.5 Системы уравнений

9.54. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2003, 4(8))
$$\begin{cases} 5\log_{32}(x+y) + \log_{\frac{1}{2}}(3y-8) = 0, \\ x^2 + 2x + y^2 + y = 12. \end{cases}$$

9.55. (МГУ, мех-мат, 2000, 2(6))
$$\begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_{4x} y = 2, \\ 8x - y = 1. \end{cases}$$

9.56. (МГУ, мех-мат, 2008, 3(6))
$$\begin{cases} \log_2(2x^3 + 4x^2y - 3x^2) = \log_{11}(4xy^2 + 24y^3 - 12y^2), \\ \log_{11}(x^3 + 6x^2y - 3x^2) = \log_2(8xy^2 + 16y^3 - 12y^2). \end{cases}$$

Домашнее задание

9.57. (МГУ, ВМиК, Олимпиада “Абитуриент-2006”, 1(6))

$$\begin{cases} (x+2y)^{x-y} = 25, \\ 2\cdot\log_5(x+2y) + x - y = 4. \end{cases}$$

9.58. (МГУ, геологический, 1972, 2(5))

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_3 y^2 = 0, \\ \log_2 x^2 - \log_{\frac{1}{3}} y = 5. \end{cases}$$

9.59. (МГУ, геологический, 1973, 1(5))

$$\begin{cases} \lg 3\cdot\lg(3x) = \lg 2\cdot\lg(2y), \\ \lg x\cdot\lg 2 = \lg y\cdot\lg 3. \end{cases}$$

9.60. (МГУ, геологический, 1980, 3(5))

$$\begin{cases} \log_2(x^2+y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4. \end{cases}$$

9.61. (МГУ, мех-мат, 2010, 1(6))

$$\begin{cases} 3x^y = 4^x + 8, \\ y = \dfrac{x+1}{\log_2 x}. \end{cases}$$

9.62. (МГУ, почвоведения, 1998, 4(6))

$$\begin{cases} y^x = 3y, \\ 2\log_3 y + \log_y 3 = 3x. \end{cases}$$

9.63. (МГУ, мех-мат, 1989, 4(6))

$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = \dfrac{5}{2}, \\ 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

9.64.* (МГУ, химический, 1985, 5(5))

$$\begin{cases} |x-y| - \log_2^2(|x|+y+1) + 6 = 0, \\ (x-y)^2 - 6(x-y)\log_2(|x|+y+1) + 5\log_2^2(|x|+y+1) = 0. \end{cases}$$

10 Логарифмические неравенства

10.1 Неравенства с постоянным основанием

При решении логарифмических неравенств надо помнить, что логарифмическая функция $\log_a x$ с основанием a, большим единицы, монотонно возрастает, а с основанием, меньшим единицы (но положительным), монотонно убывает. Таким образом, при отбрасывании логарифмов, если основание $a > 1$, то знак неравенства для подлогарифменных выражений сохраняется:

$$\log_a f \geq \log_a g \iff \begin{cases} f \geq g, \\ g > 0; \end{cases}$$

если $0 < a < 1$, то знак неравенства меняется на противоположный:

$$\log_a f \geq \log_a g \iff \begin{cases} f \leq g, \\ f > 0. \end{cases}$$

10.1.1 Простейшие неравенства

Решить неравенства:

10.1. $\log_5(x-2) \leq 2$.

10.2. $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) \geq 1$.

10.3. (МГУ, химический, ФНМ, 2006, 2(6))

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+3}{x-2} > 2.$$

10.4.* (МГУ, мех-мат, май 2001, 2(6))

При каких значениях x числа $\log_2(2x^2+4x)$, $\log_2(8-x^2-19x)$ и $\log_2(x^2-15x+7\frac{1}{2})$ являются длинами сторон некоторого равнобедренного треугольника?

Домашнее задание

10.5. (МГУ, ВМиК, 1990, 1(6))
$\log_{x^2+4} 8 < 1.$

10.6. (МГУ, химический, 1982, 3(5))
$\log_3 \dfrac{3x-5}{x+1} \leq 1.$

10.7. (МГУ, Якутск, 1995, 2(10))
$\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{3x-1}{x+2} \geq 1.$

10.8. (МГУ, географический, 1989, 3(5))
$\log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}(x^2-9) \geq 0.$

10.9. (МГУ, психологический, 1996, 2(5))
$2 < \log_3(x-3)^4 \leq 8.$

10.10. (МГУ, геологический, 1983, 3(6))
$\log_3(5x^2+6x+1) \leq 0.$

10.11. (МГУ, социологический, 2003, 2(6))
$\dfrac{1}{2}\log_{0,1}(6+x) \leq \log_{0,1} x.$

10.12. (МГУ, геологический, май 1999, 5(8))
$2 < |2\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) - 4| \leq 3.$

10.13. (МГУ, социологический, 2005, 5(6))
$\log_{0,5}(\sqrt{5-x} - x + 1) > -3.$

10.1.2 Повторные логарифмы

10.14. $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 x \geq 1.$ **“Тест”**

10.15. $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x \geq 0.$

10.16. (МГУ, мех-мат, 1965)
$\log_x \log_2(4^x - 6) \leq 1.$

Домашнее задание

10.17. (МГУ, Московская школа экономики, 2006, 2(7))
$\log_{0,5}(\log_3(x-2)) \geq -1.$

10.18. $\log_2(1+\log_{\frac{1}{9}} x - \log_9 x) \leq 1.$

10.19. $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 |x-3| \geq 0.$ **“Тест”**

10.20. (МГУ, ИСАА, 2007, 3(7))
$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_4 \frac{x^2-2x}{x+10}\right) \geq 0.$$

10.21. (МГУ, психологический, 2001, 2(5))
$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+4}{4x-8} \leq 0.$$

10.22. (МГУ, геологический, 1978, 3(5))
$\log_3 \log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3) \leq 0.$

10.23. (МГУ, почвоведения, 2002, 4(7))
$\log_3 \log_4 x \leq \log_9 \log_2 8x.$

10.24. (МГУ, физический, 2001, 5(6))
$$\log_2\left(\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) < \log_{\frac{1}{8}}\left(\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)\right).$$

10.1.3 Замена переменных

10.25. (МГУ, биологический, 1985, 3(5))
$$\frac{1}{\log_5(3-2x)} - \frac{1}{4-\log_5(3-2x)} \leq 0.$$

10.26. $$\frac{4}{\left(\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x} - 1\right)^2} \geq 1.$$ **“Тест”**

10.27. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов, 2007, 5(8))
$\log_x^3 16 + 2\log_x^2 16^2 + 4\log_x 16^4 \geq 0.$

Домашнее задание

10.28. (МГУ, почвоведения, 1978, 2(5))

$$\log_2^2 x + \log_2 x - 2 \le 0.$$

10.29. (МГУ, филологический, 2000, 3(6))

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{2 - \log_2 x} \le 2.$$

“Тест”

10.30. (МГУ, биологический, 1985, 3(5))

$$\log^2_{\frac{1}{2}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+1) + 6.$$

10.31. (МГУ, биологический, 1987, 3(5))

$$\frac{3\log_{0,5} x}{2 - \log_{0,5} x} \ge 2\log_{0,5} x + 1$$

10.32. (МГУ, мех-мат, 1995, 2(6))

$$\frac{2}{\frac{2}{\log_2 x} - 1} > -3.$$

10.33. (МГУ, химический, 2004, 3(6))

$$\sqrt{\log_5 x + 3} - \sqrt{\log_5 x - 2} < \sqrt{\log_5 x - 1}.$$

10.34. (МГУ, ВМиК, 1994, 3(6))

Найти все отрицательные значения u, при которых выполнено неравенство $\dfrac{1}{\log_{3\cos u} 3} + \dfrac{1}{\log_3\left(\frac{\cos u}{3}\right)} \ge 0.$

10.35. (МГУ, факультет Гос. управления, 2007, 4(7))

$$\sqrt{(\log_4 x)^2 - 2} \ge \log_2 \frac{x}{4} - 1.$$

10.36. (МГУ, ВМиК, 2010, 2(6))

$$\frac{1 + \log_{x-2}(-x^2 + 7x - 10)}{2 - \log_{5-x}(x^2 - 4x + 4)} \le 2.$$

10.1.4 Переход к одному основанию

10.37. (МГУ, экономический (отд. менеджмента), 1996, 1(6))
$\log_4(3-3x)^2 \geq \log_2(x^2-1)$.

10.38. (МГУ, филологический, 2005, 2(7))
$\log_2(x+1) > \log_{x+1} 16$.

10.39. (МГУ, ВМиК, 2008, 1(6))
$\log_5 \dfrac{5-x}{2-x} \geq \log_{25} \sqrt{(x-5)^4} - 1$.

10.40. (МГУ, экономический, отд. менеджмента, 2005, 4(6))
$\log_{1+\sqrt{2}}(x+4) + 2\log_{3+2\sqrt{2}}(7-2x) + \log_{\sqrt{2}-1}(x^2-x-6) \leq 0$.

Домашнее задание

10.41. $\log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{4}} x$. **"Тест"**

10.42. (МГУ, геологический, 1971, 5(5))
$\log_{\frac{1}{4}}(2x+3) > \log_9 27$.

10.43. (МГУ, физический, 1972, 2(5))
$\log^2_{10} x + \log_{100} x^2 < 2$.

10.44. (МГУ, физический, 1991, 3(6))
$\log_{49}(x+3) - \log_7(x+2) < 0$.

10.45. (МГУ, геологический, 1996, 4(8))
$\dfrac{1}{\log_2(-x)} < \dfrac{1}{\log_4(-2x)}$.

10.46. (МГУ, биолого-почвенный, 1970, 2(5))
$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6) + \log_9 x^2 \geq 0$.

10.47. (МГУ, филологический, 2001, 2(5))
$\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)} > \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{4}} x} + \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}} x}$.

10.48. (МГУ, почвоведения, 2000, 4(7))
$\log_x 2 < \log_{6-x} 2$.

10.49. (МГУ, биологический, 2001, 3(5))
$$\frac{\log_2 x - 3}{6\log_x 2 - 1} \le 2.$$ **"Тест"**

10.50. (МГУ, мех-мат, 1993, 1(6))
$$\frac{\sqrt[4]{15}}{\log_{x+1} 11} \ge \frac{\log_{11}(x+1)}{\log_{123} 11}.$$

10.51. (МГУ, мех-мат, 2002, 1(6))
$$\log_{\frac{2}{3}} \frac{x}{x+1} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{3x} \ge 2.$$

10.52. (МГУ, ВМиК, 2007, 2(6))
$$\log_{x+2}(2-x) \ge \frac{|\log_5(2x+3) - 1|}{\log_5(x+2)}.$$

10.53. (МГУ, ИСАА, 2005, 5(7))
$$\log_{(4|x|+1)}(6x+2) - \log_{(6x+2)}(4|x|+1) < 0.$$

10.54. (МГУ, экономический, отд. экономики, 2005, 4(7))
$$\log_{2+\sqrt{5}}(4-x) - \log_{9-4\sqrt{5}}(4x^2+28x+49) + \log_{\sqrt{5}-2}(x^2+x-6) \le 0.$$

10.1.5 Разные задачи

При решении логарифмических неравенств можно использовать обобщенный метод интервалов или монотонность логарифма, из которой вытекает, что при $a > 1$ знак разности $\log_a f - \log_a g$ совпадает со знаком $f - g$ на ОДЗ, а знак $\log_a f$ совпадает со знаком $f - 1$; при $0 < a < 1$ знаки будут противоположными.

10.55. (МГУ, физический, 1994, 1(8))
$$\frac{2x-1}{\log_2 x} < 0.$$

10.56. (МГУ, географический, 1974, 5(5))
$$\frac{\log_3(x + \frac{4}{5})}{\log_7(x^2 - 2x + \frac{7}{16})} < 0.$$

10.57. (МГУ, экономический (менеджмент), 2008, 3(6))
Решить неравенство $x \cdot \log_2(4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 6) > 2x$.

10.58. (МГУ, экономический, 2007, 3(7))

$$\left(x^2 - \log_2\left(\frac{3^x}{5}\right) - \log_3(5^x)\right) \cdot \log_5(125 \cdot 25^{x-3}) < 0.$$

10.59. (МГУ, мех-мат, май 1998, 2(6))

$$\frac{1 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+4} + \log_{\frac{1}{2}}(13 - x)}{|x^2 + 2x - 3| - |2x^2 - 10x + 8|} \geq 0.$$

10.60. (МГУ, мех-мат, 2005, 2(6))
Найти $\log_2 \frac{2x}{2^x}$ при условии

$$|\log_{\sqrt{2}} x^{\frac{x}{2}} - 2\log_2 x| + ||2-x| - |\log_2 x|| \leq (x-2)\log_8 x^3.$$

10.61. (МГУ, химический, 2003, 3(6))

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(2 - |x-1|) > \log_{\sqrt{10}}(2x - x^2).$$

10.62.* (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2006, 4(10))

$$5^{\log_x 2} \cdot \log_2 x + 5^{\log_2 x} \cdot \log_x 2 \leq 10.$$

Домашнее задание

10.63. (МГУ, географический, 1998, 1(6))

$$\frac{\sqrt{-4x^2 + 13x - 3} + 1}{\log_{3x} 7} \geq 0.$$

10.64. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2006, 1(8))

$$(|x-1| + |2x-1|) \cdot \lg\left(\frac{\pi}{\sqrt{10}}\right)^{2x} \geq 0.$$

10.65. (МГУ, почвоведения, 1980, 4(4))

$$(4x^2 - 16x + 7)\log_2(x-3) > 0.$$

10.66. (МГУ, экономический, отд. менеджмента, 2007, 4(6))

$$(3x-4) \cdot \left(x^2 - \left(\log_3 4 + \frac{5}{4}\right)x + \frac{5\log_3 4}{4}\right) > 0.$$

10.67. (МГУ, мех-мат, 2001, 1(6))

$$x \geq \log_2(101 \cdot 10^x - 10^{2+2x}) - \log_5(101 \cdot 2^x - 5^{2+x} \cdot 2^{2+2x}).$$

10.68. (МГУ, мех-мат, март 2002, 1(6))

$$\log_{\sqrt{2}}(6 - x - x^2) + \log_2(x^2 - 2x + 1) + 2 > 2\log_4(x^2 - 4x + 3)^2.$$

10.69. (МГУ, мех-мат, май 2000, 1(6))

$$\log_{4x^2} x^2 \cdot \log_{8x^4} x^4 \leq 1.$$

10.70. (МГУ, мех-мат, март 2001, 2(6))

$$\frac{\log_{21+4x-x^2}(7-x)}{\log_{x+3}(21+4x-x^2)} < \frac{1}{4}.$$

10.71. (МГУ, биолого-почвенный, 1971, 5(5))

$$2\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 2) \geq 1.$$

10.72. (МГУ, экономический, 2008, 3(7))

$$x \cdot \log_2(4^{x+1} - 2^{x+1} + 8) < x^2 + 4x.$$

10.73. (МГУ, экономический, 1996, 2(6))

$$\frac{\log_7(19 - 16x|x|) - \log_{49}(1-4x)^2}{3 - 4x - |4x - 3|} \leq 0.$$

10.74. (МГУ, геологический, 2005, 6(8))

$$\log_x\left(x + \frac{1}{3}\right) \leq \log_{\sqrt{2x+3}}\left(x + \frac{1}{3}\right).$$

10.75. (МГУ, мех-мат, май 1994, 4(6))

Найти все значения x, при которых наибольшее из чисел $3x - 4$ и $\log_2(5 \cdot 2^{2x-4} - 2^{x-1} + 1)$ положительно. **“Тест”**

10.76. (МГУ, биологический, 2000, 4(5))

$$\log_4(16(x-2)^2) \cdot \log^2_{\frac{1}{16}} \frac{(x-2)^4}{64} - \frac{5}{4}\log_{64}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)^2 < \frac{15}{2}.$$

10.77.* (МГУ, биологический, 2002, 4(5))

$$\log_2^2|2x| - 5\log_2|2x| + 2|x|\log_2|2x| - 4|x| + 6 \geq 0.$$

10.2 Неравенства с переменным основанием

Поскольку логарифмическая функция $\log_a x$ с основанием a, большим единицы, монотонно возрастает, а с основанием, меньшим единицы, монотонно убывает, то логарифмические неравенства с переменным основанием решаются путем рассмотрения двух случаев: 1) основание больше единицы; 2) основание от нуля до единицы. С учетом области допустимых значений имеем эквивалентную неравенству совокупность двух случаев:

$$\log_h f \geq \log_h g \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} h > 1, \\ f \geq g > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h < 1, \\ 0 < f \leq g. \end{cases} \end{array}\right. \tag{1}$$

Такая схема решения наиболее часто используется в школе.

Решение системы (1) можно записать по-другому, если заметить, что на ОДЗ функция h больше или меньше единицы одновременно, когда и функция f больше или равняется или меньше или равняется функции g. Поэтому неравенство с переменным основанием можно решать и по формуле

$$\log_h f \geq \log_h g \iff \begin{cases} \dfrac{f-g}{h-1} \geq 0, \\ f > 0, \\ g > 0, \\ h > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Первое неравенство в (2) решается методом интервалов.

Ниже приводятся логарифмические неравенства, которые решаются по одной из указанных схем. Читатели могут самостоятельно выбрать наиболее удобную для себя схему решения. Однако отметим, что как правило решение по схеме (2) короче.

10.78. (МГУ, почвоведения, 2001, 3(6))
$\log_{x-2} x \leq \log_{x-2} 4.$

10.79. (МГУ, геологический, май 2003, 2(6))

$$\log_{-2-x}(-3-2x) \geq \log_{-2-x}\left(-\frac{3x}{2}\right).$$

10.80. $\log_{2x}(x^2-5x+6) \geq 1.$

10.81. (МГУ, почвоведения, 1989, 3(5))

$$\log_{x+2}(2x^2+x) \leq 2.$$ **"Тест"**

10.82. (МГУ, социологический, филологический, 2007, 7(8))

$$\log_{(x+3)^2}(2x^2+9x+21) \geq \log_{(x+3)^2}(x^2-x).$$

10.83. (МГУ, психологический, 2006, 2(6))

$$\sqrt{\log_{(x-1)}(x-2)} < \sqrt{2}.$$

10.84. (МГУ, социологический, 2002, 2(6))

$$\log_{\frac{1}{5}\sqrt{x^3+x^2+x-14}}(\log_{\frac{1}{4}}(-x^2+5x-6)) < 0.$$

10.85. (МГУ, экономический (отд. экономики), 2006, 2(7))

$$\log_{13-2x}(x^2-x+1)\cdot\log_{7-x}(13-2x) < \log_{2x-1}(2-2x-(x-1)^2+x^2).$$

10.86. (МГУ, геологический, 2004, 5(8))

$$\log_{3-x}(x^2-10x+25) - 2\log_{3-x}(4x-x^2+5) + 2 \leq 0.$$

10.87.* (МГУ, ФНМ, 2001, 5(6))

$$\frac{1}{3}\log_{x+1}(x^3+2{,}5x^2+2{,}2x+0{,}685) \leq 1.$$

Домашнее задание

10.88. (МГУ, ВМиК, 2003, 1(6))

$$\log_{\left(\frac{3-x}{2}\right)}\left(\frac{6}{x+1}\right) \geq -1.$$

10.89. $\log_{2x}(x^2-5x+6) \leq 1.$

10.90. (МГУ, химический, 1966, 4(4))

$$\log_x\left(x^2-\frac{3}{16}\right) \geq 4.$$ **"Тест"**

10.91. (МГУ, почвоведения, 1989, 3(5))
$$\log_{x+1}(2x^2 - 3x + 1) \le 2.$$

10.92. (МГУ, географический, 1989, 3(5))
$$\log_{4-x}(x^2 - 10) < 2.$$

10.93. (МГУ, географический, 1989, 3(5))
$$\log_{10-x^2}\left(\frac{16}{5}x - x^2\right) < 1.$$

10.94. (МГУ, географический, 2005, 3(6))
$$\log_{\sqrt{1-x}}(1 + 5x) \ge -2.$$

10.95. (МГУ, химический, 1979, 4(5))
$$\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 \ge 4.$$

10.96. (МГУ, психологический, 2004, 2(5))
$$\log_{\frac{x+1}{2x-6}}\left(\frac{x+6}{4}\right) \le 1.$$

10.97. (МГУ, геологический, МШЭ, 2008, 3(8))
$$\log_{x-3}(5 - x) \le \log_{x-3}|4x - 14|.$$ **“Тест”**

10.98. (МГУ, геологический, 2004, 5(8))
$$\log_{5-x}(x^2 - 14x + 49) - 2\log_{5-x}(8x - x^2 - 7) + 2 \le 0.$$

10.3 Показательно-логарифмические неравенства

10.99. (МГУ, физический, 1966, 1(5))
$$x^{\lg^2 x - 3\lg x + 1} \le 1000.$$

10.100. $x^{2\log_3 5} - 4 \cdot 5^{\log_3 x} - 5 \le 0.$

10.101. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2010”, 1(10))
$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{(\log_2 3)^{4-x^2}} \le (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-(\log_3 2)^{2x-1}}.$$

10.102. (МГУ, мех-мат, март 2004, 2(6))
$3^{\log_x(3x^2+2x-1)} \le (x^2+x)^{\log_x 9}.$

10.103. (МГУ, геологический, 2007, 5(8))
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_x\left(\log_2 \frac{x^2-2x}{2x-1}\right)} \le 1.$

Домашнее задание

10.104. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} \ge 1.$

10.105. $x^{\log_2^2 x - 3\log_2 x + 1} > \dfrac{1}{x}.$

10.106. (МГУ, физический, 1995, 5(8))
$4^{\log_2 x} + x^2 < 8.$

10.107. (МГУ, физический, 1981, 4(6))
$5^{\log_3 \frac{2}{x+2}} < 1.$

10.108. (МГУ, химический, май 2001, 5(7))
$2^{\lg(x^2-1)} \ge (x+1)^{\lg 2}.$

10.109. (МГУ, почвоведения, 2006, 3(7))
$(3\sqrt{x})^{\log_2 x} \ge 1.$

10.110. (МГУ, ВМиК, 1991, 3(6))
$49^{\log_x 5} - 7^{\log_x 5} - 2 \ge 0.$

10.111. $2^{\log_{0,5}^2 x} + x^{\log_{0,5} x} \ge 2{,}5.$

10.112. (МГУ, геологический, 1997, 5(8))
$11^{\log_{\frac{1}{11}} \log_7 x} < 7^{\log_{\frac{1}{7}} \log_{11} x}.$

10.113. (МГУ, биологический, 1981, 4(5))
$(2^x + 3\cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1.$

10.114. (МГУ, мех-мат, март 2004, 2(6))
$5^{\log_{(x+1)}(3x^2+8x+4)} \ge (x^2+3x+2)^{\log_{(x+1)} 25}.$ **“Тест”**

10.4 Трансцендентные неравенства

10.115. (МГУ, почвоведения, 1990, 6(6))

$$\log_2(2-3x) > 4x+1.$$

10.116. $\log_{\frac{1}{3}}(3x-2) \geq x-1.$ **"Тест"**

10.117. (МГУ, психологический, 1972, 3(4))
Найти все целые решения неравенства $x-1 < \log_6(x+3)$.

10.118.* (МГУ, филологический, 1987, 5(5))

$$\frac{9}{3x+2} > \frac{1+\log_3(x+6)}{x}.$$

Домашнее задание

10.119. (МГУ, почвоведения, 1990, 6(6))

$$\log_2(x+2) > 1-x.$$

10.120. $\log_3(2-x) \leq x-1.$ **"Тест"**

10.121. (МГУ, психологический, 1973, 4(4))
Найти все целые числа x, удовлетворяющие неравенству

$$3^{\frac{5}{2}\log_3(12-3x)} - 3^{\log_2 x} > 83.$$

10.5 Системы неравенств

10.122. (ЕГЭ, 2012, С3 – *демоверсия*)

$$\begin{cases} 4^x \leq 9\cdot 2^x + 22, \\ \log_3(x^2-x-2) \leq 1 + \log_3\dfrac{x+1}{x-2}. \end{cases}$$

10.123.* (МГУ, психологический, 1987, 6(6))
Доказать, что все решения неравенства $\log_2(x-1)+\log_3(x^2-1) > 2$ удовлетворяют неравенству

$$\big(\log_3(x^2-1)\big)\cdot\big(\log_3 9(x^2-1)\big) > 2\log_2(x-1) - \log_2^2(x-1).$$

Ответы, указания, решения

5.1. $0; 4.$ **5.2.** $2.$ **5.3.** $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}.$ **5.4.** $-\sqrt{5}.$ **5.5.** $-1; 2.$
5.6. $-\dfrac{23}{4}; -1; 1; 6.$ **5.8.** $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}.$ **5.9.** $2.$ **5.10.** $3.$ **5.11.** $\emptyset.$ **5.12.** $4.$
5.13. $-1.$ **5.14.** $-\frac{5}{8}.$ **5.15.** $0.$ **5.16.** $0.$ **5.17.** $\dfrac{7+\sqrt{41}}{2}.$ **5.18.** $-3; 2.$
5.20. $-\sqrt{3}.$ **5.22.** $-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}.$ **5.23.** $0.$ **5.24.** $7.$ **5.26.** $2.$
5.27. $10.$ **5.28.** $5.$ **5.29.** $3 \pm \dfrac{5\sqrt{3}}{2}.$ **5.31.** $1.$ **5.32.** $\emptyset.$ **5.33.** $\emptyset.$ **5.34.** $\emptyset.$
5.35. $\emptyset.$ **5.36.** $0.$ **5.37.** $\emptyset.$ **5.38.** $[-1; 3].$ **5.39.** $\dfrac{7}{3}.$ **5.40.** $1 \pm 2\sqrt{3}.$
5.42. $3.$ **5.43.** $4.$ **5.44.** $-\dfrac{1}{11}.$ **5.45.** $0.$ **5.46.** $2.$ **5.47.** $-\sqrt{2+\sqrt{5}}.$
5.48. $\dfrac{22}{9}; 6.$ **5.49.** $8.$ **5.50.** $\dfrac{73}{32}.$ **5.51.** $-\dfrac{47}{24}.$ **5.52.** $-1,\ 0.$ **5.53.** $-8,\ 27.$

5.54. *Решение.* В уравнении

$$\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$$

обозначим[4] $\sqrt{3x^2+5x+1}=t\geq 0$. Тогда $3x^2+5x+1=t^2 \Leftrightarrow 3x^2+5x+8=t^2+7 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+5x+8}=\sqrt{t^2+7}$. Получим уравнение относительно t, которое решим при $t\geq 0$, а потом вернемся к x:

$$\sqrt{t^2+7}-t=1 \iff \sqrt{t^2+7}=t+1 \overset{t\geq 0}{\iff} t^2+7=t^2+2t+1$$

$$\iff t=3 \iff \sqrt{3x^2+5x+1}=3 \iff 3x^2+5x+1=9$$

$$\iff 3x^2+5x-8=0 \iff x=-\frac{8}{3};\ 1.$$

Ответ. $-\dfrac{8}{3}; 1.$

5.55. $\dfrac{1}{2}.$ **5.56.** $0; 3.$ **5.57.** $2; 3; 5; 6.$ **5.59.** $1.$ **5.61.** $1+\left(1\pm\sqrt{\sqrt{10}-3}\right)^4.$
5.62. $\dfrac{5}{4}; \dfrac{5}{3}.$ **5.63.** $-\dfrac{27}{8}; 1.$ **5.64.** $-25.$ **5.65.** $-\dfrac{2}{3}; 1; 2; \dfrac{11}{3}.$

[4] В этой задаче можно делать различные замены, но наиболее простое, на наш взгляд, решение задачи бывает, если за новую переменную брать целиком весь корень.

5.66. -2; 6. **5.67.** -4; 1. **5.68.** $-\dfrac{1}{2}$; 1. **5.69.** $-\dfrac{1}{3}$. **5.70.** 1.
5.71. 0, 2, 13, 15. **5.73.** $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **5.74.** 3; 5. **5.75.** $\dfrac{18}{7}$. **5.76.** 2.
5.77. $\dfrac{9-\sqrt{181}}{6}$; 4. **5.79.** 3;18. **5.80.** -73;-8. **5.81.** $\dfrac{-5-\sqrt{73}}{14}$; $\dfrac{3}{5}$; $\dfrac{4}{5}$.
5.82. -1; 7. **5.83.** $[0;\,3]$. **5.85.** $\dfrac{9}{4}$. **5.86.** $[5;\,10]$. **5.87.** $\left[\dfrac{3}{2};\,3\right]$.

5.88. *Решение* I. Возведя обе части уравнения в куб, получим

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1 \iff$$

$$3x-2+3\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1})=1.$$

По условию выражение $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}$ равно единице. Подставляя в полученное уравнение вместо этого выражения единицу, получим уравнение

$$3x-2+3\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}=1 \iff \sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}=1-x, \quad (*)$$

являющееся следствием исходного уравнения, поскольку уравнение $(*)$ может иметь корень, который не обязательно удовлетворяет исходному уравнению.
Возведем уравнение $(*)$ в куб:

$$(2x-1)(x-1)=(1-x)^3 \iff (2x-1)(x-1)=-(x-1)^3 \iff$$

$$(2x-1)(x-1)+(x-1)^3=0 \iff (x-1)(2x-1+(x-1)^2)=0$$

$$\iff (x-1)(2x-1+x^2-2x+1)=0 \iff (x-1)x^2=0 \iff x=0;\ 1.$$

Проверка показывает, что $x=0$ — посторонний корень уравнения, а $x=1$ удовлетворяет ему.

Ответ. 1.

Решение II. Обозначим $\sqrt[3]{x-1}=t$. Тогда $x-1=t^3 \Leftrightarrow x=t^3+1$. Относительно t получим уравнение, которое решается возведением в куб обеих частей уравнения

$$\sqrt[3]{2t^3+1}+t=1 \iff \sqrt[3]{2t^3+1}=1-t \iff 2t^3+1=1-3t+3t^2-t^3$$

$$\iff 3t^3-3t^2+3t=0 \iff 3t(t^2-t+1)=0 \iff t=0$$

(квадратное уравнение $t^2 - t + 1 = 0$ не имеет корней, так как дискриминант $D = 1 - 4 = -3 < 0$)

$$\iff \sqrt[3]{x-1} = 0 \iff x = 1.$$

5.89. $8; 8 \pm 12\sqrt{\dfrac{3}{7}}$. **5.90.** $-61; 30$. **5.92.** $5; 6; 7$. **5.93.** -5; 2. **5.94.** 3. **5.95.** 6. **5.96.** $-\dfrac{1}{5}$. **5.97.** $\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$. **5.98.** 1. **5.99.** 7. **5.100.** $\dfrac{1}{2}; \dfrac{2-\sqrt{690}}{49}$. **5.101.** $\emptyset$. **5.102.** 1. **5.103.** $4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$. **5.104.** 8. **5.105.** 1. **5.106.** 0. **5.107.** $(11,\ 5)$. **5.108.** -2. **5.109.** 7. **5.110.** $-\dfrac{1}{3}$. **5.112.** $1; \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **5.113.** $\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$, $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$. **5.114.** -1. **5.115.** $(x, y) = \left(\dfrac{3d+8}{6}, \dfrac{3d}{2}\right)$, $d \in \mathbb{R}$. **5.116.** 5. **5.117.** -10. **5.118.** 1. **5.119.** 3. **5.120.** 70. **5.121.** -1. **5.122.** $13 + 5\sqrt[3]{2} + 11\sqrt[3]{4}$. **5.123.** 2. **5.124.** 0 при $x > 0$. **5.125.** $\dfrac{a(b-a)}{a+b}$; 3,75. **5.126.** $\sqrt{bc} + 1$ при $a, b, c \geq 0$, $a + c \neq 0$. **5.127.** -20. **5.128.** 2. **5.129.** 2. **5.130.** -2. **5.131.** 0. **5.133.** $\dfrac{\sqrt{2n+1} - 1}{2}$.
5.134. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3}\sqrt{2} + 2} \cdot \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{2}$. **5.135.** $(9, 1)$. **5.136.** $\left(\dfrac{5}{16}, -\dfrac{3}{16}\right)$; $\left(\dfrac{5}{16}, \dfrac{13}{16}\right)$. **5.137.** $(1, 1)$. **5.138.** $(74 - 14\sqrt{22}, -27 + 4\sqrt{22})$. **5.139.** $(-9, -5)$. **5.140.** $(2, 1)$. **5.141.** $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$. **5.142.** $(-2,\ -2)$. **5.143.** $(1; 1)$; $\left(\dfrac{5}{2}, -2\right)$. **5.144.** $(26,\ -6)$; $(-9,\ 29)$. **5.145.** $(-49 + 12\sqrt{12},\ -6 + \sqrt{12})$.
6.1. $\left[-\dfrac{1}{2}; 4\right)$.

6.2. *Решение.* Решаем неравенство по схеме п. 6.1

$$\sqrt{x-1} < 3-x \iff \begin{cases} x-1 < (3-x)^2, \\ 3-x > 0, \\ x-1 \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x-1 < x^2 - 6x + 9, \\ x < 3, \\ x \geq 1, \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+10>0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<2, \\ 5<x, \end{array}\right. \\ 1 \le x < 3, \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow 1 \le x < 2.$$

Ответ. $[1;\ 2)$.

6.4. $\left[\dfrac{2}{3};\ \dfrac{4}{5}\right)$. **6.5.** $[2;\ +\infty)$. **6.6.** $(2;\ +\infty)$. **6.7.** $[4;\ +\infty)$.

6.8. $(-\infty;\ -2]\bigcup\left[5;\dfrac{74}{13}\right)$. **6.9.** $\{1\}\cup[2;\ +\infty)$.

6.11. При $x=-7$ $y=5$. **6.12.** $\left[0;\ \dfrac{1}{11}\right)\bigcup(4;\ +\infty)$.

6.13. $\left(1;\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$. **6.14.** $\left[-3;-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)\bigcup\left(-\dfrac{3}{\sqrt{2}};0\right)\bigcup(0;3]$.

6.15. $\left[-5+\sqrt{23};\ -\dfrac{1}{8}\right]\bigcup\left[\dfrac{3}{8};\ 3-\sqrt{5}\right]\bigcup[3+\sqrt{5};\ +\infty)$.

6.16. -1; 3. **6.17.** $[4;\ 4{,}5)\cup(4{,}5;\ 5)$.

6.18. *Решение.* Решим неравенство по схеме (3) п. 6.2

$$\sqrt{x^2+x-2}>x \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2+x-2>x^2, \\ x<0, \end{array}\right. \\ x^2+x-2\ge 0, \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x<0, \end{array}\right. \\ (x+2)(x-1)\ge 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x\in(-\infty;\ 0)\cup(2;\ +\infty), \\ x\in(-\infty;\ -2]\cup[1;\ +\infty). \end{cases}$$

Ответ. $(-\infty;\ -2]\cup(2;\ +\infty)$.

6.20. $\left(\dfrac{3}{4};\ 7\right]$. **6.22.** $[0;\ 4]$. **6.23.** $[-2;\ -1]$. **6.24.** $[-1;7]$.

6.25. $[-46;\ 3)$. **6.27.** $(-\infty;\ -2]$. **6.28.** $[-3;\ 1)$. **6.29.** $(3;\ 5]$.

6.31. $\left[-3;\ \dfrac{-5+\sqrt{41}}{4}\right]$. **6.32.** $\left(-\infty;\ \dfrac{2-3\sqrt{2}}{2}\right]\bigcup(4;\ +\infty)$.

6.33. $(-\infty;\ -5]\bigcup\left[1;\ \dfrac{8+\sqrt{22}}{3}\right)$. **6.34.** $[1;\ 3)$.

6.35. $(-\infty;\ -2]\cup(0;\ +\infty)$. **6.36.** $\left(\dfrac{4}{7};\ \dfrac{37+\sqrt{69}}{50}\right)$.

6.37. $\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{8}\right)$.**6.38.** $(2;2\sqrt{2}]$.**6.39.** $\left(\dfrac{\sqrt{13}-5}{2};1\right]$.**6.41.** $[2;3]$.

6.42. $(-\infty;\ -1998]\cup[1996;\ \infty)$. **6.43.** $\{0\}\bigcup\left[2;\ \dfrac{12}{5}\right]$.

6.45. $\left[3;\ \dfrac{11+\sqrt{61}}{2}\right]$. **6.46.** $\left[0;\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$. **6.47.** $\left(\dfrac{4-\sqrt{3}}{2};\ 3\right]$.

6.49. -3. **6.50.** $(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$. **6.51.** $[5;10]$. **6.52.** $\left[\dfrac{14+\sqrt{7}}{2};9\right]$.

6.54. $\left[\dfrac{19}{3};\ 9\right)$. **6.55.** $\left[\sqrt{\dfrac{28}{3}};\ +\infty\right)$. **6.56.** $\left[\dfrac{-1-2\sqrt{29}}{5};\ 2\right]$.

6.57. $(-\infty;\ -2]\bigcup\left[-1;\ \dfrac{\sqrt{13}-1}{6}\right)$. **6.58.** $\left[4;\ \dfrac{13}{2}\right)$.

6.59. $(-\infty;\ 1)\bigcup\left\{\dfrac{13}{3}\right\}\bigcup[10;\ +\infty)$.

6.60. $\left(-\infty;\dfrac{2-3\sqrt{2}}{2}\right]\bigcup(4;+\infty)$. **6.61.** $\left[\dfrac{1}{2};\ \dfrac{2}{3}\right)\bigcup(1;\ +\infty)$.

6.62. $\left(-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{2}\right]$.**6.63.** $(-\infty;\ 0)\cup[1;\ 2]$.**6.64.** $[-3;\ 0)\cup(0;\ \sqrt{10}]$.

6.65. $\left[-7;-\dfrac{3}{4}\right)\bigcup\left[\dfrac{1}{2};2\right)$.**6.67.** $[-3;6]\cup(8;+\infty)$.**6.68.** $[-3;6]$.

6.69. $[-1;7]$.**6.71.** $[-5;-1)\cup(1;+\infty)$.**6.72.** $(-\sqrt{13};1]\cup[2;\sqrt{13})$.

6.73. $[-6;0)\cup(3;4]$.**6.74.** $(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};2)\bigcup\left[\dfrac{8+\sqrt{10}}{3};+\infty\right)$.

6.75. $\left[-\dfrac{1}{2\sqrt{2}};0\right)\bigcup\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$.**6.76.** $(-\infty;-7)\cup(-5;-3]\cup[2;+\infty)$.

6.78. $\left[-\dfrac{3}{2};\ -1\right)\bigcup(1;\ 2]$.**6.79.** $\left(0;\ \dfrac{45}{8}\right)$.**6.80.** $[-2;\ -1)\cup[0;\ 1]$.

6.84. $\{0\}\cup(16;\ +\infty)$. **6.85.** $(-2;\ -1]\bigcup\left[-\dfrac{2}{3};\ \dfrac{1}{3}\right)$.

6.86. $(-\infty;\ 1)\cup[2;\ +\infty)$. **6.87.** $[-5;\ 20)$.

6.88. $\left[\dfrac{27-4\sqrt{66}}{9},\dfrac{8-\sqrt{85}}{3}\right]\bigcup\left[\dfrac{17+\sqrt{349}}{6},\dfrac{27+4\sqrt{66}}{9}\right]$.

6.89. $[0;\ 81)$. **6.90.** $(-\infty;\ -8)\cup(8;\ +\infty)$. **6.91.** $(-\infty;\ 2\sqrt{5}-4)$.

6.92. $(4;+\infty)$. **6.93.** $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **6.94.** $(-\infty;-1)\bigcup\left[\dfrac{5}{3};+\infty\right)$.

6.96. $(-\infty;\ -2)\cup(0;\ +\infty)$. **6.97.** $(1;\ 2)\cup(10;\ +\infty)$. **6.98.** $[1;\ 2]$.

6.100. $\left\{-\frac{4}{3}\right\}\bigcup[-1;0]$. **6.101.** $[3;6)\bigcup\left(6;\frac{133}{2}-11\sqrt{6}\right)$.
6.102. $(1;\,+\infty)$. **6.103.** $\left[-7;\,-6+\sqrt{4\sqrt{5}-8}\right)$.
6.104. $\left[3;\,\frac{1+\sqrt{37}}{2}\right)\bigcup\left(\frac{1+\sqrt{37}}{2};\,+\infty\right)$. **6.105.** 3. **6.106.** $\frac{2}{3}$.
6.107. $(-\infty;-\sqrt{7})\cup(\sqrt{7};9]$. **6.109.** 2. **6.110.** $(1;+\infty)$. **6.111.** $[0;5]$.
6.112. $(\frac{17}{3};\,+\infty)$. **6.113.** $\left[-5;\,-4+\sqrt{4\sqrt{5}-8}\right)$.
6.114. $(-4;\,-3+2\sqrt{\sqrt{5}-2}\,]$. **6.115.** $(-\infty;\,-5)\cup(-5;\,-4)$ $\cup(-4;\,-3)\bigcup\left(-3;\,-\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\bigcup\left[\frac{1+\sqrt{7}}{3};\,+\infty\right)$.
6.116. -1. **6.117.** 2. **6.118.** 1.
7.1. 4. **7.2.** 0; $\sqrt[9]{100\,000}$. **7.3.** $-2+\sqrt{4-2\log_3 5}$. **7.4.** 0. **7.5.** $\frac{1}{4}$.
7.6. $\frac{3}{5}$. **7.7.** $\log_3\frac{9}{2}$. **7.8.** 3. **7.9.** -2. **7.10.** -5; $\frac{93}{11}$. **7.11.** $\frac{5}{3}$.
7.13. $2^{\frac{3}{\sqrt{2}}}$. **7.14.** 4. **7.15.** $-\frac{1}{3}$; 1. **7.16.** 2. **7.18.** ±1. **7.19.** 2. **7.20.** 2.
7.21. $\pm\frac{1}{2}$. **7.22.** $\log_4(4+3\sqrt{2})$. **7.23.** 1. **7.24.** 0. **7.25.** -1; $\frac{2}{3}$.
7.26. $1+\log_4(3-\sqrt{7})$; 2. **7.27.** $\log_3\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\log_3(2+\sqrt{5})$.
7.28. 0. **7.30.** ±1. **7.31.** ±1. **7.32.** $\log_{\frac{5}{4}}\frac{1}{4}$. **7.33.** $\log_{\frac{5}{2}}\frac{1}{2}$, $\log_{\frac{5}{2}}3$.
7.34. 0; ±1. **7.35.** $\frac{1}{2}$. **7.36.** $\log_{\frac{3}{2}}\frac{1+\sqrt{13}}{6}$. **7.37.** $\frac{8}{7}$; $x=\log_{\frac{5}{2}}\frac{1}{4}$.
7.38. $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$; 1; 3. **7.39.** $\frac{1}{3}$; 2; 4. **7.41.** 5. **7.42.** 2. **7.43.** 2. **7.44.** 2.
7.45. 1. **7.46.** Нет решений. **7.47.** $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$. **7.48.** 1. **7.49.** 1. **7.50.** 2.
7.51. 2. **7.52.** 2. **7.53.** 3. **7.54.** 1. **7.56.** $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.
7.57. $(-1,-3)$; $(3,-3)$. **7.58.** $\left(\log_2(-2+\sqrt{6}),\log_3\frac{-2+\sqrt{6}}{2}\right)$.
7.59. $(1,\log_3 2)$. **7.60.** $(-17,\log_2 10)$. **7.61.** $(-1,1)$.
7.62. $(-2,-1)$. **7.63.** $(2,1)$. **7.64.** $(\log_7 3,2)$; $\left(\log_7\frac{5}{3},-1\right)$.
7.65. $\left(0,\log_2\frac{8}{11}\right)$; $\left(\frac{1}{3}\log_2\frac{3+\sqrt{8}}{2},\log_2\frac{4}{3+\sqrt{8}}\right)$.

8.1. $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)\bigcup\left(\frac{5}{8};\ \infty\right)$. **8.2.** $(0;\ 1)$. **8.4.** $(-\infty;\ 0)$.
8.5. $(-\log_2 6;\ 1)$. **8.6.** $(-\infty;\ -3]\cup\{5\}$. **8.7.** $[1;\ +\infty)$.
8.9. $[-4;\ -2)\cup(0;\ +\infty)$. **8.10.** $\left[\frac{1}{4};\ +\infty\right)$.
8.11. $(-\infty;\ -12)\bigcup\left(-\frac{1}{6};\ 0\right)\bigcup\left(\frac{1}{6};\ +\infty\right)$. **8.12.** $(-\sqrt{5};\ \sqrt{5})$.
8.13. $(3;\ +\infty)$. **8.14.** $\left(-\infty;\ \frac{3}{2}\right)$. **8.16.** $\left(0;\ \frac{1}{2}\right]\bigcup[3;\ +\infty)$.
8.17. $\left[\log_{72} 54;\ \log_{\frac{8}{9}} \frac{2}{3}\right]$. **8.18.** $x\neq 0$. **8.19.** $(0;\ 1)$.
8.20. $(-\sqrt{7};\ -\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3};\ \sqrt{7})$. **8.21.** $\frac{1}{2}$.
8.22. $\left(-\infty;\ \log_2 \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\bigcup\left[\log_2 \frac{3+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$.
8.23. $(-\infty;\ \log_2 3)$. **8.24.** $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$.
8.25. $\left(-\infty;\ \log_3 \frac{2}{3}\right)\bigcup(2;\ +\infty)$. **8.26.** $\left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.
8.27. $(-\infty;\ 0)\bigcup\left[\frac{1}{2};\ \infty\right)$. **8.28.** $(2;\ +\infty)$. **8.30.** $(-1;\ 1]$.
8.31. $(0;\ \log_2 3]$. **8.32.** $\left(-\infty;\ \log_3 \frac{1}{2}\right]\bigcup\left[\log_3 \frac{3}{5};\ \log_3 \frac{5}{3}\right)$.
8.33. -2. **8.34.** $(3;\ +\infty)$. **8.35.** $(0;\ +\infty)$.
8.36. $\left(-\infty;\ \log_3 \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]\bigcup[\log_3(2+\sqrt{5});\ +\infty)$.
8.37. $[-2;\ -1)\cup[1;\ +\infty)$. **8.38.** $(-1;\ 2]\cup[3;\ +\infty)$. **8.39.** $(-\infty;\ 0)$.
8.40. $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$. **8.41.** $(-\infty;\ 1]\cup[2;\ +\infty)$.
8.42. $(-\infty;\ \log_{6+\sqrt{10}} 9]\cup[\log_{6-\sqrt{10}} 3;\ +\infty)$. **8.43.** $\left(\frac{1}{2}\log_5 6;\ \log_6 5\right)$.
8.44. $\left(\frac{3}{7};\ \frac{1}{2}\right)\bigcup(1;\ +\infty)$. **8.45.** $\{1\}\cup(3;\ 5]$.
8.47. $\left(-1;\ -\frac{2}{3}\right)\bigcup\left(-\log_3 2;\ \frac{1}{3}\right]$. **8.49.** $\left(\frac{1}{2}\log_4 5;\ \log_5 4\right)$.
8.50. $(-\infty;\ \log_{\frac{2}{5}} 2)$. **8.51.** $(-\infty;\ -1]\cup(0;\ +\infty)$.
8.53. $[\log_{50} 8;\ \log_{50} 9)$. **8.54.** $\left(-\infty;\ -\log_{\frac{5}{2}} 2\right]\bigcup\left[\log_{\frac{5}{2}} 2;\ +\infty\right)$.
8.55. $[2; 18)$. **8.56.** $\left[\log_{\frac{2}{3}} \sqrt{17}; +\infty\right)$. **8.57.** $\left[0; \log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{3}\right)\cup\left(\log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{3}; 1\right]$.
8.58. $(-\infty;\ 0]\cup[\log_{\frac{4}{3}} 4;\ \log_{\frac{4}{3}} 7]\cup[\log_{\frac{4}{3}} 12;\ +\infty)$.

8.59. $\left(-\infty;\ \log_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\dfrac{3}{2}\right]\bigcup(0;\ +\infty)$. **8.60.** $(2;\ +\infty)$.
8.61. $(2;\ 3]\cup[5;\ +\infty)$. **8.62.** $\{0\}\cup[\lg^{15}6;\ +\infty)$.
8.63. $(-\infty;\ 0]\cup[2;\ 3)\bigcup\left(3;\ \dfrac{7}{2}\right]\bigcup[4;\ \infty)$.
8.65. $\left(-\infty;\ \dfrac{-3-\sqrt{29}}{2}\right]\bigcup\left[\dfrac{-3+\sqrt{29}}{2};\ +\infty\right)$.
8.66. $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log_4 3,\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\log_4 3\right)$. **8.67.** $(-\infty;\ 0)\cup(\log_3 2;\ 1)$.
8.68. 0. **8.69.** $\left(\dfrac{7}{9};\ +\infty\right)$. **8.70.** $(0,1);\ (0,-1)$.
8.71. $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\log_3 2,\ \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\log_3 2\right)$.

9.1. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **9.3.** 2. **9.4.** $\dfrac{1}{2}$. **9.5.** 1. **9.6.** $-2+\sqrt{3}$. **9.7.** 8. **9.8.** 2.
9.9. 5. **9.10.** $\dfrac{2}{9}$. **9.11.** 64. **9.12.** 3. **9.13.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 4. **9.15.** 1. **9.16.** $\dfrac{7}{5}$.
9.17. -5; 11. **9.20.** 2. **9.21.** $-2\dfrac{2}{3}$. **9.22.** 8. **9.23.** 1. **9.24.** $1+\sqrt{3}$.
9.25. $\dfrac{\sqrt{5}-3}{3}$. **9.26.** $\sqrt{17}-4$. **9.28.** 5. **9.29.** $-\dfrac{17}{6}$. **9.30.** 28.
9.31. 138. **9.32.** $\dfrac{5-8a}{6a+3}$. **9.33.** $\dfrac{20\sqrt{5}-3}{60+18\sqrt{5}}$. **9.34.** 15. **9.35.** 216.
9.36. $\dfrac{5}{9}$. **9.37.** -19. **9.38.** $\sqrt[3]{45}$. **9.39.** $\dfrac{5}{4}$. **9.40.** $\dfrac{1}{3}$; 9. **9.41.** $\dfrac{1}{9}$; 9.
9.42. 100. **9.43.** $\dfrac{1}{25}$. **9.44.** 0,01; 0,1; 10; 100. **9.45.** 0,1; $10^{\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$.
9.46. 2; $\dfrac{1}{8}$. **9.47.** $\sqrt{3}$; 9. **9.48.** 9; 81. **9.49.** 0,1; 10. **9.50.** 10; $10^{\log_2 3}$.
9.51. $7^{\log_2\frac{-5+\sqrt{41}}{2}}$. **9.52.** -1; 2. **9.53.** $3^{-\sqrt{2}}$; $3^{\sqrt{2}}$. **9.54.** $(-2,3)$.
9.55. $\left(\dfrac{5}{8},4\right)$. **9.56.** $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$. **9.57.** $(3,1)$. **9.58.** $(2^{\frac{10}{3}},3^{-\frac{5}{3}})$.
9.59. $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$. **9.60.** $(4,4)$. **9.61.** $(2,3)$. **9.62.** $\left(-1,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(\dfrac{3}{2},9\right)$.
9.63. $\left(\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{81}\right)$. **9.64.** $(5,2)\bigcup\left(\dfrac{93}{2},\dfrac{33}{2}\right)$.

10.1. $(2;\, 27]$. **10.2.** $\left(-3;\, -\dfrac{5}{2}\right]$. **10.3.** $\left(-\dfrac{14}{3};\, -3\right)$. **10.4.** -8.

10.5. $(-\infty;\, -2) \cup (2;\, +\infty)$. **10.6.** $\left(\dfrac{5}{3};\, +\infty\right)$. **10.7.** $\left(\dfrac{1}{3};\, \dfrac{5}{8}\right]$.

10.8. $[-\sqrt{10};\, -3) \cup (3;\, \sqrt{10}]$. **10.9.** $[-6;\, 3-\sqrt{3}) \cup (3+\sqrt{3};\, 12]$.

10.10. $\left[-\dfrac{6}{5};\, -1\right) \bigcup \left(-\dfrac{1}{5};\, 0\right]$. **10.11.** $(0;\, 3]$.

10.12. $\left[\dfrac{\sqrt{2}-16}{48};-\dfrac{7}{24}\right) \bigcup \left(-\dfrac{1}{6};\dfrac{\sqrt{2}-2}{6}\right]$. **10.13.** $\left(-4;\, \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$.

10.15. *Решение.* В подобных неравенствах необязательно вначале выписывать и находить ОДЗ, а затем решать само неравенство. Можно решать неравенство с помощью эквивалентных преобразований. При этом может оказаться, что решение некоторых неравенств в ОДЗ было лишним для данной задачи.

$$\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x \geq 0 = \log_2 1 \iff \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x \geq 1 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$$

$$\iff \log_5 1 = 0 < \log_5 x \leq \frac{1}{3} = \log_5 5^{\frac{1}{3}} \iff 1 < x \leq 5^{\frac{1}{3}}.$$

Ответ. $\left(1;\, 5^{\frac{1}{3}}\right]$.

10.16. $(\log_2 \sqrt{7};\, \log_2 3]$. **10.17.** $(3; 11]$. **10.18.** $\left[\dfrac{1}{3};\, 3\right)$.

10.20. $[-4;\, -2) \cup (5;\, 10]$. **10.21.** $(-\infty;\, -8] \cup (12;\, +\infty)$.

10.22. $\left(2-\sqrt{2};\dfrac{3}{4}\right] \bigcup \left[\dfrac{13}{4};2+\sqrt{2}\right)$. **10.23.** $(1; 64]$. **10.24.** $(-\infty;-2)$.

10.25. $(-311;-11] \bigcup \left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **10.27.** $\left\{\dfrac{1}{2}\right\} \bigcup (1;+\infty)$. **10.28.** $\left[\dfrac{1}{4};2\right]$.

10.30. $\left(-\dfrac{1}{3};\, -\dfrac{7}{24}\right) \bigcup (1;\, +\infty)$. **10.31.** $\left(\dfrac{1}{4};\, \dfrac{1}{2}\right] \bigcup [2;\, +\infty)$.

10.32. $(0;\, 1) \cup (1;\, 4) \cup (64;\, +\infty)$. **10.33.** $\left(5^{\sqrt{\frac{28}{3}}};\, +\infty\right)$.

10.34. $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$. **10.35.** $\left(0;\, 4^{-\sqrt{2}}\right] \bigcup \left[4^{\sqrt{2}};\, 4^{\frac{6+\sqrt{3}}{3}}\right]$.

10.36. $(2;\, 3) \bigcup \left(\dfrac{7}{2};\, 4\right) \cup (4;\, 5)$. **10.37.** $[-4;\, -1) \cup (1;\, 2]$.

10.39. $[-3;\, 2) \cup (5;\, 7]$. **10.40.** $\left(-4;\, -\sqrt{\dfrac{34}{3}}\right] \bigcup \left[\sqrt{\dfrac{34}{3}};\, \dfrac{7}{2}\right)$.

10.42. $\left(-\dfrac{3}{2};\ -\dfrac{23}{16}\right)$.**10.43.** $(0{,}01;\ 10)$.**10.44.** $\left(\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$.

10.45. $(-\infty;\ -2)\bigcup\left(-1\,;-\dfrac{1}{2}\right)$. **10.46.** $[-3;-\sqrt{6})\cup(\sqrt{6};\,3]$.

10.47. $(1;+\infty)$.**10.48.** $(0;1)\cup(3;5)$.**10.50.** $(-1;0)$.**10.51.** $(0;2]$.

10.52. $\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)\bigcup\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$. **10.53.** $\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{4}\right)\bigcup\left(-\dfrac{1}{6};-\dfrac{1}{10}\right)$.

10.54. $\left[1-\sqrt{23};\ -\dfrac{7}{2}\right)\bigcup\left(-\dfrac{7}{2};\ -\sqrt{\dfrac{34}{3}}\right]\bigcup\left[\sqrt{\dfrac{34}{3}};\ 4\right)$.

10.55. $\left(\dfrac{1}{2};\ 1\right)$. **10.56.** $\left(-\dfrac{4}{5};\ -\dfrac{1}{4}\right)\bigcup\left(\dfrac{1}{5};\ \dfrac{1}{4}\right)\bigcup\left(\dfrac{7}{4};\ \dfrac{9}{4}\right)$.

10.57. $(-2;0)\cup(1;+\infty)$. **10.58.** $(-\infty;\log_3 5)\bigcup\left(\dfrac{3}{2};\log_2 3\right)$.

10.59. $(-4;\ 1)\bigcup\left(1;\ \dfrac{5}{3}\right)\bigcup\left(\dfrac{5}{3};\ 11\right)$. **10.60.** -1. **10.61.** $(0;\ 2)$.

10.62. $(0;\ 1)\cup\{2\}$. **10.63.** $\left(\dfrac{1}{3};\ 3\right]$. **10.64.** $(-\infty;\ 0]$.

10.65. $\left(3;\ \dfrac{7}{2}\right)\bigcup(4;\ +\infty)$. **10.66.** $\left(\dfrac{5}{4};\ \log_3 4\right)\bigcup\left(\dfrac{4}{3};\ +\infty\right)$.

10.67. $(-\infty;\ -2]\cup[0;\ \lg 101-2)$.

10.68. $\left(\dfrac{-1-\sqrt{73}}{4};1\right)\bigcup\left(1;\ \dfrac{-1+\sqrt{73}}{4}\right)$.

10.69. $\left(-\infty;\ -2^{-\frac{3}{7}}\right]\bigcup\left(-2^{-\frac{3}{4}};\ -\dfrac{1}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{1}{2};\ 2^{-\frac{3}{4}}\right)\bigcup\left[2^{-\frac{3}{7}};+\infty\right)$.

10.70. $(-3;\ 2-2\sqrt{6})\cup(2-2\sqrt{6};\ -2)\cup(-2;\ 2)\cup(2;\ 2+2\sqrt{6})\cup$ $(2+2\sqrt{6};\ 7)$. **10.71.** $(2;\ 5]$. **10.72.** $(-\infty;\ -1)\cup(0;\ 2)$.

10.73. $\left(\dfrac{3}{4};\ 1\right]$. **10.74.** $\left[\dfrac{2}{3};\ 1\right)\bigcup[3;\ +\infty)$.

10.76. $\left(-6;\ \dfrac{3}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{3}{2};\ 2\right)\bigcup\left(2;\ \dfrac{5}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{5}{2};\ 10\right)$.

10.77. $(-\infty;\ -2]\cup[-1;\ 0)\cup(0;\ 1]\cup[2;\ +\infty)$.

10.78. *Решение.* Неравенство эквивалентно системе:

$$\begin{cases}\dfrac{x-4}{x-2-1}\le 0,\\ x-2>0,\\ x>0,\end{cases}\iff\begin{cases}\dfrac{x-4}{x-3}\le 0\Leftrightarrow 3<x\le 4,\\ x>2,\end{cases}\iff 3<x\le 4.$$

Ответ. $(3;\ 4]$.

10.79. $(-\infty;\ -6] \cup (-3;\ -2)$. **10.80.** $\left(\frac{1}{2};\ 1\right] \bigcup [6;\ +\infty)$.
10.82. $(-\infty;\ -7] \cup (-4;\ -3) \cup (-2;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$.
10.83. $[3;+\infty)$. **10.84.** $\left(2;\frac{5}{2}\right) \bigcup \left(\frac{5}{2};3\right)$. **10.85.** $\left(\frac{1}{2};1\right) \bigcup \left(6;\frac{13}{2}\right)$.
10.86. $[1;2)$.**10.87.** $[-0{,}9;-0{,}7] \cup (0;+\infty)$.**10.88.** $(-1;1) \cup [2;3)$.
10.89. $\left(0;\ \frac{1}{2}\right) \bigcup [1;\ 2) \cup (3;\ 6]$. **10.91.** $(-1;\ 0) \bigcup \left(0;\ \frac{1}{2}\right) \bigcup (1;\ 5]$.
10.92. $(-\infty;\ -\sqrt{10}) \bigcup \left(\frac{13}{4};\ 4\right)$. **10.93.** $(0;\ 3) \bigcup \left(\frac{25}{8};\ \sqrt{10}\right)$.
10.94. $\left[\frac{4}{5};\ 1\right)$. **10.95.** $(0;\ 1]$. **10.96.** $[-5;\ -1) \cup (3;\ 4] \cup (7;\ +\infty)$.
10.98. $[3;\ 4)$. **10.99.** $(0;\ 1000]$.

10.100. *Решение.* Из тождества $x^{\log_3 5} = 5^{\log_3 x}$, которое доказывается логарифмированием, после подстановки вместо $x^{\log_3 5}$ в уравнение выражения $5^{\log_3 x}$ получим:

$$5^{2\log_3 x} - 4 \cdot 5^{\log_3 x} - 5 \leq 0.$$

Решая это квадратное относительно $5^{\log_3 x}$ неравенство, имеем

$$(5^{\log_3 x} + 1)(5^{\log_3 x} - 5) \leq 0 \iff -1 \leq 5^{\log_3 x} \leq 5 \iff$$

$$5^{\log_3 x} \leq 5 = 5^1 \iff \log_3 x \leq 1 = \log_3 3 \iff 0 < x \leq 3.$$

Ответ. $(0;\ 3]$.

10.101. $[-1;\ 3]$. **10.102.** $[-1+\sqrt{2};\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.
10.103. $(2-\sqrt{3};\ 3-\sqrt{7}] \cup [3+\sqrt{7};\ +\infty)$.
10.104. $[-\sqrt{2};\ -1) \cup (1;\ \sqrt{2}]$. **10.105.** $(1;\ 2) \cup (4;\ +\infty)$.
10.106. $(0;2)$. **10.107.** $(0;\ +\infty)$. **10.108.** $[2;\ +\infty)$.
10.109. $\left(0;\ \frac{1}{9}\right] \bigcup [1;\ +\infty)$. **10.110.** $(1;\ 5^{\log_2 7}]$.
10.111. $\left(0;\ \frac{1}{2}\right] \bigcup [2;\ \infty)$. **10.112.** $(1;\ +\infty)$. **10.113.** $(3;\ +\infty)$.
10.115. $(-\infty;\ 0)$. **10.117.** $-2, -1, 0, 1$. **10.118.** $\left(-\frac{2}{3};\ 0\right)$.
10.119. $(0;\ +\infty)$. **10.121.** $1;\ 2$. **10.122.** $(2;\ \log_2 11]$.

Литература

[1] Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Пособие для учащихся 10-11 классов. М.: Изд-во "Наука", 1987.

[2] Моденов В. П. Пособие по математике. Часть I. М.: Изд-во МГУ, 1977.

[3] Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. Алгебра и начала анализа. Уравнения и неравенства. Пособие для учащихся 10-11 классов. М.: Изд-во "Экзамен", 1998.

[4] Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Учебное пособие. /Под редакцией Сканави М. И., М.: Изд-во "Высшая школа", 1980.

[5] Ципкин А. Г., Пинский А. И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. М.: Изд-во "Наука", 1989.

[6] Черкасов О. Ю., Якушев А. Г. Математика. Интенсивный курс подготовки к экзамену. М.: Изд-во Рольф: Айрис пресс, 1999.

[7] Якушева Е. В., Попов А. В., Якушев А. Г. Математика. Все для экзамена. М.: Изд-во "Экономика", 2000.

Сведения об авторе

Галеев Эльфат Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Специалист в области теории аппроксимации, функционального анализа, теории экстремальных задач и методики преподавания элементарной математики. Автор более 150 научных работ, в том числе ряда монографий по теории экстремальных задач и учебно-методических пособий по подготовке к вступительным экзаменам по математике в МГУ. Неоднократно участвовал в составлении вариантов и приеме вступительных экзаменов на различные факультеты МГУ.

Замечания и предложения по улучшению содержания книги можно направлять по адресу:

119992, Москва, МГУ, механико-математический факультет,
кафедра общих проблем управления,
профессору Галееву Эльфату Михайловичу.
моб. тел. 8-926-266-02-87.

e-mail: galeevem@mail.ru

Учебно-методическое пособие

Галеев Эльфат Михайлович

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ (типы задач и методы их решений).

Часть 2

- **Иррациональные уравнения и неравенства**
- **Показательные уравнения и неравенства**
- **Логарифмические уравнения и неравенства**

Издание десятое, дополненное

М.: Издательство "Попечительский совет мех-мат. ф-та МГУ", 2012.—80 с.

Подписано в печать 15.06.2012 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 5 п.л.
Заказ Тираж 300 экз.

Издательство "Попечительский совет механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова".
119992, г. Москва, Ленинские Горы, д.1.

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета.