3 Обоснование симплекс-метода

3.1 Теоремы существования, двойственности, критерий решения

Приведем три теоремы, играющие важную роль при обосновании симплекс-метода.

Рассмотрим задачу линейного программирования в общей форме
$$\langle c, x\rangle \to \min;\ Ax \le b, \tag{P}$$
где $c, x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m$, матрица размеров $m \times n$ $A = (a_i^j)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_m^1 & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$ со столбцами $a^j = \begin{pmatrix} a_1^j \\ \vdots \\ a_m^j \end{pmatrix}$, $j = 1, \dots, n$.

Введем множество
$$K := \{(\alpha, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \;\big|\; \exists\, x : \langle c, x\rangle \le \alpha,\ Ax \le z\}.$$
Легко видеть, что K — выпуклый конус.

Напомним два определения из выпуклого анализа.

Пусть $C := \{c_1, \dots, c_m\} \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое конечное подмножество. Элемент $k = \sum\limits_{i=1}^{m} t_i c_i,\ t_i \ge 0,\ i = 1, \dots, m$, называется *конической комбинацией* C.

Множество K называется *конечнопорожденным конусом*, если $\exists\ c_1, \dots, c_m$ такие, что $K = \Big\{k = \sum\limits_{i=1}^{m} t_i c_i \,\Big|\, t_i \ge 0,\ i = 1, \dots, m\Big\}$.

Лемма 1. *Конус K — конечнопорожденный.*

Доказательство. Покажем, что $K = \operatorname{conev}\{\pm\xi_1, \dots, \pm\xi_n, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m\}$, где $\xi_j = (c_j, a^j) = (c_j, a_1^j, \dots, a_m^j)$, $j = 1, \dots, n$; $\eta_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots 0) = e_i$ — канонический базис в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$.

Вложение $\operatorname{conev}\{\pm\xi_1, \dots, \pm\xi_n, \eta_0, \dots, \eta_m\} \subset K$ следует из того, что все образующие конуса лежат в K. Действительно, $\xi_j \in K$ (в определении K берем $x = e_j \Rightarrow \langle c, e_j \rangle = c_j \le c_j$, $A(e_j) = a^j \le a^j$), аналогично, $-\xi_j \in K$ (в определении K берем $x = -e_j$); $\eta_i \in K$ (в определении K берем $x = 0$).

Обратно, если вектор $(\alpha, z) = (\alpha, z_1, \dots, z_m) \in K$, то существует $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, для которого $\langle c, x \rangle \le \alpha$, $Ax \le z$. Значит, для некоторого набора чисел $\beta_0 \ge 0, \dots, \beta_m \ge 0$ выполняются соотношения

$$\langle c, x \rangle + \beta_0 = \alpha,\ Ax + \beta = z \ \ (\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)) \iff$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \beta_0 = \alpha,\ \sum_{j=1}^{n} a^j x_j + \beta = z \iff$$

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j, a^j) x_j + \sum_{i=0}^{m} \beta_i \eta_i = (\alpha, z) \iff$$

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j + \sum_{i=0}^{m} \beta_i \eta_i = (\alpha, z) \iff \sum_{j=1}^{n} |x_j|(\pm\xi_j) + \sum_{i=0}^{m} \beta_i \eta_i = (\alpha, z).$$

Это означает, что $(\alpha, z) \in \operatorname{conev}\{\pm\xi_1, \dots, \pm\xi_n,\ \eta_0, \dots, \eta_m\}$. $\square$

Лемма 2 (о замкнутости конечнопорожденного конуса)**.** *Конечнопорожденный конус замкнут.*

Доказательство. Пусть $K = \text{conev}\{x_1, \ldots, x_N\} = \{x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$, $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Доказательство проведем индукцией по числу m порождающих точек. Если $m = 1$, то конус $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = tk_1,\ t \geq 0\}$ — полупрямая, очевидно, замкнутая. Пусть лемма верна для конусов, порожденных $m-1$ точкой, $m \geq 2$, и пусть заданы m точек $k_1, \ldots, k_m$. Если конус $K = \text{cone}\{k_1, \ldots, k_m\}$ содержит векторы $-k_1, \ldots, -k_m$, то K — конечномерное подпространство, т. е. замкнутое множество. В противном случае существует вектор (пусть это будет $-k_m$), который не принадлежит K $(-k_m \notin K)$. Обозначим $K' := \text{conev}\{k_1, \ldots, k_{m-1}\}$. Тогда $K = \{k \mid k = k' + tk_m,\ k' \in K',\ t \geq 0\}$. По предположению индукции конус K' замкнут. Пусть

$$k^n := k'^n + t^n k_m \tag{$*$}$$

— последовательность векторов из K, сходящаяся к $\overline{k} \in \mathbb{R}^n$ $(k^n \to \overline{k})$. Докажем, что $\overline{k} \in K$. Из последовательности $\{t^n\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\{t^{n_i}\} \to \bar{t} \geq 0$. Имеются две возможности: либо $\bar{t}$ конечное число, либо $\bar{t} = +\infty$. В первом случае получим из $(*)$, что точки $k'^{n_i} = k^{n_i} - t^{n_i} k_m \to \overline{k} - \bar{t} k_m \in \overline{K'} = K'$ (в силу замкнутости конуса K'), т. е. $\overline{k} = k' + \bar{t} k_m \in K$ и, следовательно, K замкнуто. Во втором случае, соотношение $(*)$ деля на t^{n_i}, имеем: $\frac{k'^{n_i}}{t^{n_i}} + k_m = \frac{k^{n_i}}{t^{n_i}} \to 0$ при $i \to \infty$ ($\{k^{n_i}\}$ — сходящаяся последовательность (ограничена), $\{t^{n_i}\} \to +\infty$). Откуда $\frac{k'^{n_i}}{t^{n_i}}$ сходится к $-k_m \in \overline{K'} = K' \subset K$, что невозможно, так как $-k_m \notin K$. $\square$

Обозначим S_P — численное значение задачи (P), $\operatorname{Arg} P$ — множество решений задачи (P), т. е. множество допустимых точек $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $\langle c, x\rangle = S_P$.

Теорема (существования)**.** *Если численное значение задачи* (P) *конечно, то ее решение существует* $(|S_P| < \infty \Rightarrow \mathit{Arg}\, P \neq \emptyset)$.

Доказательство. Отметим сразу, что поскольку численное значение задачи конечно, то множество допустимых элементов непусто $(D(P) \neq \emptyset)$.

Поскольку $S_P = \inf\{\alpha \mid \exists\ x : \langle c, x\rangle = \alpha,\ Ax \leq b\} =: \hat{\alpha}$, то существуют последовательность $\{x_k\}$ такая, что $\langle c, x_k\rangle =: \alpha_k$, $Ax_k \leq b$ и $\alpha_k \to \hat{\alpha}$ при $k \to +\infty$. Это означает, что точки $(\alpha_k, b) \in K$ и $(\alpha_k, b) \to (\hat{\alpha}, b) \in \overline{K}$. Но K — замкнутое по лемме 2 множество, значит, предельная точка $(\hat{\alpha}, b) \in K$. Тогда по определению множества K существует точка $\hat{x}$ такая, что $\langle c, \hat{x}\rangle \leq \hat{\alpha} = S_P,\ A\hat{x} \leq b$. Это означает, что $\hat{x}$ является решением задачи P. $\square$

Вернемся к задаче линейного программирования в общей форме. Через $S(b) := \inf\limits_x \{\langle c, x\rangle \mid Ax \leq b\}$ обозначаем S-функцию задачи (P), рассматривая аргумент b как параметр.

Лемма 3. *S — выпуклая замкнутая функция.*

Доказательство. Для доказательства достаточно доказать, что $\operatorname{epi} S = K$. Напомним, что $\operatorname{epi} S = \{(\alpha, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mid S(b) \leq \alpha\}$. Возьмем $(\alpha, b) \in \operatorname{epi} S$, тогда $S(b) \leq \alpha \Leftrightarrow \inf\limits_x \{\langle c, x\rangle \mid Ax \leq b\} \leq \alpha$. Поэтому $S(b) < +\infty$. Это означает, что $D(P_b) \neq \emptyset$.

Если $S(b) = -\infty$, то $\forall\ a \in \mathbb{R}$ (в том числе и для $a = \alpha$) $\exists\ x : \langle c, x\rangle \leq a,\ Ax \leq b \Rightarrow (\alpha, b) \in K$. Если $S(b)$ конечно, то по теореме существования $\exists\ x \in \operatorname{Arg} P_b \Leftrightarrow \exists\ x : \langle c, x\rangle = S(b),\ Ax \leq b$. Поскольку $S(b) \leq \alpha$, то $\langle c, x\rangle \leq \alpha \Rightarrow (\alpha, b) \in K$. Значит, $\operatorname{epi} S \subset K$.

Обратное включение $\operatorname{epi} S \supset K$ очевидно. Следовательно, $\operatorname{epi} S = K$. $\square$

Лемма 4. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая замкнутая функция и существует точка z_0 такая, что $f(z_0) = -\infty$. Тогда $f(z) = -\infty \ \forall\ z \in dom\, f$*[1].

Доказательство. От противного. Предположим, $\exists\ z_1 : |f(z_1)| < \infty$. Тогда в силу выпуклости надграфика $f(z) = -\infty \ \forall\ z \in [z_0, z_1)$. Но это противоречит замкнутости надграфика. □

Следствие. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая замкнутая функция и $\exists\ z_1 : |f(z_1)| < \infty \Rightarrow f(z) > -\infty \ \forall\ z \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. От противного. Предположим, $\exists\ z_0 : f(z_0) = -\infty$. Тогда по лемме 4 $f(z) = -\infty \ \forall\ z \in \operatorname{dom} f$. Получаем противоречие с условием $|f(z_1)| < \infty$. □

Выпишем прямую задачу линейного программирования в общей форме и двойственную задачу к ней:

$$\langle c, x\rangle \to \min;\ Ax \le b,\ \ (P) \qquad \langle b, y\rangle \to \max;\ A^*y = c,\ y \le 0.\ (P^{**})$$

Теорема (двойственности)**.** *Для пары двойственных задач линейного программирования (P) и (P^{**}) имеет место следующая альтернатива: или значение одной из задач конечно (и тогда конечно значение другой и оба значения совпадают), или множество допустимых элементов в одной из задач пусто (и тогда другая задача либо несовместна, либо имеет бесконечное значение).*

Доказательство. 1) Пусть $|S(b)| < \infty$, тогда поскольку по лемме 3 S — выпуклая замкнутая функция, то по следствию из леммы 4 $S(z) > -\infty \ \forall\ z$. Значит, функция S является к тому же и собственной. Тогда по теореме Фенхеля–Моро п. 2.1 $S^{**}(b) = S(b)$. Это означает, что конечно значение двойственной задачи и оба значения совпадают.

2) Пусть $D_P = \emptyset$ ($\Leftrightarrow S(b) = +\infty$), тогда либо а) существует точка z_0 такая, что $S(z_0) = -\infty \Rightarrow S^* \equiv +\infty$, следовательно, $S^{**} \equiv -\infty$, т. е. $D_{P^{**}} = \emptyset$ (это означает, что множество

[1] Эффективное множество функции $\operatorname{dom} f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$.

допустимых элементов в двойственной задаче пусто), либо б) $S(z) > -\infty\ \forall\ z$, т. е. S — собственная. Тогда вновь по теореме Фенхеля–Моро $S^{**}(b) = S(b) = +\infty$ (это означает, что двойственная задача имеет бесконечное значение). $\square$

Теорема (критерий решения)**.** *Пусть $\hat{x}, \hat{y}$ — допустимые элементы в задачах (P) и (P^{**}) соответственно ($\hat{x} \in D(P)$, $\hat{y} \in D(P^{**})$). Тогда точки $\hat{x}, \hat{y}$ являются решениями в задачах (P) и (P^{**}) соответственно ($\hat{x} \in Arg\, P$, $\hat{y} \in Arg\, P^{**}$) тогда и только тогда, когда*

$$\langle c, \hat{x} \rangle = \langle \hat{y}, b \rangle.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\hat{x} \in \operatorname{Arg} P$, тогда $\hat{x} \in D(P)$ и $\langle c, \hat{x} \rangle = S_P$. Аналогично, $\hat{y} \in \operatorname{Arg} P^{**}$, тогда $\hat{y} \in D(P^{**})$ и $\langle \hat{y}, b \rangle = S_{P^{**}}$. Значение задачи (P) при этом конечно ($|S_P| < +\infty$). Значит по теореме двойственности значение двойственной задачи также конечно и оба значения совпадают ($S_P = S_{P^{**}}$). Следовательно, $\langle c, \hat{x} \rangle = \langle \hat{y}, b \rangle$.

Достаточность. Пусть $\hat{x} \in D(P)$, $\hat{y} \in D(P^{**})$ и $\langle c, \hat{x} \rangle = \langle \hat{y}, b \rangle$. Возьмем произвольные допустимые элементы $x \in D(P)$, $y \in D(P^{**})$. Это означает, что $Ax \le b,\ A^*y = c,\ y \le 0$. В силу этих условий на x и y имеем

$$\langle c, x \rangle = \langle A^*y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle \ge \langle y, b \rangle.$$

Из этого соотношения вытекает, что $\langle c, x \rangle \ge \langle \hat{y}, b \rangle = \langle c, \hat{x} \rangle\ \forall\ x \in D(P)$. Это означает, что $\hat{x} \in \operatorname{Arg} P$. Аналогично доказывается, что $\hat{y} \in \operatorname{Arg} P^{**}$. $\square$

3.2 Свойства множества допустимых точек

Рассмотрим задачу линейного программирования в канонической форме

$$\langle c, x\rangle \to \max;\ Ax = b,\ x \geq 0. \qquad (P)$$

Предложение 1. *Пусть* $x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$, *— допустимая точка в задаче* (P). *Тогда* x *является крайней точкой множества допустимых элементов тогда и только тогда, когда столбцы* $a^1, \ldots, a^k$ *матрицы* A *линейно независимы.*

Доказательство. Необходимость. Пусть x — крайняя точка. Докажем, что тогда столбцы $a^1, \ldots, a^k$ линейно независимы. Доказательство будем вести от противного. Допустим противное, что столбцы $a^1, \ldots, a^k$ линейно зависимы. Тогда существует ненулевой набор множителей $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ такой, что $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a^i = 0$. Значит $A\lambda = 0$ для вектора $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Поэтому точка $x + t\lambda$ является допустимой при малых t как больше, так и меньше нуля. Отсюда следует, что точка x не является крайней. Получили противоречие. Значит, наше допущение, что столбцы $a^1, \ldots, a^k$ линейно зависимы, неверно. То есть столбцы $a^1, \ldots, a^k$ линейно независимы.

Достаточность. Пусть столбцы $a^1, \ldots, a^k$ линейно независимы. Докажем, что тогда допустимая точка x — крайняя точка множества допустимых элементов. Доказательство вновь будем вести от противного. Допустим противное, что x не является крайней точкой. Тогда существуют допустимые точки y и z, $y \neq z$, отличные от x и число $t \in (0,\, 1)$ такие, что $x = ty + (1-t)z$. Из этого равенства и условий $x = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$, $y, z \geq 0$ следует, что $y = (y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$, $z = (z_1, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0)$, то есть у векторов y и z могут быть отличными от нуля только первые k координат. А из условий $Ay = b$, $Az = b \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{k} y_i a^i = b$, $\sum\limits_{i=1}^{k} z_i a^i = b$ вытекает, что $\sum\limits_{i=1}^{k} (y_i - z_i) a^i = 0$. Это означает, что столбцы $a^1, \dots, a^k$ линейно зависимы. Получили противоречие. Значит, наше допущение, что x не является крайней точкой, неверно. То есть x является крайней точкой. $\square$

Поскольку количество линейно независимых столбцов не может превышать количества строк матрицы A, то из предложения 1 следует, что крайняя точка содержит не более m положительных элементов.

Предложение 2. *Пусть (P) — невырожденная задача линейного программирования в канонической форме, $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ $\mathbb{R}^n$, $x_i > 0$, $i = 1, \dots, k$, — допустимая точка в задаче. Тогда*

a) $k \geq m$;

b) точка x является крайней точкой множества допустимых элементов тогда и только тогда, когда $k = m$.

Доказательство. a) Доказательство будем вести от противного. Допустим противное, что существует допустимая точка, у которой менее m положительных координат. Для определенности, пусть это первые k координат ($k < m$). Рассмотрим множество $\overline{D} = \{y \in \mathbb{R}^k \mid \overline{A}y = b,\ y \geq 0\}$, где $\overline{A} := \{a^1, \dots, a^k\}$ — матрица, состоящая из первых k столбцов исходной матрицы A. Точка $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \overline{D}$, то есть множество $\overline{D}$ непусто. Пусть $\hat{y}$ — крайняя точка множества $\overline{D}$ (докажите самостоятельно ее существование). У нее число положительных координат l будет меньше m ($l \leq k < m$) и соответствующие l столбцов матрицы A по предложению 1 линейно независимы. Тогда вновь по предложению 1 точка $\hat{x} = (\hat{y}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ будет крайней точкой множества допустимых элементов в задаче (P), причем число положительных координат l у нее меньше m. Это противоречит невырожденности задачи. Значит, наше допущение, что существует допустимая точка, у которой имеется менее m положительных координат, неверно. То есть $k \geq m$.

b) *Необходимость* непосредственно следует из определения невырожденной задачи, поскольку в невырожденной задаче любая крайняя точка имеет ровно m положительных координат.

Достаточность. Пусть $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$, $x_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, — допустимая точка в задаче. Докажем, что тогда x — крайняя точка множества допустимых элементов. Доказательство будем вести от противного. Предположим противное, что точка x не является крайней. Тогда по предложению 1 столбцы $a^1, \dots, a^m$ линейно зависимы. Это означает, что существует ненулевой набор множителей $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ такой, что $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a^i = 0$. Значит $A\lambda = 0$ для вектора $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Поэтому $A(x + t\lambda) = Ax + tA\lambda = Ax = b$ для любого t, а вектор $x + t\lambda \geq 0$ при малых t как больше, так и меньше нуля, т. е. $x + t\lambda$ — допустимый элемент при малых t как больше, так и меньше нуля. Поскольку $x_i + t\lambda_i = x_i > 0$ при $t = 0$, $i = 1, \dots, m$, то увеличивая $|t|$, придем к случаю, когда еще одна координата вектора $x + t\lambda$ обратится а ноль, а все остальные по–прежнему больше или равняются нулю. Таким образом, при этом t допустимая точка $x + t\lambda$ будет иметь менее m положительных координат. Это противоречит пункту а) данного предложения. Получили противоречие. Значит, наше предположение, что точка x не является крайней, неверно. То есть x является крайней точкой. $\square$

3.3 Доказательство симплекс-метода

Рассмотрим невырожденную задачу линейного программирования в канонической форме

$$\langle c, x \rangle \to \max; \ Ax = b, \ x \geq 0. \tag{P_k}$$

Напомним, что двойственной к ней является следующая задача:

$$\langle b, y \rangle \to \min; \ A^* y \geq c. \tag{P_k^{**}}$$

При изложении правила решения задачи в канонической форме мы пользовались некоторыми фактами, которые были даны там без обоснования. Сейчас мы их докажем, оформив утверждение в виде теоремы.

Теорема. *Пусть* $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $x_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, *— крайняя точка множества допустимых элементов* $D(P_k)$. *Тогда:*

a) если $\Delta \geq 0$, *то вектор* x *— решение задачи* (P_k), *а вектор* $y := c_b A_b^{-1}$ *— решение двойственной задачи* (P_k^{**});

b) если для некоторого j $\Delta_j < 0$ *и* $x^j \leq 0$, *то значение задачи* $S_{P_k} = +\infty$;

c) если не выполнены условия п.п. a) *и* b), *то точка* x' *является новой крайней точкой множества допустимых элементов* $D(P_k)$, *а разложение векторов* $x', a^1, \dots, a^n$ *производится согласно симплекс-методу, значение функционала при этом возрастет на величину* $-t_{i_0}\Delta_{j_0}$: $\langle c, x' \rangle = \langle c, x \rangle - t_{i_0}\Delta_{j_0}$.

Доказательство. Напомним, что по предложению 1 $\det A_b \neq 0$, т. е. матрица A_b обратима.

a) Пусть $\Delta \geq 0$. Преобразуем это условие с учетом определения векторов $z := c_b X$, $y := c_b A_b^{-1} \Leftrightarrow yA_b = c_b$ и матрицы X $(A_b X = A)$:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow z - c \geq 0 \Leftrightarrow z \geq c \Leftrightarrow c_b X \geq c \Leftrightarrow y A_b X \geq c \Leftrightarrow yA \geq c \Leftrightarrow A^* y \geq c$$

Значит, y является допустимым вектором в задаче (P_k^{**}) двойственной к задаче (P_k). Кроме того в силу условия $A_b x_b = b$ имеем:

$$\langle c, x \rangle = \langle c_b, x_b \rangle = \langle yA_b, x_b \rangle = \langle A_b^* y, x_b \rangle = \langle y, A_b x_b \rangle = \langle y, b \rangle.$$

По критерию решения п. 3.1 x — решение в задаче (P_k), а y — решение в двойственной задаче (P_k^{**}).

b) Положим $x(t) := x - t(x^j, 0) + te_j$ $(e_1, \dots, e_n$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n)$. Тогда $x(t) = (x_b - tx^j, 0) + te_j \geq 0 \; \forall\, t \geq 0$ в силу условия $x^j \leq 0$ и $Ax(t) = A_b x_b - tA_b x^j + tAe_j = b - ta^j + ta^j = b$. Значит, $x(t)$ — допустимый элемент для любого $t \geq 0$, при этом

$$\langle c, x(t) \rangle = \langle c_b, x_b \rangle - t\langle c_b, x^j \rangle + t\langle c, e_j \rangle =$$

$$= \langle c, x \rangle - tz_j + tc_j = \langle c, x \rangle - t(z_j - c_j) =$$

$$= \langle c, x\rangle - t\Delta_j \to +\infty \text{ при } t \to +\infty.$$

c) Предположим, что не выполнены условия п.п. a) и b) теоремы. Тогда для некоторого j_0 такого, что $m+1 \le j_0 \le n$, выполнено условие $\Delta_{j_0} < 0$ и величина

$$t_{i_0} := \min_i \left\{ \frac{x_i}{x_{ij_0}} \;\middle|\; x_{ij_0} > 0 \right\} = \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}} > 0.$$

Возьмем $x' := x - t_{i_0}(x^{j_0}, 0) + t_{i_0} e_{j_0}$. Докажем, что вектор x' является новой крайней точкой в задаче (P_k). Покажем вначале, что он является допустимым вектором. Как и в пункте b) выводим, что $Ax' = b$. Так же имеем

$$x'_i = x_i - t_{i_0} x_{ij_0} = x_i - \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}} x_{ij_0} \ge 0 \text{ при } i = 1, \dots, m \ (\Rightarrow x'_{i_0} = 0);$$

$$x'_i = 0 \text{ при } i = m+1, \dots, n, \ i \ne j_0;$$

$$x'_{j_0} = t_{i_0} = \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}} > 0.$$

Таким образом, $x' \ge 0$, и значит, вектор x' является допустимым в невырожденной задаче (P_k). По построению у вектора x' по сравнению с вектором x добавилась одна положительная j_0-я координата, а какие-то обратились в ноль. Поскольку по предложению 2a) у допустимой точки число положительных координат не менее m, то в ноль может обратиться только одна координата (это x'_{i_0}-я координата обратилась в ноль). Значит, у вектора x' имеется ровно m положительных координат на местах $1, \dots, i_0 - 1, i_0 + 1, \dots, m, j_0$. Следовательно, по предложению 2b) x' — крайняя точка. (Отметим, что в невырожденной задаче число положительных компонент у крайней точки может уменьшаться.)

Выписанные формулы означают, что в новой симплексной таблице столбец x' вычисляется согласно указанному методу построения симплексной таблицы. Покажем, что и остальные столбцы x'^j в новой симплексной таблице строятся по этому же способу. Для этого вычислим координаты x'_{ij} разложения столбцов a^j, $j = 1, \dots, n$, матрицы A по базису $a^1, \dots, a^{i_0-1}, a^{j_0}, a^{i_0+1}, \dots, a^m$.

В старом базисе мы имели следующие разложения:

$$a^j = \sum_{i=1}^{m} a^i x_{ij} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{m} a^i x_{ij} + a^{i_0} x_{i_0 j},\ j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

В частности при $j = j_0$

$$a^{j_0} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{m} a^i x_{ij_0} + a^{i_0} x_{i_0 j_0}.$$

Поскольку $x_{i_0 j_0} \neq 0$, то выразим a^{i_0} из последнего уравнения

$$a^{i_0} = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{m} a^i \frac{x_{ij_0}}{x_{i_0 j_0}} + \frac{a^{j_0}}{x_{i_0 j_0}},$$

и подставим в соотношение (1). Получим разложения по базису $a^1, \ldots, a^{i_0-1}, a^{j_0}, a^{i_0+1}, \ldots, a^m$:

$$a^j = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{m} a^i x_{ij} + \left(-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{m} a^i \frac{x_{ij_0}}{x_{i_0 j_0}} + \frac{a^{j_0}}{x_{i_0 j_0}} \right) x_{i_0 j} =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{m} a^i \left(x_{ij} - \frac{x_{i_0 j} x_{ij_0}}{x_{i_0 j_0}} \right) + a^{j_0} \frac{x_{i_0 j}}{x_{i_0 j_0}},\ j = 1, \ldots, n.$$

Таким образом,

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{i_0 j} x_{ij_0}}{x_{i_0 j_0}},\ i \neq i_0,\ i = 1, \ldots, m,\ \Rightarrow x'_{ij_0} = 0,\ i \neq i_0,$$

$$x'_{i_0 j} = \frac{x_{i_0 j}}{x_{i_0 j_0}},\ j = 1, \ldots, n.$$

Теорема полностью доказана. $\square$