МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Галеев Э. М.

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ

(типы задач и методы их решений)

Часть 3

- **Тригонометрические уравнения и неравенства**
- **Арифметические и геометрические прогрессии**
- **Текстовые задачи**

Москва 2012

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Галеев Э. М.

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ

(типы задач и методы их решений)

Часть 3

- **Тригонометрические уравнения и неравенства**
- **Арифметические и геометрические прогрессии**
- **Текстовые задачи**

Издание десятое, дополненное

Москва 2012

ББК 22.1 я 729
УДК 373.3

Учебно-методическое пособие

Галеев Э.М.

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ (типы задач и методы их решений). Часть 3. Тригонометрические уравнения и неравенства. Арифметические и геометрические прогрессии. Текстовые задачи. Изд. 10-е, дополненное. Издательство "Попечительский совет механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова". 2012. - 110 с.

В пособии рассматриваются тригонометрические уравнения, неравенства, тригонометрические системы, а также арифметические и геометрические прогрессии, текстовые задачи. Предпринята попытка систематизации типов встречающихся задач и методов их решений. Схема решений уравнений определенного вида подобрана таким образом, чтобы решение было наиболее простым. Решения каждого типа задач по этим схемам приведены в разделе "Ответы, указания, решения" в конце пособия.

Предназначено для абитуриентов МГУ, выпускников школ при подготовке к ЕГЭ, для слушателей подготовительных отделений и курсов, учащихся математических классов.

Рецензент: д.ф.-м.н., Богатый С. А.

$\mathbf{Г}\dfrac{\mathbf{1702070000-08}}{\mathbf{3Ш7(03)-02}}$ **Без объявл.**

ISBN 5-87597-024-3

Оглавление

Предисловие

Часть 3 состоит из шести параграфов: тригонометрические преобразования, уравнения, неравенства, арифметические и геометрические прогрессии, текстовые задачи. Параграфы делятся на пункты по типам задач. Производится систематизация типов встречающихся задач и методов их решений. Схема решений уравнений определенного вида подобрана таким образом, чтобы решение было наиболее простым. Такая систематизация помогает определить, к какому типу задач относится данная задача и оптимальную схему ее решения. Это помогает более легкому усвоению материала, лучшему запоминанию.

В начале параграфа обычно приводятся краткие сведения, например, тригонометрические формулы, определения арифметических и геометрических прогрессий, их основные свойства. Предполагается, что читатель знаком со школьной программой и собирается углубить уже имеющиеся у него знания и научиться правильным подходам и схемам решений уравнений и неравенств.

При работе с пособием рекомендуется вначале прочитать имеющуюся краткую теоретическую часть. Перед решением задачи вначале следует разобраться к какому виду относится или к какому виду сводится имеющаяся задача, а затем воспользоваться схемой решения задач этого вида. Даже, если Вам ясно, как решать задачу, необходимо подумать, а наиболее ли простое решение Вы выбрали, нет ли другого более легкого решения.

Имеющиеся задачи распределены на две части. Одна часть предполагает решение задач на занятии под руководством преподавателя. Другая часть — для самостоятельного решения дома. Домашние задачи предназначены для закрепления материала, пройденного на занятии с преподавателем. Как правило, задачи подобные домашним уже решены на занятии.

Часть задач приведена с подробными решениями в разделе “Ответы, указания, решения” в конце пособия. Иногда решения первых задач встречающихся видов подробно разобраны в разделе “Ответы, …”. Рекомендуется прочитать решение, приведенное в книге. Понять, почему автор предпочел именно такое решение, а не другое. При решении подобных задач научиться использовать предложенный способ и форму записи решения. Для аналогичных задач решения не приводятся, а даются только ответы. В некоторых задачах специально ответы не приводятся. Это так называемые “тестовые” задачи. С помощью тестовых задач преподаватель легко может проверить, подгоняет ли ученик свои ответы к задачам или нет. Кроме того в тестовых задачах, имеются определенные тонкости, которые надо заметить. И преподаватель проверяет, усвоил ли ученик их. Задачи, являющиеся в своем пункте по сравнению с остальными существенно более сложными, отмечены звездочкой.

В пособии содержатся задачи и простые, и сложные. Основная масса задач взята из вступительных экзаменов в МГУ. В этом случае указан факультет, год, номер задачи и общее количество задач. Для выездных экзаменов указывается город, в котором эта задача давалась. Часть задач взята из пособий по элементарной математике, приведенных в списке литературы (некоторые из них при этом изменены), или составлена автором.

Пособие предназначено, в первую очередь, для абитуриентов ВУЗов с повышенными требованиями по математике, для слушателей подготовительных отделений и курсов, учащихся математических классов. В то же время знания приведенных приемов решения задач окажутся полезными и для любого школьника.

Галеев Э. М.

Основные тригонометрические формулы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\ \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha},\ \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Функции суммы и разности углов

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\beta\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\quad \begin{pmatrix}\cos\alpha\neq0\\ \cos\beta\neq0\end{pmatrix},$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},\ \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}\ \begin{pmatrix}\sin\alpha\neq0\\ \sin\beta\neq0\end{pmatrix}.$$

Функции двойного и половинного угла

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2},\qquad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}.$$

Преобразование суммы функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad \cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\qquad \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$
$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\qquad \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Разложение произведения в сумму или разность

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\Big),$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\Big),$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\Big).$$

Дополнительные тригонометрические формулы:

Формулы универсальной тригонометрической подстановки

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}, \qquad \alpha \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Формулы приведения

$$\sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha, \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$
$$\sin\alpha = \sin(\pi-\alpha), \qquad \sin\alpha = -\sin(\pi+\alpha),$$
$$\cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \qquad \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$
$$\cos\alpha = -\cos(\pi-\alpha), \qquad \cos\alpha = -\cos(\pi+\alpha),$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi) = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\pi) = \operatorname{ctg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Введение дополнительного угла

При преобразовании выражения вида $a\sin x + b\cos x$ удобно воспользоваться введением дополнительного угла. Пусть числа a и b одновременно не равны нулю. Тогда

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Введем угол φ такой, что $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Такой угол φ существует для любых a и b и таких углов бесконечное множество. Нам достаточно взять один из них, например, $\varphi = \arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ при $a > 0$; $\varphi = \arccos\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ при $b > 0$. Тогда по формуле синуса суммы двух углов

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x) =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi).$$

Некоторые полезные формулы

$$\cos x = \cos y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y + 2k\pi, \\ x = -y + 2l\pi, \end{array}\right. \qquad \sin x = \sin y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y + 2k\pi, \\ x = \pi - y + 2l\pi, \end{array}\right.$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + k\pi, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi, \end{cases} \qquad \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + k\pi, \\ x \neq l\pi, \end{cases}$$

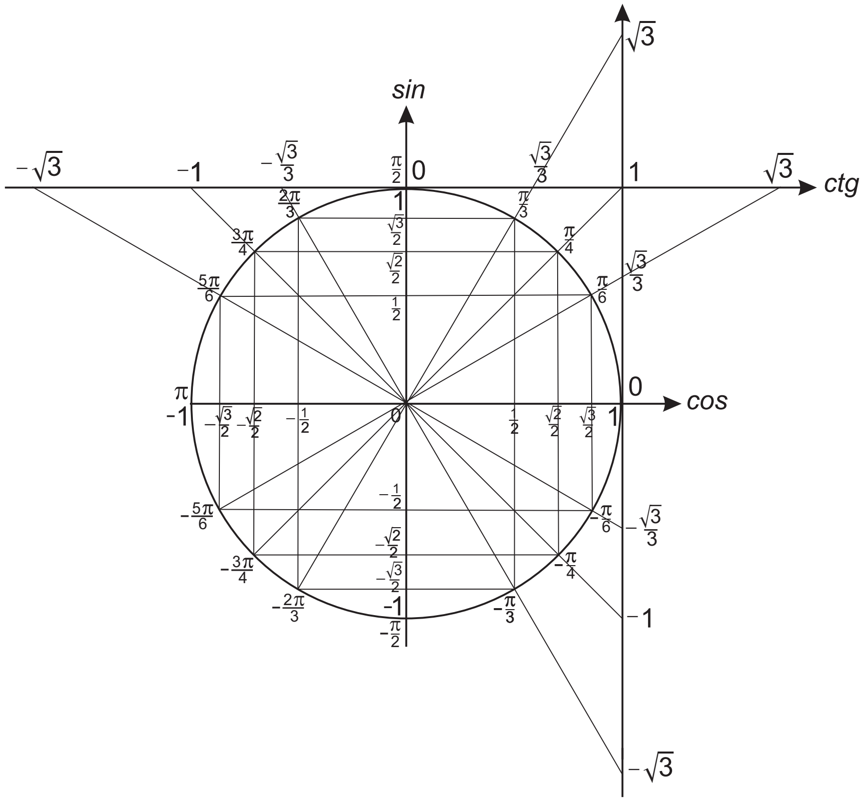
$$\sin x = \cos y \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos y.$$

Формулы тройного угла

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}.$$

Тригонометрический круг



Решение простейших тригонометрических уравнений

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi,$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi, \end{array}\right. \qquad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi, \end{array}\right. \qquad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, \end{array}\right. \qquad \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \qquad \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2l\pi, \end{array}\right. \qquad \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi, \end{array}\right. \qquad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi, \end{array}\right. \qquad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi,$$

$$\sin x = a \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + k\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2k\pi, \\ x = \pi - \arcsin a + 2l\pi, \end{array}\right. \qquad \cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2k\pi,$$

при $|a| \le 1$.

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi,$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi,$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,$$

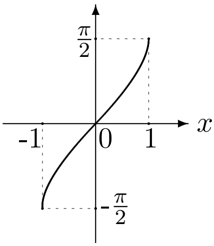
$$\operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,$$

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,$$

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + k\pi, \qquad \operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + k\pi.$$

Обратные тригонометрические функции

$\arcsin x$



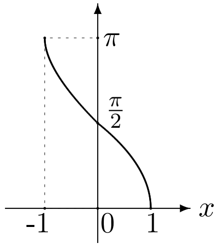
ОДЗ: $-1 \leq x \leq 1$,

область изменения:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2},$$

монотонно возрастает,
нечётная.

$\arccos x$



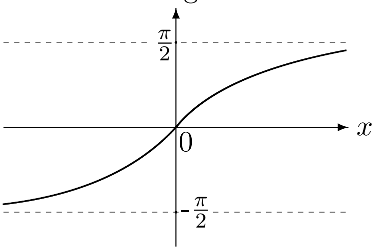
ОДЗ: $-1 \leq x \leq 1$,

область изменения:

$$0 \leq \arccos x \leq \pi,$$

монотонно убывает,
$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

$\operatorname{arctg} x$



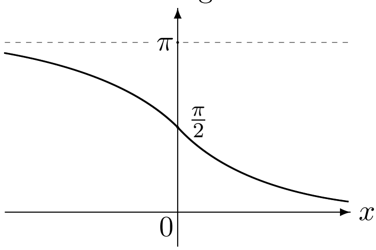
ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$,

область изменения:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2},$$

монотонно возрастает,
нечётная.

$\operatorname{arcctg} x$



ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$,

область изменения:

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi,$$

монотонно убывает,
$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

11 Преобразование тригонометрических выражений

11.1 Доказать тождества

11.1. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha.$

11.2. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha.$

11.3. $\sin\alpha-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=4\cos\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{3\alpha}{2}.$

В задачах №№ 11.4 – 11.5 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ (например, α,β,γ — углы треугольника).

11.4. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}.$

11.5. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=1.$

11.6. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$

11.7. $\dfrac{1}{\sin 2\alpha}+\dfrac{1}{\sin 4\alpha}+\dfrac{1}{\sin 8\alpha}+\ldots+\dfrac{1}{\sin 2^n\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2^n\alpha.$

Домашнее задание

11.8. $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha=4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha.$

11.9. $\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$

11.10. $\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha.$

11.11. $\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha).$

11.12. $\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\alpha-\sin^2\beta=2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta).$

В задачах №№ 11.13 – 11.15 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

11.13. Доказать тождество $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

11.14. $\operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\ \operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\ \operatorname{ctg}\alpha=1$.

11.15. $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\ \operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\ \operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$.

11.16. $\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\ldots+\cos^2 n\alpha=\dfrac{n}{2}+\dfrac{\cos(n+1)\alpha\cdot\sin n\alpha}{2\sin\alpha}$.

11.17. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

11.18. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2007, 5(10)) Чему равно пятое (в порядке возрастания) из натуральных чисел n, удовлетворяющих неравенству $\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n<0$?

11.19. $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\ldots+\sin^2 n\alpha=\dfrac{n}{2}-\dfrac{\cos(n+1)\alpha\cdot\sin n\alpha}{2\sin\alpha}$.

11.20. $\cos^3\alpha+\cos^3 2\alpha+\ldots+\cos^3 n\alpha=$

$$=\frac{3\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\sin\frac{3n\alpha}{2}\cos\frac{3(n+1)\alpha}{2}}{4\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

11.21. $\sin^3\alpha+\sin^3 2\alpha+\ldots+\sin^3 n\alpha=$

$$=\frac{3\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sin\frac{3n\alpha}{2}\sin\frac{3(n+1)\alpha}{2}}{4\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

11.22. $\cos^4\alpha+\cos^4 2\alpha+\ldots+\cos^4 n\alpha=$

$$=\frac{3n}{8}+\frac{\sin n\alpha\cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}+\frac{\sin 2n\alpha\cos 2(n+1)\alpha}{8\sin 2\alpha}.$$

11.23. $\sin^4\alpha+\sin^4 2\alpha+\ldots+\sin^4 n\alpha=$

$$=\frac{\sin 2n\alpha\cos 2(n+1)\alpha}{8\sin 2\alpha}-\frac{\sin n\alpha\cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}+\frac{3n}{8}.$$

11.24.* $\dfrac{1}{\cos\alpha\cos 2\alpha}+\dfrac{1}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha}+\ldots+\dfrac{1}{\cos(n-1)\alpha\cos n\alpha}=$ $=\frac{\operatorname{tg}n\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$.

11.2 Доказать равенства

11.25. $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{4}.$

11.26. $\cos\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9}=\dfrac{1}{8}.$

11.27. $\cos\dfrac{\pi}{11}\cos\dfrac{2\pi}{11}\cos\dfrac{3\pi}{11}\cos\dfrac{4\pi}{11}\cos\dfrac{5\pi}{11}=\dfrac{1}{2^5}.$

11.28.*(Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2008, 8(10)) Вычислить $\log_2(\sin 1^\circ\cdot\sin 3^\circ\cdot\ldots\cdot\sin 89^\circ)$.

11.29.* $\cos\dfrac{\pi}{2n+1}\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}\cos\dfrac{3\pi}{2n+1}\cdot\ldots\cdot\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}=\dfrac{1}{2^n}.$

11.30. $\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}=-\dfrac{1}{2}.$

11.31. $\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{5\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=0.$

11.32. $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}.$

11.33. $\cos\dfrac{\pi}{9}+\cos\dfrac{5\pi}{9}+\cos\dfrac{7\pi}{9}=0.$

11.34. $\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{4\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{6\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\dfrac{2n\pi}{2n+1}=-\dfrac{1}{2}.$

11.35. $\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{8\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{8\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}.$

11.36. $\sin\dfrac{3\pi}{10}\sin\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{1}{4}.$

11.37. $\sin\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}.$

11.38. $\sin\dfrac{\pi}{9}\sin\dfrac{2\pi}{9}\sin\dfrac{3\pi}{9}\sin\dfrac{4\pi}{9}=\dfrac{\sqrt{9}}{16}.$

11.39.** [1] $\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$.

11.40. $\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

11.41.** $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

11.42.** $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

11.43. $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{5}\,\mathrm{tg}^2\frac{2\pi}{5}=5$.

11.44.** $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2n+1}\,\mathrm{tg}^2\frac{2\pi}{2n+1}\,\mathrm{tg}^2\frac{3\pi}{2n+1}\cdot\ldots\cdot\mathrm{tg}^2\frac{n\pi}{2n+1}=2n+1$.

Домашнее задание

11.45. $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$.

11.46. $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2^4}$.

11.47. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^7}$.

11.48. $\cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}=\frac{1}{2^5}$.

11.49. $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=0$.

11.50. $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$.

11.51. $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

---

[1] Задачи с двумя звездочками приведены как имеющие место формулы, а не для решения при подготовке к вступительному экзамену.

11.52. $\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=0.$

11.53. $\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}.$

11.54. $\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}=-\frac{3}{4}.$

11.55. $\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{2}.$

11.56. $\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8}.$

11.57. $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{\sqrt{3}}{8}.$

11.58. $\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{2\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{4}.$

11.59. $\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{4\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}}{2^4}.$

11.60. $\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{2\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{4}.$

11.61. $\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$

11.62. $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{2\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{4\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}}{2^4}.$

11.63.

$\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ\sin 40^\circ\sin 50^\circ\sin 60^\circ\sin 70^\circ\sin 80^\circ=\frac{3}{2^8}.$

11.64. $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{7}\,\mathrm{tg}^2\frac{2\pi}{7}\,\mathrm{tg}^2\frac{3\pi}{7}=7.$

11.65. $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{9}\,\mathrm{tg}^2\frac{2\pi}{9}\,\mathrm{tg}^2\frac{4\pi}{9}=3.$

11.66. $\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{9}\,\mathrm{tg}^2\frac{2\pi}{9}\,\mathrm{tg}^2\frac{3\pi}{9}\,\mathrm{tg}^2\frac{4\pi}{9}=9.$

11.67. $\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2n}\;\mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{2n}\;\mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{2n}\cdot\ldots\cdot\mathrm{tg}\,\frac{(n-2)\pi}{2n}\,\mathrm{tg}\,\frac{(n-1)\pi}{2n}=1.$

11.3 Вычислить

11.68. $\sin^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\sin^2\dfrac{5\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{8}$.

11.69. $\operatorname{tg}435^\circ+\operatorname{tg}375^\circ$.

11.70. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2007”, 1(10))
Вычислить $(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\beta-\cos\beta)$, если $\sin(\alpha+\beta)=0{,}8$ и $\cos(\alpha-\beta)=0{,}3$.

11.71. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов и высшая школа современных социальных наук, 2008, 3(7))
Вычислить $\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}+2\alpha\right)$, если $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$ и $-\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<0$.

11.72. (МГУ, почвоведения, 1998, 2(6))
Найдите $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{4}$ и $\pi<\alpha<2\pi$. Установите без помощи таблиц и калькулятора, какое из чисел больше: $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|$ или $\dfrac{2}{7}$.

11.73. (МГУ, геологический, экономический, …, 2010, 3(6))
Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$ и $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)<0$.

11.74. (МГУ, экономический, 1992, 1(6))
Вычислить $\log_{\frac{9}{5}}\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\right|+\log_{\frac{9}{5}}\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-3\alpha\right)\right|$,
если известно, что $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

11.75. $\sin 15^\circ$.

11.76.* $\sin 18^\circ$.

11.77. $\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{3}\right)$.

11.78. $\arcsin(\sin 5)$.

11.79.* (МГУ, мех-мат, 1999, устный)

$$\operatorname{arctg}8+\operatorname{arctg}\frac{19}{22}+\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{2}\right).$$

Домашнее задание

11.80. $\sin^4 \dfrac{\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{3\pi}{8} + \sin^4 \dfrac{5\pi}{8} + \cos^4 \dfrac{7\pi}{8}$.

11.81. $\sin^4 \dfrac{\pi}{16} + \sin^4 \dfrac{3\pi}{16} + \sin^4 \dfrac{5\pi}{16} + \sin^4 \dfrac{7\pi}{16}$.

11.82. $\operatorname{tg} 255^\circ - \operatorname{tg} 195^\circ$.

11.83. (ЕГЭ, 2009, B6)

$$\frac{2\cos^2 \frac{\pi}{10}}{\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{10} \cdot \sin \frac{\pi}{5}}.$$

11.84. $(\cos 70^\circ + \cos 50^\circ)(\cos 310^\circ + \cos 290^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 160^\circ) \times (\cos 320^\circ - \cos 380^\circ)$.

11.85. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

$8\cos 260^\circ \sin 130^\circ \cos 160^\circ$.

11.86. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

$$\frac{20\sin 80^\circ \sin 65^\circ \sin 35^\circ}{\sin 20^\circ + \sin 50^\circ + \sin 110^\circ}.$$

11.87. (МГУ, почвоведения, 2002, 2(7))

$\cos \dfrac{5\pi}{8}$.

11.88. (МГУ, почвоведения, май 2004, 1(6))

$\sin 255^\circ$.

11.89. (Черноморский ф-л МГУ (г. Севастополь), 2007, 1(10))
Упростите и затем вычислите при $\alpha = 180^\circ$ значение выражения

$$\cos^2\left(135^\circ - \frac{\alpha}{8}\right) - \cos^2\left(495^\circ + \frac{\alpha}{8}\right).$$

11.90. (МГУ, почвоведения, май 1996, 1(6))
Найдите $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$, если известно, что $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$, а $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

11.91. (МГУ, почвоведения, 2000, 3(7))
Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, а $\sin 4\alpha > 0$.

11.92. (МГУ, почвоведения, 2002, 2(7))
Вычислить $\operatorname{tg} 3\alpha$, если $\sin\alpha = 2\cos\alpha$.

11.93. (МГУ, почвоведения, 2006, 1(7))
Найти $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$.

11.94. (МГУ, социологический, 2008, 2(7))
Найти $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha$, при $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$.

11.95.* $\sin 42^\circ$.

11.96. $\sin\left(2\arccos\dfrac{1}{4}\right)$.

11.97. $\sin\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{4}\right)$.

11.98. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg} 3\right)$.

11.99. (ЕГЭ, 2002, B6 – *демоверсия*)
Найдите значение выражения $2\sqrt{5}\operatorname{ctg}\left(\arcsin\dfrac{2}{3}\right)$.

11.100. $\sin(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3)$.

11.101. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)
Найдите все натуральные n, удовлетворяющие условию
$$\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg}\left(2 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right) \leq \tfrac{2\pi}{n}.$$

11.102. $\arccos(\cos 10)$.

11.103. $\arccos(\sin 4)$.

12 Тригонометрические уравнения

12.1 Сведение к одному аргументу и одной функции

Тригонометрические уравнения часто сводятся к нахождению корней алгебраического уравнения и последующего решения простейших тригонометрических уравнений. При сведении к алгебраическому уравнению вначале необходимо свести к тригонометрическому уравнению с одинаковым аргументом, а затем, не изменяя аргумента, свести к алгебраическому уравнению относительно одной функции синус, косинус, тангенс или котангенс.

12.1. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$

12.2. (МГУ, геологический, 1966, 3(4))
$4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x.$

12.3. $\cos^{10} x + \sin^{10} x = \dfrac{29}{64}.$

12.4. $\sin 3x - \sin 11x = 0.$

12.5. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов, 2007, 4(8))
$\sin^2 11x = \cos^2 17x.$

12.6. (МГУ, мех-мат, 2008, 2(6))

Игорь решал тригонометрическое уравнение и получил ответ

$$(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ \frac{4\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ в конце учебника выглядел иначе:

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ \ \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k,\ \ n, k \in \mathbb{Z}.$$

Правильный ли ответ получил Игорь? Привести пример тригонометрического уравнения с ответом как в учебнике.

12.7. (МГУ, мех-мат, 2010, 3(6))

Найдите наименьшее из положительных значений функции

$$\frac{4}{3\cos^2 x + 2\sin x - 1}.$$

Домашнее задание

12.8. (МГУ, 2011, 2(8))
$(\cos x - \sin x)^2 = 1.$

12.9. $\operatorname{ctg}^2 x = 3.$

12.10. $\cos^2 3x - \sin^2 3x = 1.$

12.11. $3\sin^2 x + 7\cos x - 3 = 0.$

12.12. (МГУ, факультет Гос. управления, 2009, 1(7))
$\cos 2x + 3\sin x + 1 = 0.$

12.13. $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0.$

12.14. (МГУ, географический, май 1999, 1(6))
$3\cos 4x + 5\sin 2x = -1.$

12.15. $\cos x - \cos \dfrac{x}{2} = 2.$

12.16. $\sin \dfrac{x}{4} + \cos \dfrac{x}{2} = 1.$

12.17. (МГУ, ФББ, 2009, 4(9))
$8\cos^2(5x) - 4\cos^2(10x) = 1.$

12.18. (МГУ, биолого-почвенный, 1968, 2(5))
$\cos 4x + 2\cos^2 x = 1.$

12.19. (МГУ, ИСАА, 1998, 1(7))
$\sin^2 x + \sin^2 6x = 1.$

12.20. $\sin 2x = \cos^4 \dfrac{x}{2} - \sin^4 \dfrac{x}{2}.$

12.21. (МГУ, биологический, 1984, 2(5))
$2\cos 2x + \cos^2 \dfrac{x}{2} - 10\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right) + \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2}\cos x.$

12.22. $3 = \dfrac{3}{\sin^2 5x} + \sqrt{3}\operatorname{ctg} 5x.$

12.23. (МГУ, психологический, 2003, 2(5))
$$\sin 3x \sin x = -\frac{1}{8}.$$

12.24. (МГУ, филологический, 1974, 3(5))
$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x.$$

12.25. $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{41}{128}.$

12.26. (МГУ, социологический, филологический, 2007, 5(8))
$$5\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 4\sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) - 1.$$

12.2 Однородные уравнения

Уравнения вида

$$a_n \sin^n x + a_{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + \ldots + a_1 \sin x \cos^{n-1} x + a_0 \cos^n x = 0$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа и сумма показателей степеней при $\sin x$ и $\cos x$ в каждом слагаемом равна n, называются *однородными относительно* $\sin x$, $\cos x$. Такое уравнение при $\cos x \neq 0$ эквивалентно уравнению

$$a_n \mathrm{tg}^n x + a_{n-1} \mathrm{tg}^{n-1} x + \ldots + a_1 \,\mathrm{tg}\, x + a_0 = 0,$$

которое получается из исходного делением обеих частей уравнения на $\cos^n x$.

Некоторые тригонометрические уравнения сводятся к однородным с помощью представления $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.

12.27. $\sin x - 2\cos x = 0.$

12.28. $3\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0.$

12.29. $3\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 8\cos^2 x = 2.$

12.30. $2\sin^3 x - 3\sin x = 2\cos^3 x + \cos x.$

Домашнее задание

12.31. $\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 0.$

12.32. $3\sin x \cos x + \cos^2 x = 2.$

12.33. (ЕГЭ, 2007, С2)

$$\sin^2 x + 6\sin x \sin\frac{x}{2} + 9 = 9\cos^2\frac{x}{2}.$$

12.34. $2\sin^3 x - \sin^2 x\cos x + 2\sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0.$

12.35. (МГУ, почвоведения, 1979, 3(5))

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin 2x = (\sqrt{3}-1)\cos^2 x + 1.$$

12.36. $\sin^2 x(\operatorname{tg} x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3.$

12.37. (МГУ, психологический, 2006, 3(6))

$$\log_2(3|\sin x| - |\cos x|) + \log_2|\cos x| = 0.$$

12.38. (МГУ, мех-мат, 2007, 3(6))

$$3\cos x|3\sin x + \cos x| = \sin x|\cos x - 3\sin x|.$$

12.3 Введение дополнительного угла

При преобразовании выражения вида $a\sin x + b\cos x$ удобно воспользоваться введением дополнительного угла. Пусть числа a и b одновременно не равны нулю. Тогда

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Введем угол φ такой, что

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Такой угол φ существует для любых a и b и таких углов бесконечное множество. Нам достаточно взять один из них, например, при a и b больших нуля $\varphi = \arcsin\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Тогда по формуле синуса суммы двух углов

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x) =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi).$$

12.39. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1.$

12.40. $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x).$

12.41. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2008”, 7(10))
$$2+\cos x=\sqrt{3}\left|\sin\frac{3x}{4}\right|\sin x.$$

12.42. (МГУ, психологический, 1996, 3(5))
Найти область определения функции
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{-6\sin^2 2x-2\sin 2x\cos 2x+8-\sqrt{3}}}.$$

Домашнее задание

12.43. (МГУ, Высшая школа гос. аудита, 2008, 2(9))
$$\cos x-\sin x=1.$$

12.44. (МГУ, экономический, 1984, 2(6))
$$\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}.$$

12.45. (МГУ, биологический, 2005, 2(6))
$$\cos x-\sqrt{3}\sin x=\sqrt{2}.$$

12.46. $\sin 10x+\cos 10x=\sqrt{2}\sin 15x.$

12.47. $\sin 11x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x+\dfrac{1}{2}\cos 7x=0.$

12.48. $3\sin x+4\cos x=5.$

12.49. $2+\cos\dfrac{3x}{2}+\sqrt{3}\sin\dfrac{3x}{2}=4\sin^2\dfrac{x}{4}.$

12.50. (МГУ, геологический, 1979, 3(6))
Найти все значения c, при которых уравнение
$4\sin x+9\cos x=c$ имеет решение.

12.51. (МГУ, филологический, 1994, 4(6))
$$\frac{2}{\pi}\sin x+\cos 19\pi=\cos x.$$

12.52. $5\sin 2x+6\cos 3x=5\sqrt{3}\,\sin\left(2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)-8\sin 3x.$

12.53. (МГУ, геологический, 1981, 6(6))
Показать, что функция $y=\sin^2 x-12\sin x\cos x+3\cos^2 x-2\sqrt[3]{66}$ может принимать неотрицательные значения.

12.4 Симметрические уравнения

Тригонометрический многочлен называется *симметрическим*, если при замене синуса и косинуса одного аргумента местами, многочлен не меняется. Симметрический многочлен может быть сведен к многочлену относительно $\sin x + \cos x$ и $\sin x \cos x$.

Симметрические уравнения решаются с помощью следующей замены $\sin x + \cos x = t$. Тогда из тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ следует, что $(\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin x \cos x = 1$, откуда $\sin x \cos x = \frac{t^2-1}{2}$. В итоге получается алгебраическое уравнение относительно новой переменной t.

12.54. $\sin x + \cos x - \sin x \cos x = 1$.

12.55. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

Домашнее задание

12.56. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)
Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \sin 2x - 4(\cos x + \sin x).$$

12.57. $\sin^3 x + \cos^3 x + 1 = 3 \sin x \cos x$.

12.58. (МГУ, физический, 1967, 3(5))

$$5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}\,(2 + \sin 2x).$$

12.5 Кососимметрические уравнения

Кососимметрический многочлен может быть сведен к многочлену относительно $\sin x - \cos x$ и $\sin x \cos x$.

Кососимметрические уравнения решаются с помощью замены $\sin x - \cos x = t$. Тогда из тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ следует, что $(\sin x - \cos x)^2 + 2 \sin x \cos x = 1$, откуда $\sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$. В итоге получается алгебраическое уравнение относительно новой переменной t.

12.59. $\sin x - \cos x + \sin x \cos x = 1$.

Домашнее задание

12.60. $\sin x \cos x - 6(\sin x - \cos x) - 6 = 0$.

12.61. $3\sin x\cos x + \sin x = 1 + \cos x$.

12.62. (МГУ, географический, 2006, 3(6))

$$2\sin x - \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

12.6 Универсальная тригонометрическая подстановка

Тригонометрические уравнения, содержащие различные тригонометрические функции одного аргумента $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, могут быть сведены к алгебраическому уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ с помощью универсальной тригонометрической подстановки (см. Формулы универсальной тригонометрической подстановки).

12.63. (МГУ, филологический, 2005, 5(7))

$$2 + \sin x = 3\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

12.64. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2006, 2(10))

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2\operatorname{tg} 2x + 3\operatorname{ctg} x.$$ **“Тест”**

Домашнее задание

12.65. $\sin 2x + \operatorname{ctg} x = 2$.

12.66. (МГУ, биологический, 1973, 2(5))

$$2\cos 2x - 1 = (2\cos 2x + 1)\operatorname{tg} x.$$

12.67. (МГУ, химический, 1966, 4(4))

$$3\sin 4x = (\cos 2x - 1)\operatorname{tg} x.$$

12.68. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Для всех значений параметра $a \in (0;\,1)$ решите уравнение

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x = 1.$$

12.69.* $(\cos x - \sin x)\left(2\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\cos x}\right) + 2 = 0$.

12.7 Разложение на множители

12.70. (МГУ, физический, 1998, 1(8))
$\cos 4x - \sin 3x\cos x + \cos 2x = 0.$

12.71. (МГУ, химический, 1979, 1(5))
$\sin 2x + \cos 2x = 1 + \sqrt{6}\sin x.$

12.72. (МГУ, физический, 1970, 1(5))
$\frac{1}{2}(\cos^2 x + \cos^2 2x) - 1 = 2\sin 2x - 2\sin x - \sin x\sin 2x.$

12.73. (МГУ, психологический, 2001, 3(5))
$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0.$

12.74.* (МГУ, психологический, 2006, 6(6))
$9\cos 2x + 9\cos 6x = 36\cos x\cos 3x + 140\sqrt{3}\sin x\sin 2x - 162.$

Домашнее задание

12.75. $\sin 3x - 4\sin x\cos 2x = 0.$

12.76. (МГУ, почвоведения, 1993, 2(5))
$\sin^3 x - \cos^3 x + \sin x - \cos x = 0.$

12.77. (МГУ, химический, 1979, 1(5))
$\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos 2x.$

12.78. (МГУ, химический, ФНМ, 2006, 3(6))
$\cos x + \sin x + \cos 3x + \sin 3x = -\sqrt{6}\cos x.$

12.79. (МГУ, почвоведения, 1973, 3(5))
$(\cos x - \sin x)\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + \sin x = 2\cos^2 x.$

12.80. (МГУ, психологический, 1991, 2(5))
$(\cos x - 1)(2\sin x - \cos 2x - 2) = 2\sin^2 x.$

12.81. (МГУ, психологический, 2001, 3(5))
$3\cos^2 x + 2\cos x - \sin x - 2\sin 2x - 1 = 0.$

12.82. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).$

12.83. $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=3\sin\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{\pi}{8}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{\pi}{8}\right).$

12.8 Отбор корней

В некоторых тригонометрических уравнениях необходимо кроме нахождения корней провести их отбор. Например, необходимо выбрать корни из заданного промежутка, или корни должны удовлетворять ОДЗ уравнения.

12.8.1 Учет ОДЗ

12.84. (МГУ, хим, географ, биолог, психолог, ФББ, ФФМ, ФНМ, физико-химический, 2008, 1(7))

$$\frac{\cos 2x}{1-\sqrt{2}\sin x}=0.$$

12.85. (МГУ, географический, 2004, 2(6))

$$\frac{\sin 3x}{\sin x+\sin 2x}=0.$$

12.86. $\sin 3x\cdot\operatorname{ctg}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0.$

12.87. (МГУ, экономический, 1983, 2(6))

$\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} 5x.$

12.88. (МГУ, геологический, экономический, 1982, 4(6))

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x}=-1.$$

Домашнее задание

12.89. $\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}=0.$

12.90. (МГУ, Московская школа экономики, 2006, 3(7))

$$\frac{\sin 3x}{1+2\cos 2x}=0.$$

12.91. (МГУ, геологический, 2007, 2(8))

$$\frac{\cos 2x + \sin x}{\cos x} = \tfrac{1}{2}\cos x.$$

12.92. (МГУ, географический, 2004, 2(6))

$$\frac{\sin 4x}{\cos x - \cos 3x} = 0.$$

12.93. (МГУ, мех-мат, 1980, 2(5))

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x.$$

“Тест”

12.94. (МГУ, ВМиК, 1983, 2(6))

$$\frac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x\cos x - 1} = 1.$$

12.95. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 11x.$

12.96. (МГУ, экономический, 1983, 2(6))

$$\operatorname{ctg} 5x = \operatorname{ctg} 3x.$$

12.97. (МГУ, почвоведения, май 1996, 4(6))

$$(1 - \cos 8x)\operatorname{tg} x = 6\sin^2 4x \operatorname{ctg} x.$$

12.98. (МГУ, химический, 2001, 3(7))

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x.$$

12.99. (МГУ, геологический, 1982, 4(6))

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x} = 1.$$

12.100. (МГУ, ВМиК, 1978, 2(5))

$$\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\left(\sin 4x\cos 5x - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \times$$
$$\times \left(\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} - \sin 5x\cos 4x\right).$$

12.8.2 Выбор корней из промежутка

12.101. (ЕГЭ, 2012, С1 – *демоверсия*)
Решите уравнение $6\sin^2 x + \cos x - 5 = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $[2\pi;\ 3\pi]$.

12.102. (МГУ, почвоведения, май 2002, 4(7))
Найдите все значения x из интервала $(0;\ 2\pi)$, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $\sin x$ и $\cos(x+\pi)$ равно $\frac{1}{2}$.

12.103. Найдите все корни уравнения $\cos x \cos \dfrac{\pi}{5} + \sin x \sin \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{9\pi}{4}\right]$.

12.104. Найти количество корней уравнения $\cos x - 2\sin x = 1$ на промежутке $\left(0;\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

12.105. (МГУ, ИСАА, 2003, 4(6))
Найти корни уравнения $\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1 = 2(\sqrt{2}+1)\operatorname{ctg} x$,
принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{7\pi}{4}\right]$. **"Тест"**

12.106. (МГУ, мех-мат, март 2004, 1(6))
Найти сумму тангенсов всех $x \in (-\pi;\ \pi)$ таких, что

$$4\sin 2x + 9\cos 2x = 3.$$

12.107. (МГУ, мех-мат, март 2000, 3(6))
Найдите все корни уравнения $\cos x \sin \dfrac{x}{4} + \dfrac{9}{10}\sin x + 2\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{4} - \dfrac{9}{20} = 0$, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2};\ -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Домашнее задание

12.108. Найти все корни уравнения $3\cos 2x - 5\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, принадлежащие отрезку $[\pi;\ 2\pi]$.

12.109. (МГУ, ИСАА, 2001, 2(7))
Найти все решения уравнения $5\sin^2 2x + 8\cos^3 x = 8\cos x$, удовлетворяющие условиям $\dfrac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$.

12.110. (МГУ, ВМиК, 2007, 1(6))
Найдите все решения уравнения

$$2\sin\left(x+\frac{7\pi}{25}\right)\cdot\sin\left(3x+\frac{18\pi}{25}\right)=\cos 4x+2^{\cos\frac{2\pi}{3}},$$

принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{10};\ \dfrac{4\pi}{5}\right]$.

12.111. (МГУ, геологический, 2006, 6(8))
Найдите корни уравнения $\dfrac{\sqrt{3}(\sin 2x+\cos 3x)}{\cos 2x-\sin 3x} = 1$, расположенные в интервале (1; 2).

12.112. (МГУ, тест, мех-мат, 1995, 4(8))
Найти корни уравнения $\sin 2x + 1 + \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, лежащие в интервале $\left(\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

12.113. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 4(8))
Найти все решения уравнения $6\cos\dfrac{15\pi}{4}\cdot\cos\dfrac{x}{2} - \cos x = 3$, принадлежащие отрезку $[-2;\ 10{,}99]$.

12.114. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 5(7))
Найти все значения $x \in \left[\dfrac{2\pi}{3};\ 3\pi\right]$, удовлетворяющие уравнению

$$1+\cos 2x = 4\sin x.$$

12.115. (МГУ, геологический, МШЭ, 2008, 4(8))
Найти корни уравнения $\dfrac{\sqrt{3}\sin 2x - 2\sin(\frac{\pi}{3}-x) - \cos 2x}{\cos(x-\frac{7\pi}{3})} = 0$, расположенные на промежутке $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

12.116. (МГУ, филологический, март 2003, 2(6))
Сколько корней имеет уравнение $\sin 5\pi x + \cos 2\pi x = 0$ на отрезке $[-2;\ 0]$? **"Тест"**

12.117. Найдите все решения уравнения
$\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$, удовлетворяющие условию $0{,}4\pi < x < \frac{6\pi}{7}$.

12.118. (МГУ, психологический, 2004, 3(5))
Решить уравнение $\sqrt{5}\cos x \operatorname{ctg} x - \sqrt{15}\cos x - \sqrt{15}\operatorname{ctg} x = 0$ и найти сумму его корней, принадлежащих отрезку $[-\pi;\, \pi]$. **"Тест"**

12.8.3 Уравнения с модулем

12.119. (МГУ, почвоведения, 1977, 3(5))
$$|\cos x| = \cos x - 2\sin x.$$

12.120. (МГУ, мех-мат, 2006, 4(6))
$$|1 - 2\sin x + \cos x| + 2\sin x + 1 = \cos 2x.$$

12.121. (МГУ, "Ломоносов-2011", заочный тур, 5(10))
Найти все решения уравнения $|\sin 2x - \cos x| = \big||\sin 2x| - |\cos x|\big|$ на интервале $(-2\pi;\, 2\pi]$.

12.122. (МГУ, "Ломоносов-2009", 6(9))
Сколько решений на отрезке $[0;\, \pi]$ имеет уравнение
$$5\sin x + 4 = |5\cos x + 2|?$$

12.123. (МГУ, "Ломоносов-2007", 9(10))
Найти все значения $x \in (0;\, \pi]$, удовлетворяющие уравнению
$$|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| = \operatorname{tg} 3x.$$

12.124. Найдите все решения уравнения $|\cos(2x - 3)| = \sin x$, удовлетворяющие условию $|x| \le 2\pi$.

Домашнее задание

12.125. (ЕГЭ, 2005, С1 – *демоверсия*)
$$|\sin x| = \sin x \cdot \cos x.$$

12.126. (МГУ, биологический, 1982, 2(5))
$$4|\sin x| + 2\cos 2x = 3.$$

12.127. (МГУ, почвоведения, 1977, 3(5))
$$|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}.$$

12.128. (МГУ, почвоведения, 1977, 3(5))

$$|\operatorname{ctg} x| = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}.$$

12.129. (МГУ, почвоведения, май 2004, 4(6))

$$|\cos x - 2\sin x| + \cos x = 0.$$

12.130. (МГУ, экономический, 2008, 2(7))

$$\frac{|\sin x|}{\operatorname{tg} x} = \cos 3x.$$

12.131. (МГУ, экономический, 1995, 2(6))

$$2|\sin x| + \log_{\operatorname{tg} x}\left(-\frac{|\cos x|}{\sin x}\right) = 0.$$

12.132. (МГУ, мех-мат, 1990, 2(6))

$$2^{|x-2|\sin x} = (\sqrt{2})^{x|\sin x|}.$$ **"Тест"**

12.133. (МГУ, факультет Гос. управления, 2007, 2(7))

$$\left|\left|\sin x - \frac{1}{4}\right| - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{3}\left(\sin x + \frac{1}{4}\right).$$

12.134. На отрезке $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ найти все значения x, удовлетворяющие уравнению $|\cos x| + \sin(2x+3) = 0$. **"Тест"**

12.8.4 Иррациональные уравнения

12.135. (МГУ, почвоведения, 1982, 2(5))

$$\sqrt{3 + 4\cos 2x} = \sqrt{2\cos x}.$$

12.136. (МГУ, мехмат, 1982, 3(5))

$$\sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x = 0.$$

12.137. (МГУ, мех-мат, март 1999, 4(6))

$$\sqrt[8]{\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}} + \sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{2} - 2x\right)} = 0.$$

12.138.* $\sin x\sqrt{\cos\frac{3x}{4}} = 0.$

12.139.* (МГУ, географический, май 2000, 6(6))

$$\sqrt{\cos 2x + 2\sin^2 x + \sin x + 1} - \sqrt{\frac{\sin x}{\sin x + 1}} - 1 = 0.$$

Домашнее задание

12.140. (МГУ, психологический, 1987, 4(6))

$$\sqrt{\frac{3}{4} - \cos x} = \sqrt{\frac{3}{4} - \cos 3x}.$$

12.141. (МГУ, почвоведения, 2004, 5(7))

Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству $0 \le x < \pi$ и являющиеся решениями уравнения

$$\sqrt{\operatorname{tg} 3x} = \sqrt{-\operatorname{tg} x}.$$

12.142. (МГУ, почвоведения, 1996, 4(6))

Найти все решения уравнения $\sqrt{x + \sin x} = \sqrt{x - \sin 2x}$, удовлетворяющие неравенству $-2\pi < x < 2\pi$. **"Тест"**

12.143. (МГУ, геологический, 2005, 4(8))

Найти наименьший корень уравнения

$$\sqrt{\cos 2x + x - 11} = \sqrt{x - 15 - 5\cos x}.$$

12.144. (МГУ, химический, 1994, 3(5))

$$\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}.$$

12.145. (МГУ, мех-мат, 1982, 3(5))

$$\sqrt{2\cos x \sin 2x} = \sqrt{5\sin x + 4\sin 2x}.$$

12.146. (МГУ, экономический, 1979, 1(5))

$$\sqrt{10 - 18\cos x} = 6\cos x - 2.$$

12.147. (МГУ, экономический, 1979, 1(5))

$$\sqrt{37 - 48\operatorname{ctg} x} = 8\operatorname{ctg} x - 5.$$

12.148. (МГУ, психологический, 2005, 3(6))

$$\sqrt{2\cos^2 x - \sqrt{3}} + \sqrt{2}\sin x = 0.$$

12.149. (МГУ, ВМиК, 2003, 2(6))
$\sqrt{\sin x \cdot \sin 3x} = \cos x.$

12.150. (МГУ, ВМиК, отделения бакалавров, 2005, 3(7))
$\sqrt{6 \operatorname{ctg} x - 8} = \dfrac{1}{\sin x}.$

12.151. (МГУ, ВМиК, 2005, 2(6))
$\sqrt{\operatorname{ctg} x + 1} = -\sqrt{15} \cdot \sin x.$

12.152. (МГУ, ВМиК, апрель 1999, 3(6))
$\sqrt{\dfrac{1 + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{8}} = -\sin x \cos x.$

12.153. (МГУ, географический, 1972, 5(5))
$2\sqrt{2} \sin x + 3\sqrt{2 - 2\cos 2x} = 3 \sin 2x.$

12.154. $\sqrt{\dfrac{1 - 4\cos^2 3x}{8\cos(2x - \frac{2\pi}{3})}} = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right).$

12.155. (МГУ, ФНМ, апрель 2004, 5(6))
$\sqrt{\sin x + 2\cos 2x} - \sqrt{2} \cos 2x = 0.$

12.156. (МГУ, психологический, 1979, 1(5))
$\sqrt{9 - 6\sqrt{2} - (12 - 8\sqrt{2}) \cos x} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \cos x + 1.$

12.157. (МГУ, экономический, 1987, 1(6))
$(2\sin x - 1)\sqrt{\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)} = 0.$ **"Тест"**

12.158. (МГУ, мех-мат, 1997, 1(6))
$(\sqrt{3}\, \sin x + \cos x - \sqrt{2})\sqrt{\operatorname{tg} x} = 0.$

12.159. (МГУ, мех-мат, 1995, 3(6))
$\sqrt{\sin 3x} \cdot \operatorname{tg}\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 0.$

12.160. (МГУ, ВМиК, апрель 1996, 3(6))
$\sqrt{12 \sin x - \dfrac{9}{2} \cos 2x + \dfrac{17}{2}} = \dfrac{9}{8} + 4 \sin x + \dfrac{1}{2} \cos^2 x.$

12.161. (МГУ, ВМиК, 1993, 2(6))
На отрезке $0 \le x \le \pi$ найти все значения x, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{1 + 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x}$.

12.162.* $\cos x \sqrt{\sin \dfrac{3x}{4}} = 0$.

12.163.* (МГУ, ВМиК, Олимпиада “Абитуриент-2005”, 6(6))
$$12\cos 2x + 8|\sin x|\sqrt{3 + |\sin x| - 3\cos 2x} = 11.$$

12.8.5 Показательные и логарифмические уравнения

12.164. (МГУ, химический, 1989, 3(5))
$$\log_2(3\sin x - \cos x) + \log_2(\cos x) = 0.$$ **“Тест”**

12.165. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2005”, 4(10))
$$\log_4(4\sin^2 2x) = 2 - \log_2(-2\operatorname{tg} x).$$

12.166. (МГУ, ВМиК, 1990, 3(6))
$$3 \cdot 64^{2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} - 392 \cdot 8^{\sin 2x} + 16 = 0.$$

12.167.* (МГУ, ВМиК, апрель 1995, 3(6))
Найти все корни уравнения $2^{\cos x} + 5 \cdot 2^{-\cos x} = 2\sqrt{6}$, удовлетворяющие неравенствам $\frac{\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{3}$.

12.168. (МГУ, ИСАА, 2008, 5(8))
Найти корни уравнения $\cos \dfrac{4\pi}{x} + \sin \dfrac{8\pi}{x} = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{x}\right)$, удовлетворяющие неравенству $\log_{x+2}(x^2 - 2x + 4) \le 1$.

Домашнее задание

12.169. (МГУ, социологический, 2001, 2(6))
$$\log_{\sin x}(3\sin x - \cos 2x) = 0.$$

12.170. (МГУ, Московская школа экономики, 2007, 3(8))
$$\log_{(-2\cos x)}(3\sin x - \cos 2x) = 0.$$

12.171. $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$.

12.172. (МГУ, химический, 1989, 3(5))
$$\log_2(3\cos x - \sin x) + \log_2(\sin x) = 0.$$ **“Тест”**

12.173. (МГУ, мех-мат, 1978, 2(5))
Найти все решения уравнения $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3}{4};\ 1\right]$. **“Тест”**

12.174. (МГУ, химический, заочный тур, 2000, 3(12))
$$\log_{|\sin x|}(x^2 - 14x + 73) \geq \frac{2}{\log_5 |\sin x|}.$$

12.175. (МГУ, экономический, 1994, 3(5))
$$\log_3((x+10)\cos x) = \log_3\left(\frac{x+10}{\cos x}\right).$$

12.176. (МГУ, химический, физико-химический, ФНМ, ФФМ, ФБиБ, географический, психологический, 2007, 6(8))
$$\log_{\cos x}(\cos^2 x + \sin^2 x) - 2\sin^2 x + 5\sin 2x = 0.$$

12.177. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2006, 4(8))
$$\log_{|\cos\frac{x}{2}|}\left|1 - 2\cos\frac{\pi}{6}\right| = \log_{\cos|\frac{x}{2}|}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}.$$

12.178. (МГУ, геологический, 1995, 5(8))
$$\left(2\sqrt{3}\sin(\pi x + 3\pi) - \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)\right)\log_2(4 - x^2) = 0.$$ **“Тест”**

12.179. (МГУ, ВМиК (отд. бакалавров), 2006, 3(7))
$$\log_{\frac{6-|x-3|}{9-\pi}}(1 - \sin 2x - 2\sin x) = \log_{\frac{6-|x-3|}{9-\pi}}(-\cos x).$$

12.180. (МГУ, ВМиК (отд. специалистов), 2006, 2(6))
$$\log_{\frac{13-|2x-1|}{12}}(\sin 2x - 2\sin x + 1) = \log_{\frac{13-|2x-1|}{12}}(\cos x).$$ **“Тест”**

12.8.6 Дополнительные условия

12.181. $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3} + \sin x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

12.182. (МГУ, геологический, 1982, 4(6))

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\cos x\right) = -\frac{1}{2}.$$

12.183. Найти все решения уравнения $\operatorname{tg}^2 x = 3\sin x$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{ctg} x \leq 0$.

12.184. (МГУ, химический, 1977, 5(5))
Найти корни уравнения
$$\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{9x}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{8}-\frac{3x}{2}\right),$$
удовлетворяющие неравенству $\sin\dfrac{3x}{2} < 0$.

Домашнее задание

12.185. Найдите все корни уравнения $2\cos 2x - 4\cos x = 1$, удовлетворяющие условию $\sin x \geq 0$.

12.186. (МГУ, экономический, 2007, 2(7))
Найдите все решения уравнения $\cos 3x = \sin x$, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам: $\sin x \geq 0$, $\cos x \leq 0$.

12.187. (МГУ, экономический, 1985, 3(5))
Найти все корни уравнения $(1+\operatorname{tg}^2 x)\sin x - \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x < 0$.

12.188. (МГУ, геологический, 1982, 4(6))

$$\sin\left(\frac{11\pi}{8}\cos x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

12.189. (МГУ, экономический, 1989, 4(6))
Найти все решения уравнения $\operatorname{tg}(4\sin x) = \sqrt{3}$, удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$. **"Тест"**

12.190. (МГУ, мех-мат, март 1998, 2(6))
Найдите все решения уравнения $2\cos\dfrac{x}{3}+2(\sqrt{5}-1)\sin\dfrac{x}{6} = 2-\sqrt{5}$, удовлетворяющие условию $\cos\dfrac{3x}{4} < 0$.

12.191. (МГУ, экономический (отд. экономики), 2006, 3(7))
Найдите все значения x из интервала $(8;\ 12)$, для которых справедливо равенство $2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\sin x = \sqrt{6-6\cos\frac{14\pi}{5}}$.

12.192. (МГУ, химический, 1977, 5(5))
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3x}{2}\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$
удовлетворяющие условию $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)<0.$ **"Тест"**

12.9 Исследование области изменения функций

12.193. (ЕГЭ, 2005, В8 – *демоверсия*)
Найдите наибольшее целое значение функции
$y=25\cdot 3^{\cos 4x\cos 3x+\sin 4x\sin 3x-2}$.

12.194. (МГУ, почвоведения, май 2001, 3(6))
$$x^2-\cos 2x^2+1=0.$$

12.195. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2011, 2(10))
Решите неравенство $\sin x\cdot\sin 1755x\cdot\sin 2011x\geq 1$.

12.196. (МГУ, ВМиК, 2010, 3(6))
$$\operatorname{tg}^2(5x+\sin^2 y)+\left|\frac{5x+\cos 2y}{3}+\frac{3}{5x+\cos 2y}\right|=4\cos^2\frac{7\pi}{4}.$$

12.197. (МГУ, психологический, 1993, 3(5))
Найти все решения уравнения $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin 3x=\cos 3x-\sqrt{2}$ на отрезке $[-2\pi;\ 2\pi]$.

12.198. $\sin^7 x+\cos^{12} x=1.$

12.199. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=3.$

12.200.* $\cos x\cdot\sin 7x+\sin x=\frac{3}{2}.$

12.201. (ФМШ, 1996, 4(6))
$$\sin x\cdot\cos 4x=1.$$

12.202. (ФМШ, 1990, 3(6))
$$x^2-2x\sin(xy)+1=0.$$

12.203.* $\sin^2 x + \dfrac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x.$

12.204. (МГУ, химический, 1991, 4(5))
$4\cos^4 x = \cos 2x + 2\cos^2 x \cos 8x.$

12.205. (МГУ, психологический, 2002, 5(6))
$\cos 6x - 3\cos 5x + \cos 4x - 4\cos x + 5 = 0.$

12.206. $\sin^6 x \cdot \cos^8 x = \dfrac{1}{50}.$

12.207.* $\lg(\sin x - 0{,}6) + \lg(\cos x - 0{,}7) + 1 = 0.$

Домашнее задание

12.208. $\sin x + \sin 9x = 2.$

12.209. (ЕГЭ, 2002, С1 – *демоверсия*)
Найдите количество целых чисел, принадлежащих множеству значений функции $f(x) = 16\log_{\frac{1}{16}} \dfrac{\sin x + \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$

12.210. (ЕГЭ, 2002, С2) **“Тест”**
Найдите множество значений функции $y = \sin 2x$, если $x \in [\operatorname{arctg} 0{,}5;\ \operatorname{arctg} 3]$.

12.211. (ЕГЭ, 2002, С2) **“Тест”**
Найдите множество значений функции
$$y = \frac{3}{\pi}\arccos\left(\sqrt{0{,}125}(\cos x - \sin x)\right).$$

12.212. (МГУ, почвоведения, май 2001, 3(6))
$\dfrac{1}{\cos^2 z} = 1 - z^2.$

12.213. (МГУ, ИСАА, 1993, 5(6))
$\sin^2 x + 3x^2\cos x + 3x^2 = 0.$

12.214. (МГУ, химический, 2003, 2(6))
$\cos^2 8x + \sin^2 x = 2\sin^2 x \cdot \cos^2 8x.$

12.215. (МГУ, физический, 1969, 2(5))
$\cos^2 x + \cos\dfrac{x}{2} \cdot \cos^2 x - \cos\dfrac{x}{2} - 1 = 2\left(\sin\dfrac{x}{4} - \cos x\right)^2.$

12.216. $\sin^6 x + \cos^{13} x = 1.$

12.217. $\sin x + \cos 3x + \sin 5x = -3.$

12.218.* $3\sin x + 4\cos 3x\cos x + 2\sin 5x = 7.$

12.219. $\sin x \cdot \cos 6x = 1.$

12.220. $\sin x \cdot \cos 7x = 1.$

12.221. $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x(\sin y + \cos y) + 2 = 0.$

12.222. $1 + \cos 2x\cos 3x = \dfrac{1}{2}\sin^2 3x.$

12.223. $4\cos^2 x - 4\cos^2 3x\cos x + \cos^2 3x = 0.$

12.224. $5\cos^5 x - 3\sin^3 x = 5.$

12.225. (МГУ, психологический, 2002, 5(6))
$\cos 6x - 5\cos 5x + \cos 4x - 4\cos x + 7 = 0.$

12.226.* $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x.$

12.227. $\sin(\cos 3x) = 0{,}95.$

12.228.* (МГУ, ВМиК, апрель 2004, устный)
$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\ \operatorname{ctg}^2 x\ \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y).$

12.229.* $\left(\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \dfrac{1}{2}\sin y.$

12.230. $\sin^n x + \dfrac{1}{\cos^m x} = \cos^n x + \dfrac{1}{\sin^m x}$, m, n — натуральные нечетные числа.

12.10 Разные задачи

12.231. (МГУ, тест, мех-мат, 1998, 5(9)) **"Тест"**
Укажите, между какими корнями уравнения
$2\operatorname{tg}\alpha\cdot(\operatorname{tg}^2\alpha+5)=3(3\operatorname{tg}^2\alpha+1)$ заключено число $-\frac{21}{2}$.

12.232. (МГУ, почвоведения, 2006, 5(7))
Найти наименьшее положительное число α, при котором синус α градусов равен синусу α радиан.

12.233. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, $0\le\alpha,\beta,\gamma$, то из условия $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ следует, что один из углов α,β,γ равен $\frac{\pi}{2}$.

12.234. Найти все пары чисел x и y, которые удовлетворяют уравнению: $8\cos x\cos y\cos(x+y)+1=0$.

12.235. (МГУ, мех-мат, 1965)
Найти все пары чисел x и y, которые удовлетворяют уравнению: $\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\dfrac{3}{2}$.

12.236. Доказать, что если число α иррационально, то функция $\cos\alpha x+\cos x$ не является периодической.

Домашнее задание

12.237. (МГУ, географический, май 2003, 1(6))
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{2}-4x\right)+\operatorname{tg}x=\sqrt{3}\left(1-\frac{\operatorname{tg}4x}{\operatorname{ctg}x}\right).$$

12.238. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2006", 2006, 3(10))
$$\cos\left(x^2+x\right)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0.$$

12.239. (МГУ, тест, мех-мат, 1998, 5(9)) **"Тест"**
Укажите, между какими корнями уравнения
$3\operatorname{tg}\alpha\cdot(\operatorname{tg}\alpha-2)^2=(2\operatorname{tg}\alpha-1)^2-7\operatorname{tg}\alpha+5$ заключено число $-\frac{31}{3}$.

12.240. Найти ближайший к 10 корень уравнения
$$\cos 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=18\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right).$$

12.241. Найти все пары чисел x и y, которые удовлетворяют уравнению: $\cos(x-y) - 2\sin x + 2\sin y = 3$.

12.242. $8\sin x \sin y \cos(x+y) = 1$.

12.243. $\sin x + \sin y + \cos(x+y) = \dfrac{3}{2}$.

12.244. $\cos x + \cos y + \cos(x+y) + \dfrac{3}{2} = 0$.

12.245.* $\sin x + \sin y + \sin(x+y) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

12.246.* Доказать непериодичность функции $f(x) = \cos\sqrt{|x|}$.

12.247. (МГУ, экономический, 2000, 7(7))
Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на отрезке $\left[\dfrac{1}{6}; 6\right]$ и удовлетворяет на этом множестве условиям

$$\frac{1}{\cos^2 f(x) - 0{,}5} - 12\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{10}{x} \quad \text{и} \quad 0 \le f(x) \le \frac{\pi}{4}.$$

Решите неравенство $f(x) \le \dfrac{\pi}{8}$.

12.11 Тригонометрическая замена в алгебраических уравнениях

12.248.* (МГУ, химический, заочный тур, 2000, 5(12))

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}.$$

12.249.* (МГУ, геологический, 1981, 6(6))

$$|x + \sqrt{1-x^2}| = \sqrt{2}(2x^2-1).$$

12.250.* (МГУ, биологический, 1985, 5(5))
Сколько корней на отрезке $[0; 1]$ имеет уравнение

$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1) = 1.$$

Домашнее задание

12.251.* (МГУ, эконом., менеджмент, апрель 2003, 4(5))
$$\frac{2}{3}x \cdot \sqrt{1 - \tfrac{x^2}{9}} + \tfrac{2}{9}x^2 - \tfrac{\sqrt{2}}{3}x - 1 = 0.$$

12.252. (МГУ, геологический, 1981, 6(6))
$$\sqrt{\frac{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}{2}} + 2x^2 = 1.$$

12.253.* $|2x - \sqrt{1 - 4x^2}| = \sqrt{2}(8x^2 - 1)$.

12.254.* $1 + x^3 = (x^2 + 3x - 1)\sqrt{1 - x^2}$.

12.255.* (МГУ, биологический, 1985, 5(5))
Сколько корней на отрезке $[0;\, 1]$ имеет уравнение
$$8x(1 - 2x^2)(3x - 4x^3) = 1.$$

12.12 Обратные тригонометрические функции

12.256. $2\arcsin x = \arccos x$.

12.257. $2\arccos x = \arccos(x - 1)$.

12.258. $\sin(5\,\mathrm{arctg}\,3x) = 1$.

12.259. (МГУ, географический, 2001, 5(6))
$$4\arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \frac{6\pi}{x}.$$

12.260. (МГУ, тест, мех-мат, 1997, 4(10))
$$\sqrt{4x^2 + 4x + 3}\cdot\mathrm{arctg}(2x+1) + \sqrt{x^2 - 4x + 6}\cdot\mathrm{arctg}(2-x) = 0.$$

12.261.* (МГУ, тест, мех-мат, 2004, 7(10))
Найти количество корней уравнения
$$\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\,\sqrt{13\pi^2 + 12x\pi - 12x^2}\right) = \arcsin\left(\sin\sqrt{\tfrac{13}{4}\pi^2 + 3x\pi - 3x^2}\right).$$

Домашнее задание

12.262. $2\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} x$.

12.263. $2\arccos x = \arcsin x$.

12.264. $2\arccos\dfrac{1}{x} = \arccos\dfrac{1-x}{x}$.

12.265. $\arcsin\dfrac{x}{2} - \arcsin x + \dfrac{\pi}{3} = 0$.

12.266. (МГУ, почвоведения, 2005, 2(6))
$\sin(\sqrt{3}\arcsin x) = 1$.

12.267. (МГУ, ВМиК, отделения бакалавров, 2005, 4(7))

$$\begin{cases} \arccos\dfrac{x+y}{4} = \arccos\dfrac{5xy}{24}, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

12.268. (МГУ, географический, 2001, 5(6))

$$2\arcsin(3^x - 8) - 3\arccos(11^x - 120) = \frac{2\pi}{x}.$$

12.269. (МГУ, биологический, ФББ, ФФМ, 2006, 4(6))

$$9^{\arcsin(2x+1)} + \log_3(2\arcsin(2x+1)) - 3^{\arccos(6x+3)} + \log_{\frac{1}{3}}\arccos(6x+3) = 0.$$

12.270. (МГУ, географический, 2006, 6(6))
Найти все значения параметра c, при каждом из которых число решений уравнения $2x\arcsin(\sin x) = c\cdot 3^{\log_3 x} + 3$ конечно.

12.271.* (МГУ, социологический, 2008, 7(7))
Найдите наименьшее и наибольшее значения параметра a, при которых уравнение $\arcsin(ax) = 3\arccos x + \dfrac{\pi}{6}$ имеет хотя бы одно решение.

12.272.* (МГУ, ФНМ, май 2000, 6(6))
$x^2 = \arcsin(\sin x) + 10x$.

12.13 Тригонометрические системы

12.273. $\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

12.274. $\begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{1}{2}, \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ **"Тест"**

12.275. $\begin{cases} \cos 2y = \cos y, \\ \sqrt{x^2 - 2x} = 2 \sin y. \end{cases}$

12.276. (МГУ, ВМиК, 1973, 1(5))

$$\begin{cases} 2 \sin x \sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \sin y \cos x = 2 \cos^2 y \sin x. \end{cases}$$

12.277. (МГУ, ВМиК, Олимпиада "Абитуриент-2005", 2(6))

$$\begin{cases} \sin 2(x + y) = 1, \\ xy = 9. \end{cases}$$

12.278. (МГУ, мех-мат, 1981, 2(5))

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cdot \cos y = 0, \\ 2 \sin^2 x - \cos 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

12.279.* $\begin{cases} \sin(y - 3x) = 2 \sin^3 x, \\ \cos(y - 3x) = 2 \cos^3 x. \end{cases}$

Домашнее задание

12.280. (МГУ, факультет Гос. управления, 2005, 4(7))

$$\begin{cases} \sin x - \sin 1 = 0, \\ \cos x - \cos 1 = 0. \end{cases}$$

12.281. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

12.282. (МГУ, географический, 2005, 1(6))

$$\begin{cases} 12 \sin^2 x - \sin^2 y = 3, \\ 6 \sin x + \cos y = -2. \end{cases}$$

12.283. $\begin{cases} \sqrt{\cos x} \cdot \sin 2y = 0, \\ \sin 2x + \cos y = 0{,}5. \end{cases}$

12.284. (МГУ, географический, 1987, 4(5))

Найти все решения системы $\begin{cases} \sin(2x + y) = 0, \\ \cos(x + y) = 1, \end{cases}$

удовлетворяющие условиям $-\pi \le x \le \pi$, $-2\pi \le y \le -\pi$.

12.285. (МГУ, психологический, 1999, 3(6))

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \sin y = \frac{\sqrt{6}}{4}, \\ \cos x \ge 0. \end{cases}$$

12.286. (МГУ, филологический, 1977, 2(5))

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 5 - 2\sqrt{6}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

12.287. (МГУ, филологический, 2000, 4(6))

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$$

12.288. (МГУ, мех-мат, 1993, 3(6))

$$\begin{cases} (\sin y - \cos x + 1)(\operatorname{tg}^2(x + \frac{\pi}{6}) + \operatorname{tg}^2(y + \frac{2\pi}{3})) = 0, \\ (\cos x + \sin y)(2 + \sin 2y + \cos y) = 0. \end{cases}$$

12.289. $\begin{cases} \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y, \\ x - y = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$

12.290. (МГУ, физический, 1967, 3(5))

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 3, \\ |x - y| = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

12.291. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x + y), \\ |x| + |y| = 1. \end{cases}$

12.292.* $\begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = 3(\sin x + \sin y), \\ \cos 2x + \cos 2y = \cos x + \cos y. \end{cases}$

13 Тригонометрические неравенства

13.1 Тригонометрический круг

Решение тригонометрических неравенств удобно проводить с использованием тригонометрического круга, отмечая на нем дугами решения неравенств. При выписывании ответа надо правильно указывать концы промежутков. При решении неравенств с обратными тригонометрическими функциями можно воспользоваться графиками обратных тригонометрических функций.

13.1. $\cos x > \dfrac{1}{2}$.

13.2. $\cos x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

13.3. $\cos x < \dfrac{1}{2}$.

13.4. $\cos x < \dfrac{1}{4}$. **"Тест"**

13.5. $\sin x > -\dfrac{1}{2}$.

13.6. $\sin x < \dfrac{1}{3}$.

13.7. $\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$.

13.8. $\operatorname{ctg} x \geq -3$.

13.9. $\cos x < \cos 6$.

13.10. $\arccos x < \arccos \dfrac{1}{3}$.

13.11. $\operatorname{arctg} x > -\dfrac{\pi}{3}$.

13.12. $\sin(\cos x) > 0$.

13.13. $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$.

13.14. $\sin x + \sqrt{3}\cos x < 0$.

13.15. (МГУ, физический, 1966, 1(5))
$2\cos 2x + \sin 2x \geq \operatorname{tg} x.$

13.16. $\sqrt{3\sin x + 1} > 4\sin x + 1.$ **"Тест"**

13.17. (МГУ, ВМиК, отделения бакалавров, 2008, 3(6))
$\sqrt{1+\sin 2x} + |\cos x| \leq \sin x.$

13.18. (МГУ, мех-мат, 2005, 4(6))
$$\frac{3 - x - \sqrt{5 - x^2}}{\cos\frac{2x-7}{4} - \cos\frac{x-5}{4}} \geq 0.$$

13.19.* (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2006", 10(10))
$4(1 - \operatorname{tg} x)^{2004} + (1 + \operatorname{tg} x)^{2006} \geq 2^{2006}.$

Домашнее задание

13.20. $\cos x > \dfrac{1}{4}.$

13.21. $\cos x < -\dfrac{1}{2}.$

13.22. $\sin x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

13.23. $\sin x > -\dfrac{1}{3}.$

13.24. $\operatorname{tg} x \geq 2.$

13.25. $\operatorname{ctg} x \leq \sqrt{3}.$

13.26. $\arcsin x \leq 5.$

13.27. $\operatorname{arcctg} x > 2.$

13.28. $4(\arccos x)^2 > 1.$ **"Тест"**

13.29. $\sin x^2 < \dfrac{1}{2}.$

13.30. $4\sin x < 3\cos x.$

13.31. (МГУ, экономический, 1971, 3(5))
$11\sin x + \cos 2x - 6 \geq 0.$

13.32. $20\sin^2 x + 9\cos x < 21.$

13.33. $\sin x \geq \cos 2x.$ **"Тест"**

13.34. $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x - 1 \geq 0.$

13.35. (МГУ, биолого-почвенный, 1971, 4(5))
$2\cos 8x \geq 3 + 4\sin 4x.$

13.36. (МГУ, биолого-почвенный, 1970, 5(5))
$2\sin^2 2x + 3\cos 2x < 0.$

13.37. (МГУ, химический, 1992, 2(5))
$\sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}.$

13.38. (МГУ, ВМиК, 1971, 2(5))
Найти все решения неравенства $\sqrt{\sin 2x} < \cos x - \sin x$, удовлетворяющие условию $|x| < \pi$.

13.39. (МГУ, ВМиК, 2000, 1(6))
$$\sin x \sin |x| \geq -\frac{1}{2}.$$

13.40. (МГУ, ВМиК, 2008, 3(6))
$\sqrt{1 - \sin 2x} + |\sin x| \leq \cos x.$

13.41. (МГУ, ИСАА, 1994, 4(6))
$2\sin x - 1 \leq \sqrt{6\sin^2 x - 6\sin x - 12}.$

13.42. $\sqrt{3 - 4\cos^2 x} > 2\sin x + 1.$

13.43. (МГУ, мех-мат, 1966, 2(5))
$5 + 2\cos 2x \leq 3|2\sin x - 1|.$ **"Тест"**

13.44. (МГУ, мех-мат, 1968, 3(6))
$2\operatorname{tg} 2x \leq 3\operatorname{tg} x.$ **"Тест"**

13.45. (МГУ, почвоведения, 2001, 5(6))
$2\log_\pi(\sin x)\log_\pi(\sin 2x) - \log_\pi^2(\sin 2x) \leq \log_\pi^2(\sin x).$

13.46. (МГУ, ВМиК, Олимпиада “Абитуриент-2006”, 4(6))
Найдите все решения неравенства $\operatorname{tg} x > \dfrac{9 - 3\cos 2x}{3\sin 2x - 2}$, удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{8} \le x < \frac{\pi}{2}$.

13.47. (МГУ, тест, мех-мат, 1996, 6(8))

$$\frac{\sqrt[6]{x^3 - 6x^2 + 9x}}{\cos x - \sin x} \ge 0.$$ **“Тест”**

13.48. $\cos^3 x \sin 3x + \cos 3x \sin^3 x < \dfrac{3}{8}$.

13.49. (МГУ, ВМиК, 1995, 4(6))

$$\log_{\cos x} \cos^2 x \ge \log_{\cos x - \frac{1}{2}} \left(\cos^2 x - \cos x - x^2 - 14x - \frac{51}{4}\right).$$

13.50. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)
Постройте график функции

$$f(x) = \sqrt{2\cos x + 2\sqrt{2\cos x - 1}} + \sqrt{2\cos x - 2\sqrt{2\cos x - 1}}.$$

13.51.* (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

$$(32\sin^8 x)^{-2} + 4\sin^6 x \le 1 - \sin^4 x.$$

13.2 Метод интервалов на тригонометрическом круге

13.52. $\sin 2x > \cos x$.

13.53. $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x \le 0$. **“Тест”**

13.54. (МГУ, мех-мат, 1971, 2(5))
Найти все x из отрезка $0 \le x \le \pi$, удовлетворяющие неравенству

$$\sin 2x - \cos x + \sqrt{2}\sin x > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Домашнее задание

13.55. (МГУ, геологический, 1970, 3(5))
Найти все значения x, удовлетворяющие неравенствам
$\sin 5x + \sin x > 0, \;\; 0 < x < 2\pi$.

13.56. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$.

13.57. (МГУ, химический, 1972, 5(5))

$$(\cos x - \cos 5x)(2\sin x + 3\cos x + 4) > 0.$$

13.58. $2\sin x \sin 2x \sin 3x < \sin 4x$.

13.3 Доказательство неравенств

В задачах №№ 13.59 – 13.65 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Доказать неравенства:

13.59. $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le \dfrac{1}{8}$.

13.60. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \ge -\dfrac{3}{2}$.

13.61.* $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Домашнее задание

13.62. $\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2} \le \dfrac{1}{8}$.

13.63. $\sin\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{\beta}{2} + \sin\dfrac{\gamma}{2} \le \dfrac{3}{2}$.

13.64. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \dfrac{3}{2}$.

13.65.* $\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2} \le \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

13.66. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2008, 4(6))
Какое наибольшее значение может принимать выражение $\cos x + \cos y + \cos z$ при условии $\sin x + \sin y + \sin z \ge \sqrt{5}$?

13.4 Обратные тригонометрические функции

13.67. $\operatorname{arctg} x > \operatorname{arcctg} x$.

13.68. (МГУ, мех-мат, тест, 2003, 5(10))
$\arccos(4x-4) > \arccos(-x)$.

13.69. $\arcsin(\sin x) < \arccos(\cos x)$.

13.70. $\arccos\dfrac{x}{\sqrt{10}} \ge \operatorname{arctg} 3x$.

Домашнее задание

13.71. $\arcsin x > \arccos x$.

13.72. $\operatorname{arctg} x < \operatorname{arcctg} x - \dfrac{\pi}{6}$.

13.73. $\arcsin x < \arcsin(1 - x)$.

13.74. $\arccos x > \arccos x^2$.

13.75. (МГУ, хим, географ, биолог, психолог, ФББ, ФФМ, ФНМ, физико-химический, 2008, 3(7))

$$\arccos 3x \le \arccos \sqrt{6 - 15x}.$$

13.76. $\operatorname{tg}^2(\arcsin x) \ge 1$.

13.77. $1 - \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4} + \arccos(x + |\sin y|) \le 0$.

13.78. (МГУ, ВМиК, апрель 2003, 6(6))

$$\arcsin(\sin x) + 3\arccos(\cos x) \ge 3x - 18.$$

13.5 Оценки тригонометрических функций

Доказать неравенства:

13.79. $\sin x \le x$ при $0 \le x$.

13.80. $x \le \operatorname{tg} x$ при $0 \le x < \frac{\pi}{2}$.

13.81. $\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

13.82. $\cos x \ge 1 - \dfrac{x^2}{2}$ для любых x.

Домашнее задание

13.83. (МГУ, ВМиК, апрель 2003, устный)
α, β, γ — углы остроугольного треугольника. Доказать, что

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2.$$

13.84. $\cos x + x\sin x > 1$ при $0 < x \le \frac{\pi}{2}$.

13.85. $\sin x \ge x - \dfrac{x^3}{4}$ при $0 \le x < \pi$.

13.86. $\cos x \le 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{16}$ при $0 \le x < \pi$.

14 Арифметическая прогрессия

Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется *арифметической прогрессией*, если каждый последующий член, начиная со второго, равен предыдущему плюс некоторое число d, называемое *разностью прогрессии*, т. е.

$$a_n = a_{n-1} + d \quad (n \geq 2), \quad d - \text{разность прогрессии.}$$

Общий член арифметической прогрессии может быть выражен через первый член и разность прогрессии по формуле:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad n \geq 1.$$

Сумма n членов арифметической прогрессии $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ может быть выражена через первый и последний член арифметической прогрессии по формуле:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Подставляя формулу для n-ого члена арифметической прогрессии, получим формулу суммы n членов арифметической прогрессии через первый член и разность прогрессии по формуле:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Формулы для a_n и S_n можно доказать по методу математической индукции.

Арифметическая прогрессия полностью определяется через свой первый член a_1 и разность прогрессии d.

Арифметическая прогрессия является *возрастающей*, если $d > 0$, и *убывающей*, если $d < 0$.

Для членов арифметической прогрессии можно доказать следующие свойства:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_k + a_{n-k+1}, \quad 1 \leq k \leq n \tag{1}$$

(действительно, $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k+1-1)d = 2a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n$);

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \ldots = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \quad 1 \leq k < n \tag{2}$$

$$\left(\text{действительно,} \frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2} = \right.$$
$$\left. = \frac{a_1+(n-k-1)d+a_1+(n+k-1)d}{2} = \frac{2a_1+2(n-1)d}{2} = a_n \right).$$

14.1. Любые ли три числа могут являться членами (необязательно последовательными) какой-нибудь арифметической прогрессии?

14.2. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 5(8))
Найдите четыре числа, которые образуют арифметическую прогрессию, если сумма крайних равна 18 и второе число меньше третьего на 20%.

14.3. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна $\frac{5}{3}$, а произведение третьего и четвертого ее членов равно $\frac{65}{72}$. Найти сумму первых 17 членов этой прогрессии.

14.4. (МГУ, географический, 2006, 2(6))
Числа y и z таковы, что последовательность 1, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$, а также последовательность 1, $y-1$, $z-y$ являются арифметическими прогрессиями. Найти разность второй прогрессии.

14.5. (МГУ, ИСАА, 1993, 2(6))
Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых 11 членов этой прогрессии.

14.6. Найти сумму всех положительных четных двузначных чисел, делящихся на 3 нацело.

14.7. (МГУ, экономический, 1971, 4(5))
Вычислить сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся на 13.

14.8. При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй член этой же прогрессии в частном получается 5, а при делении тринадцатого члена этой прогрессии на ее шестой член в частном получается 2 и в остатке 5. Найти первый член и разность прогрессии.

14.9. Известно, что при любом n сумма n первых членов некоторой числовой последовательности выражается формулой $S_n = 4n^2 - 3n$. Найти три первых члена этой последовательности. Доказать, что последовательность является арифметической прогрессией.

14.10. (МГУ, почвоведения, май 2001, 4(6))
Найти арифметическую прогрессию, в которой сумма членов, сколько бы начиная с первого их ни взять, всегда равна утроенному квадрату числа этих же членов.

14.11. (МГУ, тест, мех-мат, 2001, 4(10))
Из образцов трех сплавов олова, цинка и меди получили новый сплав, в котором количества указанных веществ, расположенные в некотором порядке, образуют арифметическую прогрессию. Первый образец массой 5 г состоял из олова и меди, второй — из 16 г меди и 7 г цинка, а третий — из 8 г цинка и 21 г олова. Сколько граммов олова было в первом образце?

14.12. (МГУ, ВМиК, 2010, 1(6))
В арифметической прогрессии первый член отрицательный и равен -405, разность равна 18. Сумма абсолютных величин (модулей) первых n членов этой прогрессии равна 5661. Найдите n.

14.13. (МГУ, мех-мат, март 1996, 5(6))
Какое наибольшее число членов может содержать конечная арифметическая прогрессия с разностью 4 при условии, что квадрат ее первого члена в сумме с остальными членами не превосходит 100?

14.14. (МГУ, психологический, 1967)
Найти числа, одновременно являющиеся членами двух арифметических прогрессий $2, 5, 8, \ldots, 332$ и $7, 12, 17, \ldots, 157$. Сколько имеется таких чисел?

14.15.* (МГУ, химический, май 1999, 7(7))
Функция $f(x)$ удовлетворяет следующему условию: для любых чисел a и b выполняется равенство $f(\frac{a+2b}{3}) = \frac{f(a)+2f(b)}{3}$. Найти значение функции $f(1999)$, если $f(1) = 1$ и $f(4) = 7$.

14.16.* (МГУ, химический, 1999, 7(7))
Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ определяется следующим правилом: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ 2a_n, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$ Найти a_{1999}.

14.17.* (МГУ, химический, май 2001, 7(7))
Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ устроена следующим образом: $a_1 = 1$, каждое последующее число равно удвоенной сумме предыдущих чисел, т. е. $a_2 = 2a_1$, $a_3 = 2(a_1 + a_2)$ и т. д. Найти произведение всех чисел от a_1 до a_{2001}.

14.18.* (МГУ, химический, 2001, 7(7))
Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет уравнению
$f(x+1) = f(x) + 2x + 1$. Найти $f(2001)$, если $f(0) = 0$.

14.19.* (МГУ, мех-мат, март 2000, 2(6))
О первых семи членах убывающей арифметической прогрессии известно, что сумма пятых степеней всех этих членов равна нулю, а сумма их четвертых степеней равна 51. Найти седьмой член этой прогрессии.

14.20. (МГУ, мех-мат, 2003, устный)
Числовая функция для любых чисел x и y удовлетворяет равенству $f(x+y) = f(x) + f(y) + 80xy$. Найти $f(\frac{4}{5})$, если $f(\frac{1}{4}) = 2$.

14.21. Задано 1001 число, сумма любых двух из которых больше 1. Доказать, что сумма всех чисел больше $\frac{1001}{2}$.

14.22. (МГУ, географический, 1993, 5(5))
При каких a четыре корня уравнения $x^4 + (a-5)x^2 + (a+2)^2 = 0$ образуют арифметическую прогрессию?

Домашнее задание

14.23. Найти арифметическую прогрессию $a_1, a_2, a_3, \ldots$, если известно, что $a_1 + a_3 + a_5 = -12$ и $a_1 a_3 a_5 = 80$.

14.24. (МГУ, факультет Гос. управления, 2005, 1(7))
Можно ли разделить сумму в 196 рублей на 16 разных частей так, чтобы ближайшие по величине части отличались на 50 копеек?

14.25. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а в каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты 5700 м?

14.26. (МГУ, геологический, 1992, 1(6))
Четвертый член арифметической прогрессии равен 16, а сумма седьмого и десятого равна 5. Найти сумму первых восемнадцати членов этой арифметической прогрессии.

14.27. (МГУ, физический, 1992, 5(8))
Найти первый член и разность арифметической прогрессии, если известно, что пятый и девятый члены дают в сумме 40, а сумма седьмого и тринадцатого членов равна 58.

14.28. (МГУ, социологический, 1999, 2(6))
Найти первый член и разность арифметической прогрессии, для которой сумма первых пяти членов с нечетными номерами на единицу больше суммы первых пяти членов с четными номерами и равна квадрату первого члена.

14.29. (МГУ, экономический, отд. менеджмента, 2007, 1(6))
Три числа $8x$, $3-x^2$ и -4 в указанном порядке образуют убывающую арифметическую прогрессию. Найдите x и укажите разность этой прогрессии.

14.30. (МГУ, психологический, 1984, 5(7))
Второй член арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел, равен 2, а сумма квадратов третьего и четвертого ее членов меньше 4. Найти первый член этой прогрессии.

14.31. (МГУ, геологический, 2007, 6(8))
Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел больше 337, но меньше 393. Чему равен восьмой член этой прогрессии, если известно, что он кратен четырем?

14.32. (МГУ, ВМиК, отделения бакалавров, 2005, 1(7))
В убывающей арифметической прогрессии разность девятого и четвертого членов равна третьему, а сумма квадратов первого и второго членов равна 4. Найдите сумму первых двадцати пяти членов этой прогрессии.

14.33. (МГУ, ВМиК, 1990, 2(6))
Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма членов этой прогрессии с нечетными номерами на 15 больше суммы членов с четными номерами. Найти a_{12}, если $a_{20} = 3a_9$.

14.34. (МГУ, ИСАА, 1993, 2(6))
Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых 7 членов этой прогрессии.

14.35. (МГУ, химический, 1989, 2(5))
Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ является арифметической прогрессией. Известно, что $a_1 + a_5 + a_{15} = 3$. Найти $a_5 + a_9$.

14.36. (МГУ, геологический, 2005, 5(8))
В арифметической прогрессии квадрат суммы третьего и четвертого ее членов равен сумме второго и пятого ее членов. Чему равна сумма первых шести членов этой прогрессии?

14.37. (МГУ, ВМиК, 1988, 1(6))
Найти сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов этой прогрессии равна 10.

14.38. (МГУ, ВМиК, апрель 1995, 1(6))
В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с четвертого по четырнадцатый включительно равна 77. Найти номер того члена прогрессии, который равен 7.

14.39. (МГУ, ВМиК, 2001, 2(6))
Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии равна 56. Все члены этой прогрессии — натуральные числа. Двенадцатый член больше 67, но меньше 74. Найдите двадцатый член этой прогрессии.

14.40. (МГУ, мех-мат, тест, 1995, 3(8))
В арифметической прогрессии первый член и разность положительны, а сумма первых десяти членов равна разности квадратов шестого и пятого членов. Найти разность этой прогрессии.

14.41. Найти сумму всех положительных четных трёхзначных чисел, делящихся на 3 нацело.

14.42. При делении тринадцатого члена арифметической прогрессии на третий член этой же прогрессии в частном получается 3, а при делении восемнадцатого члена этой прогрессии на ее седьмой член в частном получается 2 и в остатке 8. Найти первый член и разность прогрессии.

14.43. Известно, что при любом n сумма n первых членов некоторой числовой последовательности чисел выражается формулой $S_n = 2n^2 + 3n$. Найти десятый член этой последовательности. Доказать, что последовательность является арифметической прогрессией.

14.44. (МГУ, психологический, 1997, 3(6))
В убывающей арифметической прогрессии произведение первого и ее последнего членов равно $3\frac{2}{3}$, а сумма второго и предпоследнего членов равна $11\frac{1}{3}$. Найти первый член прогрессии.

14.45. Решить уравнение:
$(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+(x^2+3x+5)+\ldots+(x^2+20x+39) = 4500.$

14.46. (МГУ, географический, 1994, 2(5))
Сумма первых двадцати членов арифметической прогрессии (a_n) в пять раз меньше суммы первых двадцати пяти членов арифметической прогрессии (b_n). Найдите отношение разности прогрессии (a_n) к разности прогрессии (b_n), если известно, что эти разности отличны от нуля и $4a_{12} = b_{19}$.

14.47. (МГУ, географический, май 1999, 2(6))
Сумма первых пяти членов убывающей арифметической прогрессии равна (-5), а их произведение равно (-280). Найти сотый член прогрессии.

14.48. Показать, что для всякой арифметической прогрессии при любом n выполняется равенство $S_{2n} = S_n + \frac{1}{3}S_{3n}$
(S_k — сумма k первых членов прогрессии).

14.49. В арифметической прогрессии $S_k = S_l$, $k \neq l$. Найти S_{k+l}.

14.50. (МГУ, геологический, 1999, 6(8))
Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots$, в которой $a_3 = -13$, $a_7 = 3$. Определите, при каком количестве членов сумма прогрессии будет наименьшей; найдите значение этой суммы.

14.51. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2011, 3(10))
Петя последовательно выписывает целые числа, начиная с 21, так, что каждое следующее число меньше предыдущего на 4, а Вася, глядя на очередное число, подсчитывает сумму всех выписанных к этому моменту чисел. Какая из найденных Васей сумм окажется ближайшей к 55?

14.52. (МГУ, психологический, 1967)
Найти числа, одновременно являющиеся членами двух арифметических прогрессий $3, 7, 11, \ldots, 407$ и $2, 9, 16, \ldots, 709$. Сколько имеется таких чисел?

14.53. (МГУ, ВМиК, 2005, 3(6))
Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, являются арифметическими прогрессиями, $a_{11} = 32$, $b_{21} = 43$. Последовательность $\{c_n\}$ определяется равенствами $c_n = (-1)^n \cdot a_n + (-1)^n \cdot b_n$. Сумма первых сорока членов последовательности $\{c_n\}$ равна 100, а сумма первых ее двадцати трех членов равна -60. Найти b_{40} и сумму первых ста членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$.

14.54.* (МГУ, химический, май 2001, 7(7))
Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ устроена следующим образом: $a_1 = 1$, каждое последующее число равно утроенной сумме предыдущих чисел, т. е. $a_2 = 3a_1$, $a_3 = 3(a_1 + a_2)$ и т. д. Найти произведение всех чисел от a_1 до a_{2001}.

14.55.* (МГУ, химический, 2001, 7(7))
Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет уравнению
$f(x+1) = f(x) + 2x + 3$. Найти $f(2001)$, если $f(0) = 1$.

14.56.* (МГУ, мех-мат, март 2000, 2(6))
О первых шести членах возрастающей арифметической прогрессии известно, что сумма пятых степеней всех этих членов равна нулю, а сумма их четвертых степеней равна 49. Найти первый член этой прогрессии.

14.57. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,01?

15 Геометрическая прогрессия

Последовательность чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ $(b_1 \neq 0)$, называется *геометрической прогрессией*, если каждый последующий член последовательности, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на некоторое число q, $q \neq 0$, называемому *знаменателем прогрессии*, т. е.

$$b_n = b_{n-1} \cdot q \quad (n \geq 2), \quad q \text{ – знаменатель прогрессии.}$$

Общий член геометрической прогрессии может быть выражен через первый член и знаменатель прогрессии по формуле:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Сумма n членов геометрической прогрессии может быть выражена через первый член и знаменатель прогрессии по формуле:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

Формулы для b_n и S_n можно доказать по методу математической индукции.

Если $|q| < 1$, то прогрессию называют *бесконечно убывающей*. Предел суммы ее членов называют *суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии*. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии вычисляется по формуле:

$$S_\infty = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} \quad (|q| < 1).$$

Геометрическая прогрессия полностью определяется через первый член b_1 и знаменатель прогрессии q.

Для членов геометрической прогрессии можно доказать следующее свойство:

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1} = \ldots = b_{n-k}b_{n+k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

15.1 Конечная геометрическая прогрессия

15.1. Любые ли три числа отличные от нуля могут являться членами (необязательно последовательными) какой-нибудь геометрической прогрессии?

15.2. (МГУ, ИСАА, 1995, 1(6))
Найти x, если известно, что числа -1, $x+2$, $\sin(\arcsin x)$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию.

15.3. (МГУ, химический, 1989, 2(5))
Последовательность чисел $b_1, b_2, b_3, \ldots$ является геометрической прогрессией. Известно, что $b_1 \cdot b_3 \cdot b_{11} = 8$. Найти $b_2 \cdot b_8$.

15.4. (МГУ, ВМиК, 1996, 1(6))
Числа a, b, c и d являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $a+d=10$, $ad=7$. Найти b^3+c^3.

15.5. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2007", 3(10))
Какие значения может принимать выражение
$\log_{(b_{11}b_{50})}(b_1 b_2 \ldots b_{60})$, где $b_1, b_2, \ldots$ — геометрическая прогрессия?

15.6. Найти четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, у которой сумма крайних членов равна (-49), а сумма средних членов равна 14.

15.7. (МГУ, психологический, 1997, 3(6))
В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего ее членов равна 164, а произведение второго и предпоследнего членов равно 324. Найти последний член прогрессии.

15.8. Найти сумму первых n членов ряда $1 + 11 + 111 + \cdots$.

15.9. (МГУ, мех-мат, май 1993, 2(6))
Сумма первых 5 членов геометрической прогрессии равна ее первому члену, умноженному на 5, а сумма первых 15 членов равна 100. Найти сумму первого, шестого и одиннадцатого членов этой прогрессии.

15.10. (МГУ, психологический, 2000, 2(5))
Рассматриваются геометрические прогрессии, у каждой из которых первый член равен десяти, сумма второго и третьего членов равна целому числу, кратному четырем, и не превосходит одной тысячи, а знаменатель больше единицы. Указать знаменатели всех таких прогрессий.

15.11. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 13, а сумма квадратов тех же чисел равна 91. Найти эти числа.

15.12.* (МГУ, биологический, 1993, 4(6))
Даны две геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1. Известно, что сумма вторых членов прогрессий равна 3, а сумма пятых — равна 161. Найти сумму шестых членов прогрессий.

15.13.* Могут ли числа 10, 11, 12 быть членами одной геометрической прогрессии?

15.14. (МГУ, социологический, 2003, 6(6))
Определить все значения параметра a, при каждом из которых три различных корня уравнения $x^3 + (a^2 - 9a)x^2 + 8ax - 64 = 0$ образуют геометрическую прогрессию. Найти эти корни.

Домашнее задание

15.15. Найти четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, у которой второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.

15.16. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 13, а их произведение равно 27. Найти эти числа.

15.17. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 63, а их произведение равно 1728. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

15.18. (МГУ, психологический, 1987, 1(6))
Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии на 3/2 больше, чем сумма ее первых трех членов. Пятый член геометрической прогрессии равен ее третьему члену, умноженному на 4. Найти ее четвертый член, если знаменатель прогрессии положителен.

15.19. (МГУ, географический, 1990, 2(5))
Произведение первого и пятого членов геометрической прогрессии равно 12. Частное от деления второго члена на четвертый равно 3. Найти второй член прогрессии.

15.20. (МГУ, географический, 2003, 1(5))
Разность девятого и третьего членов знакочередующейся геометрической прогрессии равна ее шестому члену, умноженному на $\frac{24}{5}$. Найти отношение десятого к пятому члену прогрессии.

15.21. (МГУ, географический, 1998, 2(6))
Найти знаменатель убывающей геометрической прогрессии, если сумма первого, второго и третьего членов прогрессии равна (-7), а пятый член прогрессии меньше второго на 14.

15.22. (МГУ, мех-мат, март 1995, 1(6))
Найти первый член геометрической прогрессии, если известно, что третий член этой прогрессии равен (-10), а его квадрат в сумме с седьмым членом дает утроенный пятый член.

15.23. (МГУ, ВМиК, 1996, 1(6))
Числа p, q, r и s являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $q^3 + r^3 = 288$, $p \cdot s = 24$. Найти $p + s$.

15.24. (МГУ, почвоведения, май 2001, 4(6))
Найти сумму первых n членов ряда $7 + 77 + 777 + \cdots$.

15.25. Произведение первых трех членов геометрической прогрессии равно 64, а сумма кубов тех же чисел равна 584. Найти прогрессию.

15.26.* (МГУ, биологический, 1993, 4(6))
Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна -4. Известно, что сумма шестых членов прогрессии равна -724. Найти сумму пятых членов прогрессий.

15.27. Сумма четырех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 40, а сумма их квадратов равна 3280. Найти прогрессию.

15.28. (МГУ, психологический, 2000, 2(5))
Рассматриваются геометрические прогрессии, у каждой из которых третий член равен восьми, сумма первого и второго членов равна целому числу, кратному пяти, и не превосходит пятисот, а знаменатель больше нуля и меньше единицы. Указать знаменатели всех таких прогрессий.

15.29. (МГУ, геологический, май 2003, 3(8))
Целые числа k, n, m в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию с целым знаменателем. Известно, что число m на 39 больше, чем k, а прогрессия не является возрастающей. Чему равна сумма чисел k, n и m?

15.30. Показать, что для всякой геометрической прогрессии при любом n выполняется равенство $S_{3n} = \dfrac{(S_{2n} - S_n)^2}{S_n} + S_{2n}$ (S_k — сумма k первых членов прогрессии).

15.31. Найти произведение n первых членов геометрической прогрессии, если известна их сумма s и сумма обратных величин σ.

15.32. Найти сумму $\left(2 + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(2^n + \dfrac{1}{2^n}\right)^2$.

15.33. Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые 10 членов целые, а следующие 10 — не целые?

15.34.* При каких рациональных k числа $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[4]{2}$, $2{,}5^k$ являются членами одной геометрической прогрессии?

15.35.* Доказать тождество $(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^2 - x^n = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})$.

15.2 Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

15.36. Найти сумму $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} + \ldots$.

15.37. Найти третий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна $\dfrac{8}{5}$, а второй член равен $-\dfrac{1}{2}$.

15.38. Решить уравнение: $\dfrac{1}{x}+x+x^2+x^3+\ldots=\dfrac{7}{2}$, где $|x|<1$.

15.39. (МГУ, социологический, 2005, 3(6))
Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия содержит член $b_n=\frac{1}{6}$. Отношение суммы членов прогрессии, стоящих перед b_n, к сумме членов, стоящих после b_n, равно 6. Найти n, если сумма всей прогрессии равна $\frac{3}{4}$.

Домашнее задание

15.40. Найти сумму $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{16}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}+\ldots$.

15.41. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

15.42. Решить уравнение: $2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots=\frac{13}{6}$, где $|x|<1$.

15.43. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов, 2007, 3(8))
Сумма положительной бесконечно убывающей геометрической прогрессии в 4 раза больше её второго члена. Во сколько раз второй член меньше первого?

15.3 Арифметическая и геометрическая прогрессии

15.44. (МГУ, химический, физико-химический, ФНМ, ФФМ, биолог., ФБиБ, географический, психологический, 2007, 4(8))
Положительные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 образуют геометрическую прогрессию, а числа $b_5, 6b_3, 27b_1$ — арифметическую. Найти знаменатель прогрессии b_1, b_2, b_3, b_4, b_5.

15.45. (МГУ, ВМиК, апрель 2004, 1(6))
Четыре числа a_1, a_2, a_3 и a_4 образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Если к ним прибавить 6, 7, 6 и 1 соответственно, то получатся числа, образующие в том же порядке арифметическую прогрессию. Найдите числа a_1, a_2, a_3 и a_4.

15.46. (МГУ, физический, 1973, 3(5))
Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 30. Четвертый, седьмой и пятый члены этой прогрессии, взятые в указанном порядке, представляют собой три последовательных члена геометрической прогрессии. Найти разность арифметической прогрессии.

15.47. Найти три числа, являющихся последовательными членами геометрической прогрессии, если известно, что увеличение второго числа на 2 делает эти три числа последовательными членами арифметической прогрессии, а если после этого увеличить последнее число на 9, то вновь полученные числа снова будут последовательными членами геометрической прогрессии.

15.48. (МГУ, почвоведения, 2000, 2(7))
Первый, второй и четвертый члены арифметической прогрессии одновременно являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите все значения, которые может принимать знаменатель геометрической прогрессии.

15.49. (МГУ, географический, 1991, 3(5))
Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел образуют геометрическую прогрессию. Найти a_1, a_2, a_3, если известно, что $a_1 + a_2 + a_3 = 21$.

15.50. (МГУ, географический, 2001, 3(6))
Числа a, b, c в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а числа $a - c$, $c - b$, $2a$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Какое минимальное значение может принимать число $2a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc + 6a$?

15.51.* Найти сумму $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n$.

Домашнее задание

15.52. (МГУ, филологический, март 2003, 3(5))
Даны такие арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ и геометрическая прогрессия $\{b_n\}$, что $a_1 = b_1$, $a_4 = b_3$, $a_2 a_3 - b_2^2 = 8$. Найти разность арифметической прогрессии.

15.53. (МГУ, биологический, 1970, 3(5))
Даны две арифметические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Известно, что $a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3$, а числа a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3 образуют геометрическую прогрессию. Доказать, что $a_1 = b_3$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_1$.

15.54. (МГУ, почвоведения, 2000, 2(7))
Первый, четвертый и пятый члены арифметической прогрессии одновременно являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите все значения, которые может принимать знаменатель геометрической прогрессии.

15.55. (МГУ, тест, мех-мат, 1998, 4(9))
Первый, второй и третий члены геометрической прогрессии равны соответственно третьему, шестому и восьмому членам некоторой арифметической прогрессии, а их произведение равно 125. Найти первый член геометрической прогрессии.

15.56. (МГУ, географический, 1991, 3(5))
Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел составляют геометрическую прогрессию. Найти a_1, a_2, a_3, если известно, что $a_1 - d = 7$.

15.57. (МГУ, географический, 2001, 3(6))
Числа p, q, r в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а числа $r-p$, $q-r$, $-3p$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Какое минимальное значение может принимать число $-p^2+8q^2+2r^2-8qr+4p$?

15.58.* Найти сумму $1+2\cdot 3+3\cdot 7+\ldots+n(2^n-1)$.

15.59.* Найти сумму $1\cdot 3+3\cdot 9+5\cdot 27+\ldots+(2n-1)3^n$.

15.60.* (МГУ, ВМиК, апрель 2001, устный)
Доказать неравенство $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\ldots+\dfrac{1000}{2^{1000}}<2$.

15.61.* Доказать тождество $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\ldots+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$.

16 Текстовые задачи

16.1 Задачи на движение

16.1. Пассажирский поезд длиной 600 м движется со скоростью 100 *км/ч*. Навстречу ему движется товарный поезд длиной 1 *км* и скоростью 60 *км/ч*. Сколько времени пройдет от встречи машинистов поездов до момента расставания хвостовых вагонов?

16.2. (ЕГЭ, 2010, B12)
Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 40 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 30 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 3 часа позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

16.3. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2005, 1(10))
Три брата возвращались с совместной рыбалки домой, где их ожидал бочонок холодного кваса. Старший брат шел втрое медленнее младшего и вдвое медленнее среднего. Придя домой, младший сразу принялся за бочонок и выпил 7-ю его часть к приходу среднего брата, который присоединился к младшему и стал поглощать квас с той же скоростью. Досталось ли кваса старшему брату?

16.4. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2008, 1(10))
Группа туристов отправилась в 12:00 из лагеря по маршруту. В 12:30 штурман вспомнил, что оставил в лагере компас, и сбегал за ним в лагерь, догнав шедшую с прежней скоростью группу в 14:00. В котором часу штурман прибыл в лагерь, если бежал он с постоянной скоростью и в лагере не задерживался?

16.5. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов и высшая школа современных социальных наук, 2(7))
Ученик шел от дома до школы со скоростью 3 км/ч и опоздал на 1 мин. В другой раз он пошел со скоростью 4 км/ч и пришел за 3 мин. до начала урока. С какой скоростью ему нужно идти в следующий раз, чтобы прийти в точности к началу урока?

16.6. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2006”, 5(10))

Из пункта A в пункт B в 8^{00} выехал велосипедист, а через некоторое время из B в A вышел пешеход. Велосипедист прибыл в B через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришел в A в 17^{00} того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из A в B проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?

16.7. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2008”, 4(10))

Лиса преследовала кролика по прямолинейной дорожке, ведущей к норе кролика. Их скорости были постоянны. В некоторый момент расстояние от кролика до норы было равно 7 м, а до лисы — 13 м. В некоторый следующий момент расстояние между кроликом и норой стало вдвое меньше расстояния между ним и лисой. Успела ли лиса догнать кролика, прежде чем тот юркнул в нору?

16.8. (МГУ, “Ломоносов-2011”, заочный тур, 4(10))

Пройдя $2/5$ длины узкого моста, пешеход заметил, что сзади к мосту приближается машина. Тогда он пошел назад и встретился с машиной у начала моста. Если бы он продолжал идти вперед, то машина догнала бы его у конца моста. Найти отношение скорости машины к скорости пешехода.

16.9. (МГУ, ВМиК (отд. специалистов), 2006, 1(6))

Из города A в город B в 6 часов утра выехал грузовой автомобиль. Шесть часов спустя из города B в город A по той же дороге выехал ему навстречу легковой автомобиль. Автомобили движутся с постоянными скоростями. По предварительной договорённости они одновременно приехали в посёлок C, расположенный на дороге между A и B. Разгрузка и оформление документов длились пять часов. Затем грузовой и легковой автомобили продолжили каждый свой путь. Легковой и грузовой автомобили прибыли соответственно в города A и B одновременно в 23 часа того же дня. Найдите время прибытия автомобилей в населённый пункт C.

16.10. (МГУ, ВМиК, отделения бакалавров, 2008, 2(6))
Длина дороги, соединяющей пункты A и B, равна 1080 км. В пункте A находится первый автомобиль, а в пункте B — второй автомобиль. В 6^{00} первый автомобиль отправляется в пункт B, а спустя некоторое время второй автомобиль отправляется в пункт A. В 13^{00} расстояние между автомобилями оказалось равным 270 км. Найти скорость первого автомобиля, если известно, что, во-первых, скорости обоих автомобилей постоянны, причем скорость второго составляет $\frac{5}{4}$ от скорости первого, во-вторых, второй автомобиль прибыл в пункт A позже, чем первый в пункт B, и, в третьих, первый автомобиль прибыл в пункт B через 5 часов после встречи со вторым автомобилем.

16.11. (МГУ, ВМиК, 1992, 4(6))
Из города B в город A вылетел самолет. Спустя некоторое время из A в B вылетел вертолет. Скорости самолета и вертолета на всем пути постоянные, и они летят по одной трассе. Самолет до встречи с вертолетом находился в пути 6 *ч*, а вертолет до встречи летел 3 *ч*. Самолет прибыл в A в 13 *ч* 30 *мин*, а вертолет прибыл в B в 20 *ч* 30 *мин*. Найти время вылета самолета из города B.

16.12. (МГУ, мех-мат, 2005, 1(6))
Согласно расписанию, автобус курсирует по маршруту из пункта A в пункт B и обратно с постоянной скоростью и без остановок. На пути из A в B он был вынужден на некоторое время остановиться, поэтому на обратном пути он увеличил скорость на 25%. Приехав в A с 10-минутным отклонением от расписания, он уменьшил свою последнюю скорость на 24% и прибыл в B вовремя. Какова была продолжительность вынужденной остановки?

16.13. (МГУ, мех-мат, 2010, 5(6))
Из лесу выскочил заяц и помчался по прямой в направлении тернового куста. На полпути до куста заяц напоролся на колючку и стал бежать в полтора раза медленнее. Когда зайцу оставалось до куста 50 метров, из лесу (из того же места) выбежал волк и погнался за зайцем. Когда заяц добежал до куста, волку оставалось до него 10 метров. На каком расстоянии от леса находится терновый куст, если известно, что волк всё время бежал со скоростью, с которой первоначально бежал заяц?

16.14. (МГУ, ФНМ, 2003, 6(6))
Автомобиль, двигаясь от пункта A до пункта B, проехал первую треть пути со скоростью v_1, а оставшиеся две трети — со скоростью v_2. На обратном пути автомобиль проехал половину всего времени движения от B до A со скоростью v_1, а вторую половину — со скоростью v_2. Известно, что средняя скорость движения от A к B в $a > 1$ раз больше средней скорости движения от B к A. Найдите все значения a, при которых задача нахождения отношения скоростей v_2 и v_1 имеет решение.

Домашнее задание

16.15. (ЕГЭ, 2010, B12 – *тренировочный вариант*)
Из пункта A в пункт B вышел пешеход, движущийся со скоростью 6 км/ч. Одновременно навстречу ему из пункта B в пункт A вышел второй пешеход, движущийся со скоростью 4 км/ч. Расстояние между пунктами A и B равно 15 км. Через сколько часов пешеходы встретятся?

16.16. Грузовой поезд длиной 1 *км* движется со скоростью 60 *км/ч*. По параллельной колее его обгоняет пассажирский поезд, движущийся со скоростью 105 *км/ч* и длины 500 *м*. Сколько времени пройдет от момента встречи машиниста пассажирского поезда с хвостом грузового поезда до момента встречи машиниста грузового поезда с хвостом пассажирского поезда?

16.17. (ЕГЭ, 2008, B9)
За 80 км до станции назначения поезд был задержан у семафора на 24 минуты. Затем машинист увеличил на 10 км/ч скорость, с которой поезд ехал до остановки, и поэтому поезд прибыл в пункт назначения по расписанию. С какой скоростью ехал поезд после остановки?

16.18. (ЕГЭ, 2010, B12)
Баржа в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км от A. Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт A в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 6 км/ч.

16.19. (МГУ, Высшая школа гос. аудита, 2008, 1(9))
Населенные пункты A и B расположены на берегу реки, текущей со скоростью 4 км/час. Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде равна 8 км/час, проплыв из пункта A в пункт B, мгновенно разворачивается и вновь возвращается в пункт A. С какой постоянной скоростью должна плыть лодка по озеру, чтобы за то же время она смогла бы проплыть такое же расстояние?

16.20. (МГУ, ВМиК, апрель, 1999, 1(6))
Пункты A, B, C, D расположены на одной прямой в указанной последовательности. Пешеход выходит из пункта A со скоростью 5 км/ч и направляется в пункт D. Достигнув пункта D, он поворачивает обратно и доходит до пункта B, затратив на всю дорогу 5 ч. Известно, что расстояние между A и C он прошёл за 3 ч, а расстояния между A и B, B и C, C и D (в заданном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найдите расстояние между B и C.

16.21. (МГУ, ВМиК (отд. бакалавров), 2006, 2(7))
Из города A в город B в 10 часов утра выехал велосипедист. Три часа спустя из города B в город A по той же дороге выехал мотоциклист. Велосипедист и мотоциклист движутся с постоянными скоростями. В пути они встретились у придорожного кафе и остановились. После часового отдыха они продолжили каждый свой путь. Мотоциклист и велосипедист прибыли соответственно в города A и B одновременно в 17 часов того же дня. Найдите время встречи у кафе велосипедиста и мотоциклиста.

16.22. (Черноморский ф-л МГУ (г. Севастополь), 2007, 5(10))
Таня и Миша одновременно вышли навстречу друг другу по одной и той же прямой дороге: Таня идёт из школы к озеру, а Миша — в обратном направлении. Через час после начала движения они ещё не встретились, и расстояние между ними равнялось 1 *км*. Ещё через час расстояние между ними составляло 4 *км*, причём каждый из них не достиг конечного пункта движения. Найдите расстояние между школой и озером, если Таня и Миша двигались с постоянными, возможно, различными скоростями.

16.23. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2007, 1(10))
Из пункта A вышел пешеход. Одновременно с ним из пункта B во встречном направлении выехал велосипедист. Они двигались с постоянными скоростями, и через час расстояние между ними равнялось 3 *км*, а ещё через час — 14 *км*. Найти расстояние между пунктами A и B.

16.24. Автомобиль выехал из города A в город B и через 2 часа остановился на 45 *мин*. После этого он продолжал движение к городу B, увеличив первоначальную скорость на 20 *км/ч*, и прибыл в город B. Если бы автомобиль ехал без остановки с первоначальной скоростью, то на путь из A в B он затратил бы столько же времени. Найти первоначальную скорость автомобиля, если расстояние между городами A и B равно 300 *км*.

16.25. Пароход прошел 4 *км* против течения реки, а затем прошел еще 33 *км* по течению, затратив на все это один час. Найти скорость парохода в стоячей воде, если скорость реки равна 6,5 *км/ч*.

16.26. (МГУ, ВМиК, 1997, 1(6))
Пункты A, B и C расположены на реке в указанном порядке вниз по течению. Расстояние между A и B равно 4 *км*, а между B и C — 14 *км*. В $12^{\underline{00}}$ из пункта B отплыла лодка и направилась в пункт A. Достигнув пункта A, она сразу же повернула назад и в $14^{\underline{00}}$ прибыла в пункт C. Скорость течения реки равна 5 *км/ч*. Найти скорость лодки в стоячей воде.

16.27. (МГУ, биологический, 1978, 2(5))
В реку впадает приток. Пароход отходит от пристани A на притоке, идет вниз по течению 80 *км* до реки, далее по реке вверх против течения до пристани B, затратив 18 часов на весь путь от A до B. Затем пароход возвращается обратно. Время обратного движения от B до A по тому же пути равно 15 часам. Скорость парохода в стоячей воде равна 18 *км/ч*. Скорость течения реки равна 3 *км/ч*. Каково расстояние от пристани A до пристани B и какова скорость притока?

16.28. (МГУ, биологический, 1979, 2(5))

Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 2400 км, навстречу друг другу выезжают одновременно пассажирский и скорый поезда. Если бы оба поезда шли со скоростью скорого поезда, то их встреча произошла бы на три часа раньше фактического момента встречи. Если бы оба поезда шли со скоростью пассажирского поезда, то их встреча произошла бы на пять часов позже фактического момента встречи. Найдите скорости поездов.

16.29. (МГУ, геологический, 2001, 6(8))

Пункты A и B расположены на двух различных дорогах, представляющих собой две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в пункте C. Два мотоциклиста одновременно начинают движение: первый из пункта A по направлению к C, а второй из пункта B по направлению к C. Через какое время после начала движения расстояние между мотоциклистами будет наименьшим и каким, если скорость первого мотоциклиста равна 44 км/ч, второго — 33 км/ч, а каждое из расстояний от пункта A до пункта C и от пункта B до пункта C равно 275 км?

16.30. (МГУ, геологический, 2003, 3(8))

Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и, встретившись через 50 мин, без остановки продолжили движение каждый в своём направлении. За какое время проходит путь между a и B каждый из пешеходов, если известно, что первый пришёл в B на 4 ч раньше, чем второй пришёл в A?

16.31. (МГУ, геологический, 2004, 6(8))

Две группы геологов исследуют маршрут, проходящий от пункта A через пункт B до пункта C. Первая группа проходит весь маршрут за 2, а вторая — за 3 дня. Расстояние между B и C вдвое меньше расстояния между A и B. Скорости движения групп на участках AB и BC постоянны, но на участке AB скорости обеих групп в m раз больше, чем их скорости на участке BC. Группы выходят одновременно из A и C навстречу друг другу. Если первая группа выходит из A, а вторая из C, то они встречаются в B.

Если же первая выходит из C, а вторая из A, то они встречаются в пункте D. Какую часть от длины всего маршрута составляет расстояние между B и D? Чему равно значение m?

16.32. (МГУ, психологический, 1978, 3(5))

Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

16.33. (МГУ, ИСАА, 2001, 3(7))

Из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми равно 10 *км*, отправились в разное время пешеход, всадник и велосипедист. Известно, что их скорости постоянны и образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Первым из А вышел пешеход, которого в середине маршрута обогнал велосипедист, выехавший из А на 50 минут позже пешехода. В пункт Б пешеход прибыл одновременно с всадником, выехавшим из А на 1 час 15 минут позже пешехода. Определить скорости участников маршрута.

16.34. (МГУ, почвоведения, 1987, 3(5))

Одни турист преодолевает расстояние 20 км на 2,5 ч быстрее, чем другой. Если бы первый турист уменьшил свою скорость на 2 км/ч, а второй увеличил бы свою скорость в 1,5 раза, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найдите скорость второго туриста.

16.35. (МГУ, почвоведения, 2006, 4(7))

Из деревни в одном и том же направлении вышли три пешехода: второй — через 2 мин после первого, а третий — через 3 мин после второго. Через 5 мин после своего выхода из деревни третий пешеход догнал второго, а ещё через 2 мин — первого. Через сколько минут после своего выхода из деревни второй пешеход догнал первого?

16.36. Два спортсмена начинают бег одновременно — первый из пункта A в B, второй из B в A. Они бегут с неодинаковыми, но постоянными скоростями и встречаются на расстоянии 300 *м* от A. Пробежав дорожку AB до конца, каждый из них тотчас поворачивает назад и встречает другого на расстоянии 400 *м* от B. Найти длину AB.

16.37. (МГУ, географический, 1989, 2(5))

Из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 12 км от A, по горной дороге со скоростью 6 км/ч поднимается в гору пешеход. Одновременно с ним из пункта A в пункт B выехал автобус. Доехав до пункта B менее чем за один час, автобус поехал обратно навстречу пешеходу и встретил его через 12 мин после начала движения из пункта B. Найдите скорость автобуса на подъёме, если она в два раза меньше его скорости на спуске.

16.38. (МГУ, географический, май 2002, 4(6))

Пункты A и B соединены двумя дорогами. Первая дорога в два раза короче второй и проходит через пункт C. Одновременно по короткой дороге из пунктов A и B выехали соответственно грузовик и мотоцикл, каждый из которых, доехав до пункта C, вернулся в свой исходный пункт и продолжил движение по другой дороге. В итоге грузовик и мотоцикл одновременно прибыли соответственно в пункты B и A. Скорости грузовика и мотоцикла постоянные. Если бы грузовик двигался со скоростью мотоцикла, а мотоцикл - со скоростью грузовика, то в момент возвращения мотоцикла в пункт B грузовик также прибыл бы в этот пункт. Найдите: а) отношение скоростей грузовика и мотоцикла; б) время движения грузовика с момента начала движения до встречи с мотоциклом на второй дороге, если известно, что в пункт C он добрался на 35 мин раньше мотоцикла.

16.39. (МГУ, географический, 2006, 4(6))

Дорога длиной 280 км соединяет два населённых пункта. Легковой автомобиль проезжает дорогу за 4 ч, а грузовик — за 5 ч. По дороге оба автомобиля двигаются с постоянными скоростями, кроме тех участков, где в соответствии с ограничениями их скорость равна 40 км/ч. При отсутствии этих ограничений скорости легковой автомобиль проезжал бы дорогу на 1 ч 10 мин быстрее грузовика. Найти а) суммарную длину участков, где скорость ограничена; б) скорости легкового автомобиля и грузовика.

16.40. (МГУ, географический, 2000, 5(6))

Из пункта A в пункт B вниз по течению притока отправляется катер, скорость которого в стоячей воде равна v. В пункте B, где приток впадает в реку, катер поворачивает к пункту C, расположенному выше по течению реки. Расстояния от A до B и от B до C равны. Скорости течения притока и реки равны u_1 и u_2 соответственно. На координатной плоскости (u_1, u_2) укажите область, для всех точек которой время движения по маршруту $A \to B \to C$ меньше, чем время, которое затратил бы катер на прохождение такого же расстояния в стоячей воде.

16.41. (МГУ, экономический, 1985, 4(5))

В 6 часов утра из пункта A в пункт B по течению реки отправились лодка и катер. Лодка прибыла в пункт B в 16 часов того же дня. Катер, дойдя до пункта B, сразу повернул назад и на своём пути из B в A встретил лодку не позднее 14 часов, а прибыл в пункт A не ранее 22 часов того же дня. Найдите время прибытия катера в пункт B, если его собственная скорость (скорость в стоячей воде) вдвое больше собственной скорости лодки.

16.42. (МГУ, ВМиК, 2008, 2(6))

Длина дороги, соединяющей пункты A и B, равна 540 км. В пункте A находится первый автомобиль, а в пункте B — второй автомобиль. В 8^{00} первый автомобиль отправляется в пункт B, а спустя некоторое время второй автомобиль отправляется в пункт A. В 13^{00} расстояние между автомобилями оказалось равным 150 км. Найти скорость первого автомобиля, если известно, что, во-первых, скорости обоих автомобилей постоянны, причем скорость второго составляет $\frac{3}{2}$ от скорости первого, во-вторых, второй автомобиль прибыл в пункт A позже, чем первый в пункт B, и, в третьих, первый автомобиль прибыл в пункт B через 3 часа после встречи со вторым автомобилем.

16.43. (МГУ, ВМиК, апрель, 2001, 3(6))

Из пункта A в пункт B выехал первый велосипедист. Одновременно с ним с такой же скоростью из B в A выехал второй велосипедист. Через некоторое время первый велосипедист увеличил скорость на 10 км/ч. Если бы первый велосипедист сразу двигался с увеличенной скоростью, то его встреча со вторым велосипедистом состоялась бы на 3 ч раньше. Известно, что расстояние между A и B равно 180 км, в момент изменения скорости первым велосипедистом расстояние между ним и вторым велосипедистом было меньше 70 км; на весь путь из A в B первый велосипедист затратил 15 ч. Найдите первоначальную скорость велосипедистов.

16.44. (МГУ, мех-мат, 2002, 3(6))

Из пункта A в пункт C выехал с постоянной скоростью велосипедист. За два километра до промежуточного пункта B он решил, что необходимо ехать быстрее, и увеличив скорость в пункте B, продолжил движение с постоянной скоростью вплоть до пункта C. Приехав в C, велосипедист обнаружил, что время движения с каждой из скоростей было прямо пропорционально соответствующей скорости и что на первые 18 км пути он затратил времени в полтора раза больше, чем на последние 18 км. Найдите расстояние между пунктами A и B, если известно, что расстояние между A и C равно 75 км.

16.45. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2005”, 9(10))

Группа отдыхающих в течение 2 ч 40 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против: в каждую сторону - в общей сложности не менее, чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь в 40 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A, причалила к пристани B на расстоянии 10 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость её течения?

16.46. (МГУ, биологический, ФББ, ФФМ, 2006, 5(6))
Из пунктов А и Б, расстояние между которыми равно 2 км, вниз по течению реки одновременно начинают движение соответственно плот и лодка. В тот же момент из пункта Б навстречу плоту начинает движение катер. Собственная скорость лодки равна скорости течения, собственная скорость катера в два раза превышает скорость течения. Встретив плот, катер мгновенно разворачивается и следует до встречи с лодкой, после чего снова разворачивается и движется в сторону плота до встречи с ним, затем опять к лодке и т. д. Сколько раз катер встретит плот за время, в течение которого плот преодолеет расстояние, равное 1000 км?

16.2 Задачи на движение по окружности

16.47. Часовая и минутная стрелки совмещаются в полночь. Через какое время часовая и минутная стрелки вновь совпадут?

16.48. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2011, 1(10))
Какое время между 14:10 и 15:10 показывают часы в тот момент, когда угол между минутной и часовой стрелками равен $90°$?

16.49. По двум концентрическим окружностям равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 *сек* быстрее чем другая, и поэтому успевает сделать за 1 *мин* на два оборота больше. Сколько оборотов в минуту совершает каждая точка?

Домашнее задание

16.50. Два тела движутся по окружности равномерно в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 2 *сек* быстрее второго и догоняет второе тело каждые 12 *сек*. За какое время каждое тело проходит окружность?

16.51. (МГУ, факультет Гос. управления, 2007, 1(7))
На велотреке, имеющем форму окружности, из диаметрально

противоположных точек одновременно стартуют два велосипедиста со скоростями 775 и 800 метров в минуту соответственно. Сколько полных кругов проедет первый велосипедист к моменту, когда его догонит второй, если длина велотрека равна четверти километра?

16.52. Два тела, движущиеся в разные стороны по окружности длиной 1 *м* с постоянными скоростями, встречаются каждые 6 *сек*. При движении в одну сторону первое тело догоняет второе тело каждые 48 *сек*. Найти линейные скорости этих тел.

16.53. По сигналу дрессировщика два пони одновременно побежали равномерно вдоль внешней окружности арены цирка в противоположных направлениях. Первый пони бежал несколько быстрее второго и к моменту встречи пробежал на 5 *м* больше, чем второй. Продолжая бег, первый пони подбежал к дрессировщику, остававшемуся на том месте, от которого начали бежать пони, через 9 *сек* после встречи со вторым пони, а второй — через 16 *сек* после их встречи. Каков диаметр арены?

16.3 Задачи на производительность труда

16.54. Пустой бассейн заполняется первой трубой за 2 часа. А второй трубой заполняется за 4 часа. За какое время заполнится бассейн, если включить обе трубы одновременно?

16.55. Известно, что пустой бассейн заполняется первой трубой за 2 часа. А второй трубой заполняется за 4 часа. Полностью заполненный бассейн выливается через третью трубу за 3 часа. За какое время заполнится пустой вначале бассейн, если открыть все три трубы одновременно?

16.56. (ЕГЭ, 2010–2011, B12 – *демоверсия*) **“Тест”**

Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй – за три дня?

16.57. (ЕГЭ, 2004, В7 – *демоверсия*)

Планируя выпуск нового электронного прибора, экономисты предприятия определили, что в первый месяц может быть изготовлено 200 приборов. Далее предполагалось ежемесячно увеличивать выпуск на 20 изделий. За сколько месяцев предприятие сможет изготовить по этому плану 11000 приборов?

16.58. (ЕГЭ, 2003, В8 – *демоверсия*) **"Тест"**

Студенческая бригада подрядилась выложить керамической плиткой пол в зале молодежного клуба площадью 288 м^2. Приобретая опыт, студенты в каждый последующий день, начиная со второго, выкладывали на 2 м^2 больше, чем в предыдущий, и запасов плитки им хватило ровно на 11 дней работы. Планируя, что производительность труда будет увеличиваться таким же образом, бригадир определил, что для завершения работы понадобится еще 5 дней. Сколько коробок с плитками ему надо заказать, если 1 коробки хватает на 1,2 м^2 пола, а для замены некачественных плиток понадобится 3 коробки?

16.59. (МГУ, химический, 1997, 4(6))

m насосов различной мощности наполняют бассейн водой. Первый насос, работая автономно, может наполнить весь бассейн за 3 часа, второй — за 9 часов, $\ldots$, m-ый — за 3^m часов. Каким должно быть наименьшее число насосов m, чтобы все m насосов, работая одновременно, наполнили бассейн быстрее, чем за 2 часа и 1 минуту? Можно ли наполнить бассейн быстрее, чем за 2 часа?

16.60. (МГУ, геологический, 1994, 9(10); ФГУ, 2009, 6(7))

Четыре бригады разрабатывали месторождение горючих сланцев в течение трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. На втором году в течение четырех месяцев работа не производилась, а все остальное время работала только одна из бригад. Отношение времен работы первой, второй, третьей и четвертой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны: в первый год $4 : 1 : 2 : 5$ и 10 млн. т; во второй год $2 : 3 : 2 : 1$ и 7 млн. т; в третий год $5 : 2 : 1 : 4$ и 14 млн. т. Сколько млн. т сланцев выработали бы за 4 месяца четыре бригады, работая вместе?

16.61.* (МГУ, психологический, 2000, 3(5))

Два одинаковых поля требуется вспахать тремя тракторами. При работе в одиночку первый трактор вспашет поле втрое быстрее, чем второй, а третьему на эту же работу потребуется времени на два часа больше, чем первому. Работая вместе, все три трактора могут вспахать одно поле за 7 часов двенадцать минут. Найти наименьшее время, за которое можно вспахать оба поля при условии, что все трактора начинают работу одновременно, а для переезда с одного поля на другое любому трактору требуется 40 минут.

Домашнее задание

16.62. (ЕГЭ, 2009, B9 – *демоверсия*)

Объемы ежегодной добычи нефти первой, второй и третьей скважинами относятся как $6 : 7 : 10$. Планируется уменьшить годовую добычу нефти из первой скважины на 10% и из второй – тоже на 10%. На сколько процентов нужно увеличить годовую добычу нефти из третьей скважины, чтобы суммарный объем добываемой за год нефти не изменился?

16.63. (ЕГЭ, 2006, B9)

Два каменщика, работая вместе, могут выполнить задание за 12 ч. Производительности труда первого и второго каменщиков относятся как $1 : 3$. Каменщики договорились работать поочередно. Сколько времени должен проработать первый каменщик, чтобы это задание было выполнено за 20 ч?

16.64. (МГУ, ВМиК, 1981, 1(6))

Три сенокосилки участвовали в покосе травы с поля площадью 25 га. За один час первая сенокосилка скашивает 3 га, вторая - на b га меньше первой, а третья — на $2b$ га больше первой. Сначала работали одновременно первая и вторая сенокосилки и скосили 11 га, а затем оставшуюся часть площади скосили, работая одновременно, первая и третья сенокосилки. Определите значение b $(0 < b < 1)$, при котором все поле скошено за 4 ч, если работа велась без перерыва.

16.65. (МГУ, геологический, 1985, 3(6))

Первый рабочий изготовил 60 деталей на три часа быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если, работая вместе, они изготовят за один час 30 деталей?

16.66. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2005, 3(10))

Бригада землекопов должна была в 8 часов начать рыть траншею. Однако, простояв в очереди за лопатами, они приступили к работе позже: первый на 5 минут, второй на десять минут, третий на 15 и т. д. Вырыв траншею в 12 часов, они ушли на обед, а с 13.00 до 16.30 вырыли вторую такую же траншею. Сколько было землекопов?

16.67. (МГУ, биологический, 1971, 3(5))

Три насоса, работая вместе, наполняют бассейн за 4,5 час. Один второй насос наполняет бассейн на 5 часов быстрее, чем один третий насос. За сколько часов второй насос наполняет бассейн, если первый насос наполняет его втрое дольше, чем второй и третий вместе?

16.68. (МГУ, химический, 1990, 4(5))

Два насоса, работая вместе, наполняют бассейн водой за 10 часов. Половину бассейна первый из них может наполнить за время на 7,5 часов меньше, чем второй. Первый насос включили в 6 часов, второй — в 8 часов. В 12 часов в бассейне было 400 м^3 воды. Какова емкость бассейна?

16.69. (МГУ, почвоведения, 2005, 4(6))

Грузовики трех типов A, B и C возили кирпич. В первый день работали по пять грузовиков каждого типа и выполнили весь объем работы за 3 ч 12 мин. Во второй день за 6 ч 40 мин этот же объем работы выполнили по два грузовика типов A и B и четыре грузовика типа C. За сколько часов был бы выполнен весь объем работы, если бы кирпич возили два грузовика типа A и два грузовика типа B?

16.70. (МГУ, ФМШ, 1992)

Бассейн можно наполнять с помощью пяти труб. Первые две трубы, работая одновременно, наполняют его за 6 ч, а вместе с третьей — за 4 ч. Первая, третья и четвертая трубы наполняют его за 3 ч, а вторая, третья и пятая — за 2 ч. За сколько часов наполняют бассейн все пять труб вместе?

16.71. (МГУ, филологический, 1981, 4(5))

Каждый из рабочих должен был изготовить 36 одинаковых деталей. Первый рабочий приступил к выполнению своего задания на 4 минуты позже второго, но $\frac{1}{3}$ задания они выполнили одновременно. Полностью выполнив свое задание, первый рабочий после двухминутного перерыва снова приступил к работе и к моменту выполнения задания вторым рабочим изготовил еще две детали. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?

16.72. (МГУ, социологический, 2003, 5(6))

Двое рабочих изготовили 316 деталей, причем вторым сделано на 4 детали меньше первого. Известно, что первый рабочий работал на 3 дня дольше второго, при этом в день изготовлял на 2 детали меньше. Сколько деталей в день делал каждый рабочий?

16.73. (МГУ, факультет Гос. управления, 2006, 7(7))

Химический комбинат получил заказ на изготовление этилового спирта, соляной кислоты и дистиллированной воды. Для готовой продукции потребовалась 21 железнодорожная цистерна. При перекачивании были использованы три специализированных насоса: сначала первый насос заполнил четыре цистерны этиловым спиртом, затем второй насос заполнил шестнадцать цистерн соляной кислотой и в завершение третий насос заполнил одну цистерну дистиллированной водой. Найдите минимально возможное время, затраченное на перекачивание всей продукции, если известно, что суммарная производительность всех трёх насосов равна семи цистернам в сутки.

16.74. (МГУ, экономический, 1994, 5(6))

Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $\frac{40500}{n} + 270 - \left|90 - \frac{40500}{n}\right|$ тыс. р., а цена реализации не более $540 - \frac{3}{10}n$ тыс. р. Определите ежемесячный объём производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях ежемесячная прибыль.

16.4 Задачи на концентрацию растворов и сплавов

16.75. Слили вместе 20 л 30% раствора и 30 л 20% раствора соляной кислоты. Какова концентрация полученного раствора?

16.76. (МГУ, почвоведения, 1999, 5(7))

Какое количество воды надо добавить в один литр 10% водного раствора спирта, чтобы получить 6%-й раствор?

16.77. (МГУ, ФНМ, апрель 2004, 1(6))

Для приготовления водного раствора кислоты взяли 4 литра 40%-го и 6 литров 60%-го растворов кислоты. Затем часть полученной смеси вылили и добавили такое же количество чистой воды, в результате чего получился 39%-ый раствор кислоты. Сколько литров воды было добавлено?

16.78. (МГУ, тест, мех-мат, 1995, 1(8))

Мальчик пил чай с сахаром. Он положил три ложки на один стакан чая. Полностью растворив сахар, он отпил $\frac{2}{3}$ стакана чая, добавил одну ложку сахара и долил стакан до полного. Размешав сахар и отпив $\frac{1}{3}$ стакана, мальчик решил, что чай недостаточно сладкий. Сколько сахара нужно добавить, чтобы сделать чай таким же сладким, как и вначале?

16.79. (МГУ, химический, май 1997, 4(6))
Из сосуда с чистым спиртом отлили $\frac{1}{3}$ часть и добавили столько же воды. Потом отлили $\frac{1}{3}$ часть смеси и добавили столько же воды. Эту операцию проделали k раз. Найти наименьшее значение k, при котором содержание спирта станет меньше 10 %.

16.80. Сосуд был полностью заполнен чистым спиртом. 6 литров спирта отлили и сосуд долили водой. Затем снова отлили 6 литров смеси и опять столько же долили воды. В результате в сосуде оказался спирт крепостью 25%. Сколько литров спирта было в сосуде?

16.81. (МГУ, ВМиК, 1994, 5(6))
В начальный момент лечения пациенту была произведена первая инъекция 6 единиц некоторого лекарства, а во время каждой последующей инъекции ему вводится 4 единицы того же лекарства. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшается в 5 раз. Какое количество лекарства будет содержаться в организме пациента сразу после 30-й инъекции?

Домашнее задание

16.82. Кусок сплава меди и цинка массой в 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди?

16.83. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2006, 1(10))
Чашка до краев наполнена черным кофе в количестве 100 *мл*, а в кувшин налито 300 *мл* молока. Какое количество кофе надо перелить из чашки в кувшин и, перемешав, снова наполнить ее до краев полученной смесью, чтобы молока и кофе в чашке оказалось поровну?

16.84. (МГУ, филологический, 2000, 1(6))
Имеется 40 литров 0,5% раствора и 50 литров 2% раствора уксусной кислоты. Сколько нужно взять первого и сколько второго раствора, чтобы получить 30 литров 1,5% раствора уксусной кислоты?

16.85. (МГУ, филологический, 1990, 4(5))
От двух сплавов массой 7 и 3 кг с разным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем кусок, отрезанный от первого сплава, сплавили с остатком второго сплава, а кусок, отрезанный от второго сплава, сплавили с остатком первого сплава. Определить массу каждого из отрезанных кусков, если новые сплавы получились с одинаковым процентным содержанием магния.

16.86. (МГУ, почвоведения, 1997, 4(6))
В сосуде находится 10%-й раствор спирта. Из сосуда отлили $\frac{1}{3}$ содержимого, а оставшуюся часть долили водой так, что сосуд оказался заполненным на $\frac{5}{6}$ первоначального объема. Какое процентное содержание спирта оказалось в сосуде?

16.87. Сколько килограммов воды нужно выпарить из 500 кг раствора целлюлозной массы, содержащей 85% воды, чтобы получить раствор целлюлозной массы с содержанием 75% воды?

16.88. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды надо добавить к 60 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла 1,5%?

16.89. Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие 12%. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

16.90. (МГУ, “Ломоносов-2009”, 2(9))
В свежих грибах содержание воды колеблется от 90% до 99%, а в сушеных — от 30% до 45%. В какое наибольшее число раз при этих ограничениях может уменьшиться вес грибов в результате сушки?

16.91. (МГУ, экономический, 1979, 3(5))
Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 литра глицерина, а к оставшемуся глицерину долили 2 литра воды. После перемешивания снова отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. Наконец, опять перемешали, отлили 2 литра смеси

и долили 2 литра воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 литра больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

16.92. (МГУ, геологический, экономический, 1981, 5(6)) Для приготовления смеси из двух жидкостей А и В взяты два сосуда емкостью по 15 литров каждый, в которых находилось всего 15 литров жидкости А. Затем первый сосуд доверху долили жидкостью В, и было произведено перемешивание. После этого второй сосуд дополнили доверху смесью из первого сосуда. Затем из второго сосуда отлили в первый 6 литров получившейся смеси. После этого в первом сосуде оказалось жидкости А на один литр больше, чем во втором. Сколько литров жидкости А было первоначально во втором сосуде?

16.5 Задачи на проценты

16.93. (ЕГЭ, 2010–2011, B1 – *демоверсия*)
Билет на автобус стоит 15 рублей. Объявлено повышение цены билета на 20%. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 100 рублей после повышения цены?

16.94. Цену товара сперва понизили на 20%, затем новую цену повысили на 20%. Как изменилась стоимость товара?

16.95. Цену товара сперва понизили на 20%, затем новую цену снизили на 15% и, наконец, после перерасчета произвели снижение еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

16.96. (ЕГЭ, 2006, B9 – *демоверсия*)
По пенсионному вкладу банк выплачивает 10% годовых. По истечении каждого года эти проценты капитализируются, т. е. начисленная сумма присоединяется к вкладу. На данный вид вклада был открыт счёт в 50 000 рублей, который не пополнялся и с которого не снимали деньги в течение 3 лет. Какой доход был получен по истечении этого срока?

16.97. Сбербанк начисляет ежегодно 3% от суммы вклада. Через сколько лет внесенная сумма удвоится?

16.98. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 3(7)) Цена товара изменяется два раза в год: в апреле она повышается на 20%, а в сентябре снижается на 20%. Какова будет цена товара в декабре 2005г., если в январе 2004 г., она составляла 6250 руб.?

16.99. (Ташкентский ф-л МГУ, 2007, 8(10)) В коммерческий банк сроком на два года был сделан вклад в размере 1200000 у.е. При этом клиент рассчитал, что если в конце каждого года он будет снимать со своего вклада по 380000 у.е., то по истечении двух лет его вклад составит 770000 у.е. Какой процент годовых по вкладу установлен в данном банке?

16.100. (МГУ, экономический, апрель 2003, 3(5)) Ежедневный прирост массы бамбука на бамбуковой плантации составляет 40%. В результате трех вырубок, проведенных с интервалом в один день, масса бамбука на плантации уменьшилась на 13% по сравнению с её первоначальным значением до начала вырубок. Определить, сколько процентов от первоначальной массы бамбука составляет общая масса вырубленного бамбука, если каждый раз вырубалось одно и то же количество бамбука.

16.101. (МГУ, химический, физико-химический, ФНМ, ФФМ, биолог., ФБиБ, географический, психологический, 2007, 7(8)) За 2005 год число книг в фонде библиотеки посёлка увеличилось на 0,4%, а за 2006 год — на 0,8%, оставшись при этом меньше 50 тысяч. На сколько книг увеличился фонд библиотеки посёлка за 2006 год?

16.102. (МГУ, экономический (отд. менеджмента), 2008, 4(6)) После жатвы фермер выяснил, что урожайность первого поля повысилась на 20%, а урожайность второго поля, в 2 раза большего по площади, упала на 10%. Определить, во сколько раз отличались ожидаемые показатели урожайности этих полей друг от друга, если общий объем собранного зерна превысил планируемый на 5%.

16.103. (МГУ, экономический, 1993, 5(6))
За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}\%$ и, наконец, 12,5% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}\%$. Определите срок хранения вклада.

Домашнее задание

16.104. (МГУ, “Ломоносов-2011”, заочный тур, 1(10))
Два куска сыра имеют форму прямоугольного параллелепипеда каждый. Длина первого куска на 50% больше длины второго куска, а ширина и высота первого куска соответственно на 20% и 30% меньше ширины и высоты второго куска. У какого куска сыра объём больше и насколько?

16.105. Вкладчик снял со своего счета в сбербанке сначала $\frac{1}{4}$ вклада, затем $\frac{4}{9}$ оставшихся и еще 640 рублей. После этого у него осталось на сберкнижке $\frac{3}{20}$ всех его денег. Как велик был вклад?

16.106. (ЕГЭ, 2003, B7 – *демоверсия*)
Владелец дискотеки имел стабильный доход. В погоне за увеличением прибыли он повысил цену на билеты на 25%. Количество посетителей резко уменьшилось, и он стал нести убытки. Тогда он вернулся к первоначальной цене билетов. На сколько процентов владелец дискотеки снизил новую цену билетов, чтобы она стала равна первоначальной?

16.107. (ЕГЭ, 2005, B9 – *демоверсия*)
Торговая база закупила у изготовителя партию альбомов и поставила ее магазину по оптовой цене, которая на 30% больше цены изготовителя. Магазин установил розничную цену на альбом на 20% выше оптовой. При распродаже в конце сезона магазин снизил розничную цену на альбом на 10%. На сколько рублей больше заплатил покупатель по сравнению с ценой изготовителя, если на распродаже он приобрел альбом за 70,2 р.?

16.108. (МГУ, филологический, 2005, 2(7))
На вступительном экзамене по математике 15% поступающих не решили ни одной задачи, 144 человека решили задачи с ошибками, а число остальных абитуриентов, верно решивших все задачи, относится к числу не решивших ничего, как 5 : 3. Сколько человек экзаменовалось по математике в этот день?

16.109. (ЕГЭ, 2007, В9 – *демоверсия*) **"Тест"**
Денежный вклад в банк за год увеличивается на 11%. Вкладчик внес в банк 7000 рублей. В конце первого года он решил увеличить сумму вклада и продлить срок действия договора еще на год, чтобы в конце второго года иметь на счету не менее 10000 рублей. Какую наименьшую сумму необходимо дополнительно положить на счет по окончании первого года, чтобы при той же процентной ставке (11%) реализовать этот план? (Ответ округлите до целых.)

16.110. (ЕГЭ, 2008, В9 – *демоверсия*)
В комиссионном магазине цена товара, выставленного на продажу, ежемесячно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый месяц уменьшалась цена магнитофона, если, выставленный на продажу за 4000 рублей, после двух снижений он был продан за 2250 рублей.

16.111. (МГУ, ИСАА, 2007, 2(7))
Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк $\frac{1}{6}$ часть от всей суммы, которую он должен был банку к этому времени. А еще через год в счет полного погашения кредита фермер внес в банк сумму, на 20% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

16.112. В январе завод выполнил 105% месячного плана выпуска готовой продукции, а в феврале дал продукции на 4% больше чем в январе. На сколько процентов завод перевыполнил двухмесячный план выпуска продукции?

16.113. Вследствие реконструкции оборудования производительность труда рабочего повышалась дважды на одно и тоже количество процентов. На сколько процентов возрастала каждый раз производительность труда, если за одно и то же время рабочий раньше вырабатывал изделий на 25 рублей, а теперь на 28 руб. 09 коп.?

16.114. Рабочий день уменьшился с 8 до 7 часов. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата возросла на 5%?

16.115. (МГУ, ф-т Государственного управления, 2001, 2(6)) В магазине одежды проводилась распродажа. Костюмы продавались со скидкой 20%, плащи — со скидкой 40%. Покупатель купил костюм и плащ за 9180 рублей в сумме, заплатив на 32% меньше их суммарной первоначальной цены. Найдите первоначальные цены костюма и плаща.

16.116. (МГУ, ф-т Государственного управления, 2008, 2(7)) Предприятие выплатило заработную плату своим сотрудникам, перечислило 26% от заработной платы в социальные фонды и закупило необходимое оборудование, кроме этого, предприятие ещё выплатило 15% от всех указанных затрат в виде налога государству. Для всех выплат предприятию потребовалось 202 400 рублей. Если бы заработная плата увеличилась на 10%, а затраты на оборудование возросли на 30%, то суммарные затраты в этом случае составили бы уже 234 140 рублей. Сколько средств предприятие потратило на заработную плату, а сколько — на закупку оборудования?

16.117. (МГУ, экономический, 2001, 2(7)) Брокерская фирма приобрела два пакета акций, а затем продала их на общую сумму 7 миллионов 680 тысяч рублей, получив при этом 28% прибыли. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40%, а при продаже второго — 20%?

16.118. (МГУ, экономический, 1971, 1(5))

Выработка продукции за год работы предприятия возросла на $p\%$, а на следующий год она возросла на 10% больше, чем в первый год. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%.

16.119. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2005, 6(8))

Общий процент прибыли за весь товар, проданный в трех магазинах, расположенных в разных районах города, составил 26,8%. Через первый магазин было продано 60% всего товара, через второй — 40% оставшейся части товара. С какой прибылью продан товар через третий магазин, если прибыль от продажи в первом составила 30%, а во втором — 25%?

16.120. (МГУ, социологический, 1997, 4(6))

В дошкольном учреждении провели опрос. На вопрос "Что Вы предпочитаете: кашу или компот?" бо́льшая часть ответила: "Компот", меньшая ответила: "Кашу", а один респондент затруднился ответить. Среди любителей компота 56,25% предпочитают абрикосовый, 37,5% — грушевый, а один затруднился ответить, какой компот он больше любит. Среди любителей каши 30% предпочитают манную кашу, а 70% — рисовую. Сколько детей было опрошено?

16.121. (МГУ, социологический, 1998, 3(6))

В университете города M 6% студентов обучались на платной основе, причем эта доля была одинакова на всех курсах. Летом 22% студентов были выпущены из стен университета, но за счет приема абитуриентов численность студентов составила $6/5$ от прежней. Определить, какая доля студентов будет обучаться на платной основе, если новый набор осуществлялся только на места, финансируемые из госбюджета.

16.122. (МГУ, социологический, 1999, 4(6))

Кандидат в депутаты за время избирательной кампании имеет право на одно бесплатное выступление в газете, а также на платные выступления по радио и телевидению. Выступление в газете увеличивает число сторонников кандидата на 1000 человек; каждое выступление по радио увеличивает количество голосов на 40% и стоит 32 тысячи рублей; каждое выступление по телевидению — на 80% и стоит 47 тысяч рублей. Определить количество и последовательность выступлений в средствах массовой информации, при которых кандидат получит наибольшее возможное число голосов, если за всю компанию можно израсходовать не более 112 тысяч рублей.

16.123. (МГУ, социологический, 2000, 2(6))

В городе N в течение 2 лет наблюдался рост числа жителей. Во втором году процент роста числа жителей города N увеличился на 1 по сравнению с процентом роста числа жителей в первом году. Найти процент роста числа жителей в первом году, если известно, что он на 5,2 меньше, чем процент роста за два года.

16.124. (МГУ, социологический, 2001, 3(6))

В городе N за последний год численность населения уменьшилась на 4%, а число безработных увеличилось на 5%. Сколько процентов от общего числа жителей составляют безработные, если год назад их было 8%.

16.125. (МГУ, социологический, 2002, 4(6))

Куплен товар двух сортов: первого на 1200 руб, и второго на 1500 руб. Товара второго сорта куплено на 10 кг больше, чем первого и по цене на 20 руб. за 1 кг меньше. Сколько куплено товара первого сорта?

16.126. (МГУ, социологический, 2003, 4(6))

В городе N на должность мэра на выборах баллотировались 3 кандидата: Акулов, Баранов, Воробьев. В начале предвыборной кампании предпочтения избирателей распределялись как $1 : 2 : 1$. По окончании предвыборной гонки 40% избирателей города N отказались участвовать в выборах, у остальных же предпочтения не изменились. Сколько процентов сторонников каждого кандидата отказались от голосования, если по окончании предвыборной гонки соотношение голосов стало 3 : 3 : 3,6?

16.127. (МГУ, социологический, апрель 2004, 3(6))
На факультете X отличники составляют 10% от общего количества студентов этого факультета, на факультете Y — 20%, а на факультете Z — лишь 4%. Найти средний процент отличников по всем трем факультетам, если известно, что на факультете Y учится на 50% больше студентов, чем на факультете X, а на факультете Z вдвое меньше, чем на факультете X.

16.128. (МГУ, социологический, 2004, 3(6))
Популярность продукта А за 2002 год выросла на 20%, в следующем году снизилась на 10%, а в конце 2004 года сравнялась с популярностью продукта Б. Популярность продукта Б в 2002 году снизилась на 20%, а затем на протяжении одного года не изменилась, а за 2004 год выросла на 40%. Как изменилась популярность продукта А за 2004 год, если в начале 2002 года она составляла $\frac{2}{3}$ от популярности продукта Б?

16.129. (МГУ, социологический, 2008, 5(7))
Среди учеников начальной школы провели опрос: кто любит зиму, а кто — лето. Оказалось, что 90% любителей зимы любят и лето, а 72% любителей лета любят и зиму. Зато 10% всех опрошенных не любят ни зимы, ни лета. Сколько процентов опрошенных любят только один из этих сезонов, но не любят другой? Каким при этом могло быть наименьшее число опрошенных?

16.130. (МГУ, ИСАА, 2005, 4(7))
Магазин закупил некоторое количество товара и начал его реализацию по цене на 25% выше цены, назначенной производителем, чтобы покрыть затраты, связанные с его транспортировкой, и другие дополнительные расходы. Оставшуюся после реализации часть товара магазин уценил на 16% с тем, чтобы покрыть только затраты на закупку этой части товара у производителя и его транспортировку. Сколько процентов от цены, назначенной производителем, составляла стоимость транспортировки товара?

16.131. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2006, 2(8)) Прибыль P предприятия за год определяется соотношением $P = A\sqrt{X} - X$, где X — расходы на производство, A — некоторая положительная постоянная. В 2004 году прибыль P оказалась положительной и составила 40% от расходов X. В 2005 году расходы выбраны так, чтобы прибыль была максимальной. Найдите отношение расходов в 2004 году к расходам в 2005 году.

16.132. (МГУ, Московская школа экономики, 2006, 4(7)) Антикварный магазин продал картину со скидкой в 10% по сравнению с первоначально назначенной ценой и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли магазин предполагал получить первоначально?

16.133. (МГУ, факультет Гос. управления, 2006, 5(7)) Четыре отраслевых предприятия K, L, M, N, обсуждая планы объединения усилий, установили, что без K три оставшихся будут контролировать 55% рынка отрасли; без L три другие — 60%; K, L, N без M — 66%; три предприятия без N — 73% рынка отрасли. Какова доля каждого из этих предприятий на рынке?

16.134. (МГУ, геологический, 1980, 4(5)) Магазин радиотоваров продал в первый рабочий день месяца 105 телевизоров. Каждый следующий рабочий день дневная продажа возрастала на 10 телевизоров, и месячный план 4000 телевизоров был выполнен досрочно, причем в целое число рабочих дней. После этого ежедневно продавалось на 13 телевизоров меньше, чем в день выполнения месячного плана. На сколько процентов был перевыполнен месячный план продажи телевизоров, если в месяце 26 рабочих дней?

16.135. (МГУ, экономический, 1995, 4(6)) В банк помещен вклад в размере 3900 тыс.р. под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

16.6 Целочисленные задачи

16.136. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2005, 1(8)) В турнире борцов участвуют 127 спортсменов. Борец выбывает из соревнований сразу после поражения в поединке. Сколько поединков требуется провести, чтобы выявить победителя турнира?

16.137. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к искомому числу прибавить 36, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

16.138. Для нумерации страниц учебника потребовалось 411 цифр. Сколько страниц в учебнике?

16.139. (МГУ, экономический, отд. менеджмента, 2005, 3(6)) В целях рекламы новой модели автомобиля автосалон установил скидку 10% на каждый седьмой продаваемый автомобиль и 20% на каждый одиннадцатый продаваемый автомобиль новой модели. В случае, если на один автомобиль выпадают обе скидки, то применяется бóльшая из них. Всего было продано 516 автомобилей этой модели. Определите выручку автосалона от продажи автомобиля новой модели, если ее базовая цена составляет 20 000 условных единиц.

16.140. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2004, 5(8)) Сколько времени в течение суток на электронном табло вокзальных часов, которые показывают время в диапазоне от 00:00 до 23:59, присутствует хотя бы одна цифра 3?

16.141. (МГУ, социологический, филологический, 2007, 3(8)) Один рабочий бригады, состоящей из 5 человек, производит в среднем 14 деталей в час, причём каждый из рабочих производит в час целое число деталей, не превышающее 16. Сколько деталей в час может делать при этих условиях рабочий с самой низкой производительностью?

16.142. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2005, 6(10))

В каждом подъезде нового дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. На восьмом этаже третьего подъезда первая квартира имеет номер 106. Какой номер имеет вторая квартира на третьем этаже шестого подъезда?

16.143.* (МГУ, химический, 1975, 2(5))

На второй остановке в автобус вошло на 12 человек больше, чем вышло на третьей остановке, а на третьей остановке вошло на 3 человека меньше, чем вышло на четвертой. Вошло на четвертой вдвое больше, чем на второй. На четвертую остановку приехало на 13 человек больше, чем уехало с первой. Что больше и на сколько, число человек, вошедших на второй остановке, или число человек, вышедших на второй остановке? Известно, что если бы на второй остановке вышло вдвое больше человек, чем вошло на третьей, то с четвертой остановки уехало бы на 9 человек больше, чем с первой.

16.144. (МГУ, экономический (отд. менеджмента), 1996, 3(6))

В контейнер упакованы изделия двух типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа и 600 тыс. руб. и 15 кг для второго типа. Общий вес изделий равен 321 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере изделий.

16.145. (МГУ, социологический, 2005, 6(6))

Группа школьников решила купить музыкальный центр, при этом каждый внес одинаковую сумму. Однако в последний момент двое из них забрали деньги назад, и каждому из оставшихся пришлось добавить по 100 руб. Сколько школьников первоначально участвовало в покупке и какова цена музыкального центра, если известно, что она заключена в пределах от 17000 до 19500 руб?

16.146.* (МГУ, химический, 1974, 4(5))

Двадцать четыре школьника разбились на две группы. Первая из них пошла в цирк, а вторая в кино. При этом оказалось, что на цирк и кино было затрачено одинаковое количество денег. Если бы билет в цирк стоил на 20 копеек дешевле, а билет в кино — на 20 копеек дороже, то, истратив на билеты в цирк и билеты в кино те же суммы денег, в цирк и кино смогли бы пойти вместе 15 школьников. Если бы при прежней стоимости билетов вторая группа школьников пошла в цирк, а первая группа — в кино, то на билеты в цирк ушло бы на 19 рублей 20 копеек больше, чем на билеты в кино. Сколько стоили билеты в цирк и кино?

16.147. (МГУ, филологический, 1988, 5(5))
За время t первый рабочий сделал на 3 детали больше второго. Затем второй рабочий увеличил производительность труда на 0,2 деталей в минуту и через некоторое целое число минут догнал и обогнал первого, работавшего с постоянной производительностью, на 2 детали. Найти наибольшее возможное время t.

16.148. (МГУ, мех-мат, 1992, 4(6))
Один рабочий на новом станке производит за один час целое число деталей, большее 8, а на старом станке — на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет дневную норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют ту же норму на старых станках на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма, если производительность рабочих на одинаковых станках одинакова.

16.149. (МГУ, экономический (отд. экономики), 2006, 4(7))
Две бригады однотипных тракторов задействованы на вспашке поля. Время вспашки поля одной первой бригадой отличается от времени вспашки поля одной второй бригадой не более, чем на $\frac{1}{25}$-ю часть времени вспашки поля одним трактором. Если сначала восьмая часть первой бригады вспашет первую половину поля, а затем пятая часть второй бригады вспашет оставшуюся половину поля, тогда затраченное на вспашку поля время составит $\frac{2}{9}$ от времени вспашки поля одним трактором. Определите количество тракторов в каждой бригаде.

16.150.* (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2007”, 10(10))
В течение четверти учитель по пению ставил детям оценки «1»,

«2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое всех оценок Вовочки оказалось равным в точности 3,5. И тогда, по предложению Вовочки, учитель заменил одну его оценку «4» парой оценок «3» и «5». Доказать, что от этого средняя оценка Вовочки по пению увеличилась. Найти наибольшее возможное ее значение после такой замены а) одной оценки «4»; б) всех его оценок «4»?

16.151.* (МГУ, ФФМ, май 2003, 3(7))

Количество сотрудников корпорации ежегодно возрастало в геометрической прогрессии и за 6 лет увеличилось на 20615 человек. Найти первоначальную численность сотрудников корпорации.

16.152.* (МГУ, экономический, 1984, 5(6))

Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго видов соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

16.153.*(Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2011, 10(10))

Имеются 12 карандашей попарно различной длины. Сколькими способами можно уложить их в коробку в 2 слоя по 6 карандашей так, чтобы в каждом слое карандаши были упорядочены по возрастанию длины (слева направо), а каждый карандаш верхнего слоя лежал строго над карандашом нижнего слоя и был короче его?

Домашнее задание

16.154. (МГУ, факультет Гос. управления, 2006, 1(7))

На розовом кусте каждое утро, начиная с понедельника, расцветают пять бутонов. Каждое утро садовник срезает три из них. Из скольких роз будет состоять букет, если в ближайшее воскресенье садовник срежет все розы?

16.155. (МГУ, "Ломоносов-2009", 1(9))
На сколько одно из двух положительных чисел больше другого, если их среднее арифметическое равно $2\sqrt{3}$, а среднее геометрическое равно $\sqrt{3}$?

16.156. Из данных четырех чисел первые три относятся между собой, как $\frac{1}{5} : \frac{1}{3} : \frac{1}{20}$, а четвертое составляет 15% второго числа. Найти эти числа, если известно, что второе число больше суммы остальных на 8 единиц.

16.157. (МГУ, почвоведения, 1993, 1(5))
Разделите число 128 на четыре части так, чтобы первая часть относилась ко второй как $2:3$, вторая к третьей — как $3:5$, а третья к четвертой— как $5:6$.

16.158. Произведение цифр двузначного числа в три раза меньше самого числа. Если к искомому числу прибавить 18, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

16.159. (МГУ, физический, 1983, 4(6))
После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7 и в остатке 6. После деления этого же двузначного числа на произведение его цифр в частном получается 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.

16.160. Найти такое трехзначное число, удвоив которое, мы получим число, выражающее количество цифр, необходимых для написания всех последовательных целых чисел от 1 до этого трехзначного числа.

16.161. (МГУ, экономический (отд. менеджмента), 2000, 2(6))
Интервалы движения маршрутных такси по трем маршрутам, начинающимся у станции метро, составляют 10, 12 и 15 минут соответственно. Сколько раз с $10^{\underline{40}}$ до $14^{\underline{20}}$ того же дня у этой станции метро одновременно встречаются такси всех трех маршрутов, если одна из таких встреч происходит в $13^{\underline{05}}$?

16.162. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2004, 5(8))

Сколько времени в течение суток на электронном табло вокзальных часов, которые показывают время в диапазоне от 00:00 до 23:59, присутствует хотя бы одна цифра 5?

16.163. (МГУ, химический, май 1998, 4(6))

Определить число студентов, сдавших экзамен, если известно, что шестая часть из них получила отметку "удовлетворительно", 56% получили оценку "хорошо", а 14 человек получили отметку "отлично", причем эти отличники составляют более 4%, но менее 5% от искомого числа студентов.

16.164. (МГУ, географический, 2002, 4(6))

Тележка с передними колёсами диаметром 30 см и задними колёсами диаметром 40 см движется по прямой дороге, проходящей через точки A и B. Между точками A и B ровно 100 метров. Точка A покрашена. Через точку A проезжают правые колёса тележки и в точках соприкосновения с ней красятся. В свою очередь, при каждом соприкосновении с дорогой эти точки оставляют свой след в виде точек на дороге. Никакие точки, кроме точки A колёса не окрашивают. Тележка движется по направлению от точки A в сторону точки B. Найдите: а) наименьшее расстояние между соседними окрашенными точками; б) количество окрашенных точек на отрезке AB.

16.165. (МГУ, географический, 2003, 3(5))

Непустое множество X состоит из конечного числа N натуральных чисел. Чётных чисел в X меньше двух третей от N, а нечётных не больше 36% от N. Какое минимальное значение может принимать число N?

16.166. (МГУ, Высшая школа гос. аудита, 2008, 7(9))

Из 102 школьников выпускных классов пятёрку по истории имеют 28 человек, по географии — 30, по математике — 25 человек. Среди тех, у кого пятёрка по истории, восемь школьников имеют пятёрку и по географии, и семеро — по математике, а среди имеющих пятёрку по географии у шестерых пятёрка и по математике. Трое имеют пятёрки по истории, географии и математике. Сколько школьников не имеют пятёрок ни по одному из этих предметов?

16.167. (ФМШ, 1995)

Группа школьников, состоящая из 30 человек, получила на экзаменах оценки 2, 3, 4 и 5. Сумма всех полученных оценок равна 93, причем троек было больше чем пятерок и меньше, чем четверок. Кроме того, число четверок делилось на 10, а число пятерок было четным. Определить, сколько каких оценок получили школьники.

16.168. (МГУ, почвоведения, май 2003, 3(6))

Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 8. Если же число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, разделить на разность цифры десятков и цифры единиц исходного числа, то в частном получится 15, а в остатке 2. Найти это число.

16.169. (МГУ, биологический, 1995, 4(6))

Саша и Сережа дважды обменивались марками, причем каждый раз $1/7$ количества марок, имевшихся (на момент обмена) у Саши, обменивались на половину количества марок, имевшихся у Сережи. Сколько марок было у Саши и сколько у Сережи до первого обмена, если после первого обмена у Саши было 945 марок, а после второго обмена у Сережи — 220?

16.170. (МГУ, филологический, 2003, 4(5))

В двух группах учится одинаковое количество студентов. Каждый студент изучает по крайней мере один язык: английский или французский. Известно, что 5 человек в первой и 5 во второй группе изучают оба языка. Количество изучающих французский в первой группе в 3 раза меньше, чем во второй. Количество изучающих английский во второй группе в 4 раза меньше, чем в первой. Каково минимально возможное количество студентов в одной группе?

16.171.* (МГУ, химический, 1975, 2(5))

В хоккейном матче, состоящем из трех периодов, команда A победила команду B с перевесом в две шайбы, причем ни одна из команд не забила шайб в свои ворота. В первом периоде команда A забила столько же шайб, сколько пропустила она в свои ворота во втором периоде, а в третьем периоде эта же команда забила на одну шайбу меньше, чем в первом. В первом периоде команда A пропустила вдвое больше шайб, чем в третьем. Что больше и на сколько, число шайб, забитых командой A во втором периоде, или число шайб, забитых командой B в третьем периоде? Известно, что если бы команда A забила во втором периоде столько же шайб, сколько она забила в первом, то она выиграла бы первые два периода с перевесом в пять шайб.

16.172. (МГУ, ВМиК, 2008, 5(6))

В шахматном турнире, проходившем по круговой системе (все участники играют между собой ровно один раз), участвовало $n \geq 17$ игроков. Если шахматная партия заканчивалась победой одного из игроков, то победитель получал 1 очко, а его соперник — 0 очков. Если партия между игроками заканчивалась вничью, то каждый игрок получал 0,5 очка. Известно, что по итогам турнира число участников, набравших не более пяти очков, равно 11. Сколько участников набрали по 8,5 очка? Ответ должен быть обоснован.

16.173. (МГУ, экономический, отд. экономики, 2005, 3(7))

Вновь созданное акционерное общество продало населению 1000 своих акций, установив скидку 10% на каждую пятую продаваемую акцию и 25% на каждую тринадцатую продаваемую акцию. В случае, если на одну акцию выпадают обе скидки, то применяется бóльшая из них. Определите сумму, вырученную от продажи всех акций, если цена акции составляет 1000 рублей.

16.174. (МГУ, Московская школа экономики, 2007, 5(8)) Для перевозки 90 т груза затребовали некоторое количество одинаковых грузовиков. В связи с тем, что на каждую машину погрузили на 0,75 т меньше, дополнительно было затребовано еще 4 грузовика. На сколько процентов увеличилось число грузовиков по сравнению с первоначальной заявкой?

16.175. (МГУ, экономический, отд. менеджмента, 2007, 5(6)) Для рытья котлована первоначально планировалось использовать звено экскаваторов одной модели, однако перед началом работы в звено было добавлено дополнительно 4 экскаватора той же модели. В результате котлован был вырыт на 3 часа ранее первоначально запланированного срока. Определите время, за которое котлован мог быть вырыт одним экскаватором, если в этом случае, при расходе топлива 20 кг в час, необходимое для работы экскаватора количество топлива находится в пределах от 1,2 до 1,71 тонн.

16.176. (МГУ, экономический, 2007, 4(7)) Бригаде грузчиков выделена некоторая сумма денег на разгрузку баржи, однако 3 человека заболели и в работе не участвовали. Оставшиеся выполнили задание, заработав каждый на 1,5 тысячи рублей больше, чем в случае работы в составе полной бригады. Определите выделенную бригаде сумму денег, если 5%-ный сбор за её банковский перевод обошелся работодателю дополнительно в величину, находящуюся в пределах от 1,2 до 1,6 тысяч рублей.

16.177. (МГУ, экономический, 1992, 3(6); ФГУ, 2009, 3(7)) Фабрика получила заказ на изготовление 6000 деталей типа P и 2000 деталей типа Q. Каждый из 214 рабочих фабрики затрачивает на изготовление 5 деталей типа P время, за которое он мог бы изготовить 3 детали типа Q. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

16.178. (МГУ, экономический, 1996, 4(6))
В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс. руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс. руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере изделий.

16.179. (МГУ, географический, 2005, 5(6))
В цехе имелось N одинаковых станков, которые, работая вместе, вытачивали в день по 5850 деталей. После модернизации число производимых в день каждым станком деталей возросло на 20%. Это позволило без сокращения общего объема продукции цеха уменьшить число станков максимум на 4. Найти N.

16.180.* (МГУ, экономический, 1990, 4(6))
Натуральные числа k, l, m, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2835 и 2646 делятся без остатка на l и m соответственно. Найти числа k, l и m, если известно, что при указанных условиях сумма $k + l + m$ максимальна.

16.181.* (ФМШ, 1988, 5(6))
Автоматы двух типов красили детали и все детали были покрашены за час. Определить число автоматов, если известно, что каждый из них мог бы покрасить все детали за целое число часов, общая сумма которых равна 55.

16.182.* (ЕГЭ, 2010, C6 – *диагностическая работа*)
Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа A за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа B за несколько рейсов, причём в этом случае число рейсов каждого автобуса типа B будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа A. В каждом из случаев автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа B входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа A?

Ответы, указания, решения

11.6. *Доказательство.* Умножим равенство на $2\sin\frac{\alpha}{2}$:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 3\alpha+\ldots+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos n\alpha=$$

$$=2\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\iff$$

(разложим каждое произведение синуса и косинуса в разность синусов по формуле $2\sin x\cos y=\sin(x+y)-\sin(y-x)$)

$$\sin\frac{3\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{5\alpha}{2}-\sin\frac{3\alpha}{2}+\sin\frac{7\alpha}{2}-\sin\frac{5\alpha}{2}+\ldots+\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-$$

$$-\sin\frac{(2n-1)\alpha}{2}=\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\iff$$

(в левой части равенства одинаковые слагаемые, встречающиеся со знаком “+” и “−” уничтожаются; остаются только самое “старшее” и самое “младшее”; они уничтожаются со слагаемыми в правой части равенства)

$$\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\iff 0=0.$$

11.18. 31.

11.25. *Доказательство.* Умножим и разделим левую часть равенства на $4\sin\dfrac{\pi}{5}$. По формуле $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$ заменим вначале $2\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5}$ на $\sin\dfrac{2\pi}{5}$, а затем $2\sin\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}$ на $\sin\dfrac{4\pi}{5}$:

$$\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{4\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{2\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=$$

$$\left(\text{по формуле } \sin\alpha=\sin(\pi-\alpha) \text{ заменим } \sin\frac{4\pi}{5} \text{ на } \sin\left(\pi-\frac{4\pi}{5}\right)\right)$$

$$=\frac{\sin\left(\pi-\frac{4\pi}{5}\right)}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{4}.$$

11.28. $-44{,}5$. **11.68.** 2. **11.69.** 4. **11.70.** $-0{,}5$. **11.71.** $-\frac{31}{17}$.

11.72. $-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|$. **11.73.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$. **11.74.** -1.
11.75. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

11.76. *Решение.* По формуле приведения имеем равенство

$$\sin 54^\circ = \cos 36^\circ.$$

Представим это равенство в виде

$$\sin(3\cdot 18^\circ) = \cos(2\cdot 18^\circ).$$

Заменим синус по формуле синуса тройного угла $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, а косинус заменим по формуле косинуса двойного угла $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$. Получим

$$3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$$

$$\iff 4\sin^3 18^\circ - 2\sin^2 18^\circ - 3\sin 18^\circ + 1 = 0.$$

Обозначим $\sin 18^\circ = x$. Относительно x имеем кубическое уравнение

$$4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0 \iff (x-1)(4x^2+2x-1) = 0$$

$$\iff x = 1;\ \frac{-1-\sqrt{5}}{4};\ \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Поскольку $\sin 18^\circ \neq 1$ и является положительным числом, то

$$\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

11.77. *Решение.* Обозначим $\alpha = \arcsin\dfrac{1}{3}$. Тогда $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$. Надо найти $\cos\alpha$. По формуле

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(перед корнем берем знак “+”, поскольку в промежутке $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ косинус неотрицателен).

11.78. $5-2\pi$.**11.79.** $\dfrac{3\pi}{2}$.**11.80.** $\dfrac{3}{2}$.**11.81.** $\dfrac{3}{2}$.**11.82.** $2\sqrt{3}$.**11.83.** 1.

11.84. 1.**11.85.** 1.**11.86.** 5.**11.87.** $-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.**11.88.** $-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

11.89. $-\sin\dfrac{\alpha}{4}$; $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **11.90.** $\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$. **11.91.** $\dfrac{24}{7}$. **11.92.** $\dfrac{2}{11}$.

11.93. $\dfrac{7+24\sqrt{3}}{50}$.**11.94.** 2.**11.95.** $\dfrac{1}{8}\Big(\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\Big)$.

11.96. $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$. **11.97.** $\sqrt{\dfrac{3}{8}}$. **11.98.** $\sqrt{10}-3$. **11.99.** 5. **11.100.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

11.101. 1; 2. **11.102.** $4\pi-10$. **11.103.** $4-\dfrac{\pi}{2}$.

12.1. $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$; $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.2.** $\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.3. *Указание.* Используя формулы половинных углов, перейдем к уравнению относительно $\cos 2x$:

$$\Big(\frac{1+\cos 2x}{2}\Big)^5+\Big(\frac{1-\cos 2x}{2}\Big)^5=\frac{29}{64}.$$

После возведения в пятую степень слагаемые с нечетными степенями уничтожаются и получается биквадратное относительно $\cos 2x$ уравнение.

Ответ. $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.4. $\dfrac{\pi k}{4}$, $\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{\pi k}{7}$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.5.** $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{6}$; $-\dfrac{\pi}{56}+\dfrac{k\pi}{28}$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.6. а) Да; б) например, $(\sin 3x-1)\Big(\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)=0$.

12.7. $\dfrac{12}{7}$.**12.8.** $\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.**12.9.** $\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.**12.10.** $\dfrac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.11. $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.12.** $-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$; $-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.13. $-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$; $-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.14. $-\dfrac{\pi}{12}+k\pi$; $-\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.15.** $2\pi+4k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.16. $4\pi k$, $(-1)^k\dfrac{2\pi}{3}+4\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.17.** $\pm\dfrac{\pi}{15}+\dfrac{k\pi}{5}$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.18. $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.19.** $\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k\pi}{5}$; $\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{k\pi}{7}$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.20. $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$; $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$; $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.21. $(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.22.** $\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k\pi}{5};\ -\dfrac{\pi}{15}+\dfrac{k\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}$.

12.23. $\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1-\sqrt{11}}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.24. $\dfrac{(-1)^k\arcsin(\sqrt{3}-1)+k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. **12.25.** $\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

12.26. $-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi;\ (-1)^k\arcsin\dfrac{3}{5}-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.27. $\operatorname{arctg}2+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.28. *Решение.* Если в уравнении $3\sin^2 x-5\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$ функция $\cos x=0$, то из уравнения следует, что и $\sin x=0$. Но одновременно косинус и синус одного аргумента в ноль не могут обращаться. Следовательно, $\cos x\neq 0$. Разделим на $\cos^2 x$ обе части исходного уравнения. Получим

$$3\operatorname{tg}^2 x-5\operatorname{tg}x+2=0\iff\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=1,\\ \operatorname{tg}x=\dfrac{2}{3},\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\\ x=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}+k\pi.\end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.29. $\operatorname{arctg}2+k\pi;\ \operatorname{arctg}3+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.30.** $-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.31. $\operatorname{arctg}2+k\pi;\ \operatorname{arctg}3+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.32. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.33.** $2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.34. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **12.35.** $\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.36. $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

12.37. $\pm\frac{\pi}{4}+k\pi;\ \pm\operatorname{arctg}2+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

12.38. $\operatorname{arctg}\frac{5+\sqrt{34}}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

12.39. *Решение.* Решаем тригонометрическое уравнение с помощью введения дополнительного угла. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$. Введем угол φ такой, что $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$, $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Нетрудно видеть, что в качестве такого угла годится угол $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Получим

$$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}\iff\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=\frac{1}{2}$$

$$\iff \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{1}{2} \iff \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ x+\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.40. $\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}$. **12.41.** $\frac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **12.42.** $x \in \mathbb{R}$.
12.43. $2k\pi$; $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.44.** $k\pi$; $\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
12.45. $-\frac{\pi}{12} + 2k\pi$; $-\frac{7\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
12.46. $\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}; \frac{3\pi}{100} + \frac{2k\pi}{25}, k \in \mathbb{Z}$. **12.47.** $-\frac{\pi}{108} + \frac{k\pi}{9}; \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
12.48. $\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{4}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **12.49.** $\frac{2\pi}{3} + k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
12.50. $[-\sqrt{97}; \sqrt{97}]$. **12.51.** $(1 + (-1)^k)\arcsin\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
12.52. $\frac{\pi}{15} - \frac{1}{5}\arcsin\frac{3}{5} + \frac{2k\pi}{5}$; $\frac{2\pi}{3} - \arcsin\frac{3}{5} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

12.54. *Решение.* Заданное уравнение является симметрическим относительно $\sin x$ и $\cos x$. Сделаем замену $\sin x + \cos x = t$. Тогда $\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = t^2 \Leftrightarrow 1 + 2\sin x\cos x = t^2 \Leftrightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$. Относительно t получим уравнение, которое решаем введением дополнительного угла.

$$t - \frac{t^2-1}{2} = 1 \iff t^2 - 2t + 1 = 0 \iff (t-1)^2 = 0 \iff t = 1$$

$$\iff \sin x + \cos x = 1 \iff \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ x+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 2l\pi, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2l\pi, \end{array}\right. \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $2k\pi$; $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.55. $2k\pi$; $\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **12.56.** $f_{\min}=1-4\sqrt{2}$; $f_{\max}=1+4\sqrt{2}$.
12.57. $-\pi+2k\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.58.** $\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.59. $\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.60.** $2k\pi$; $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.61. $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $\pi+2k\pi$, $\frac{5\pi}{4}+\arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}}+2k\pi$, $\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$. **12.62.** $\frac{\pi}{4}+k\pi$; $\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.63.** $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.65. $\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.66.** $-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.67. $k\pi$; $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+k\pi$; $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.68.** 2.
12.69. $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.70.** $\frac{\pi}{2}+k\pi$; $\frac{\operatorname{arctg}2+k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.71. $k\pi$; $-\frac{\pi}{12}+2k\pi$; $-\frac{5\pi}{12}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.72.** $k\pi$; $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.73. $2k\pi$; $\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}+2k\pi$; $2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.74. $\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.75.** $k\pi$; $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.76. $\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.77.** $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\frac{5\pi}{12}+2k\pi$, $\frac{13\pi}{12}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.78. $-\frac{11\pi}{24}+k\pi$; $-\frac{7\pi}{24}+k\pi$; $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.79.** $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.80. $2k\pi$; $-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.81.** $-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}+2k\pi$; $-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.82.** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.83. $\frac{17\pi}{6}+4k\pi$; $\frac{\pi}{6}+\frac{8k\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{18}+\frac{8k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.84. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$. **12.85.** $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.86. $k\pi$; $\frac{2\pi}{3}+k\pi$; $\frac{5\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.87.** $x=n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$.
12.88. $-\frac{\pi}{10}+\frac{2l\pi}{5}$, $l\neq 5n-1$, $l,n\in\mathbb{Z}$. **12.89.** $-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.90. $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.91.** $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.92. $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.94.** $\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.95. $\frac{k\pi}{10}$, $k \neq 5 + 10l$, $k, l \in \mathbb{Z}$. **12.96.** $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.97. $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $\pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.98.** $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.99. $\frac{\pi}{10} + \frac{2l\pi}{5}$, $l \neq 5n + 1$, $l, n \in \mathbb{Z}$.

12.100. $\frac{\pi}{12} + \frac{l\pi}{6}$; $\frac{k\pi}{3}$, $k \neq 3(2m + 1)$, $k, l, m \in \mathbb{Z}$.

12.101. $\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$: $\frac{7\pi}{3}$, $3\pi - \arccos\frac{1}{3}$.

12.102. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$. **12.103.** $\frac{\pi}{30}$, $\frac{11\pi}{30}$, $\frac{61\pi}{30}$. **12.104.** 1. **12.106.** $\frac{4}{3}$.

12.107. $-\frac{23\pi}{6}$, $-\frac{19\pi}{6}$, $-\frac{11\pi}{6}$, $-4\arccos\left(-\frac{9}{10}\right)$ **12.108.** $\frac{5\pi}{3}$.

12.109. $\frac{3\pi}{2}$; $2\pi - \arccos\frac{2}{5}$; 2π. **12.110.** $-\frac{19\pi}{200}$; $\frac{131\pi}{200}$. **12.111.** $\frac{11\pi}{30}$.

12.112. $\frac{3\pi}{4}$; π. **12.113.** $\pm\frac{\pi}{2}$.

12.114. $\pi - \alpha$; $2\pi + \alpha$; $3\pi - \alpha$, где $\alpha - \arcsin(\sqrt{2} - 1)$. **12.115.** $\frac{7\pi}{2}$.

12.119. $2k\pi$, $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.120.** $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.121. $(-2\pi; -\pi] \bigcup \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} \bigcup [0; \pi] \bigcup \left\{\frac{3\pi}{2}\right\} \bigcup \{2\pi\}$. **12.122.** 1.

12.123. $x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \bigcup \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$.

12.124. $3 - \frac{\pi}{2}$, $3 - \frac{5\pi}{2}$, $1 - \frac{\pi}{6}$, $1 + \frac{\pi}{6}$, $1 + \frac{\pi}{2}$, $1 - \frac{13\pi}{6}$, $1 - \frac{11\pi}{6}$, $1 - \frac{3\pi}{2}$.

12.125. $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.126.** $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.127.** $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.128. $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.129.** $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$; $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.130. $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.131.** $-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.133. $(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{4} + k\pi$, $(-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.135. $\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.136.** $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.137. $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.138. $8k\pi,\ 8k\pi+3\pi,\ 8k\pi+5\pi,\ \dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{4k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$

12.139. $(-1)^k\arcsin\dfrac{\sqrt5-1}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.140. $\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ \pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.141.** $0;\ \dfrac{3\pi}{4}.$ **12.143.** $5\pi.$

12.144. $2k\pi;\ -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.145.** $\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.146. $\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.147.** $\operatorname{arcctg}\dfrac{3}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.148. $-\dfrac{\pi}{12}+2k\pi,\ -\dfrac{11\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.149.** $\pm\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.150. $\operatorname{arcctg}3+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.151.** $\pi+\operatorname{arcctg}2+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.152. $-\dfrac{\pi}{36}+k\pi,\ \dfrac{23\pi}{36}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.153. $k\pi;\ -\arccos\dfrac{-3+\sqrt2}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.154.** $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.155. $k\pi;\ (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\ (-1)^k\arcsin\dfrac{1-\sqrt5}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.156. $\pm\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.158.** $\dfrac{\pi}{12}+2k\pi;\ k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.159. $k\pi;\ \dfrac{2\pi}{3}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{12}+2k\pi;\ \dfrac{19\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.160. $(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.161.** $\left[0;\ \dfrac{\pi}{3}\right].$

12.162. $\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ n=8k,8k+3,8k+5,8k+6;\ \dfrac{4k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$

12.163. $\pm\arcsin\dfrac{1+\sqrt3}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.165.** $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.166. $\dfrac{(-1)^k\arcsin\frac13+k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.167.** $2\pi\pm\arccos\log_2(\sqrt6-1).$

12.168. $-\dfrac{8}{5};\ -\dfrac{24}{23};\ \dfrac{8}{7};\ \dfrac{24}{17}.$ **12.169.** $(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.170. $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ **12.171.** $\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.174. $[6;\ 2\pi)\bigcup\left(2\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right)\bigcup\left(\dfrac{5\pi}{2};\ 8\right].$

12.175. $2k\pi;\ \pi+2l\pi,\ k,l\in\mathbb{Z},\ k\ge-1,\ l\le-3.$

12.176. $\operatorname{arctg}5+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

12.177. $(-\pi+4k\pi;\ 4k\pi)\cup(4k\pi;\ \pi+4k\pi),\ k\in\mathbb{Z}.$

12.179. $\dfrac{5\pi}{6};\ \dfrac{17\pi}{6}.$ **12.181.** $(-1)^{n+1}\arcsin\dfrac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$

12.182. $\pm\arccos\left(-\frac{1}{9}\right)+2k\pi$, $\pm\arccos\left(-\frac{5}{9}\right)+2k\pi$, $\pm\arccos\frac{7}{9}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.183.** $\pi-\arcsin\frac{-1+\sqrt{37}}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.184. $\frac{3\pi}{4}+\frac{4k\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{12}+\frac{4k\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{18}+\frac{4k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.185. $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.186.** $\frac{5\pi}{8}+2k\pi$; $\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.187. $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.188.** $\pm\arccos\frac{2}{11}+2k\pi$, $\pm\arccos\frac{6}{11}+2k\pi$, $\pm\arccos\left(-\frac{10}{11}\right)+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.190. $-\pi+24k\pi$, $7\pi+24k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.191.** $\frac{13\pi}{5}$. **12.193.** 8.
12.194. 0. **12.195.** $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.196. $\begin{cases}x=\frac{2\pi+2}{15},\\ y=\pm\arcsin\sqrt{\frac{\pi-2}{3}}+\pi k,\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{-2\pi-4}{15},\\ y=\pm\arcsin\sqrt{\frac{4-\pi}{3}}+\pi k,\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$.
12.197. $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{23\pi}{12}$. **12.198.** $k\pi$; $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.199. $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.200.** $\emptyset$. **12.201.** $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.202. $\left(1;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$; $\left(-1;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.203. $k\pi$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.204.** $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.205. $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.206.** $\emptyset$. **12.207.** $\emptyset$. **12.208.** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.209. 5. **12.212.** 0. **12.213.** 0, $\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.214. $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.215.** $2\pi+8k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.216. $2k\pi$; $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.217.** $\emptyset$. **12.218.** $\emptyset$.
12.219. $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.220.** $\emptyset$.
12.221. $\left(-\operatorname{arctg}\sqrt{2}+l\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$; $\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}+l\pi, -\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)$, $k,l\in\mathbb{Z}$.
12.222. $\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.223.** $\frac{\pi}{2}+k\pi$; $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
12.224. $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.225.** $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **12.226.** $\emptyset$. **12.227.** $\emptyset$.
12.228. $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+n\pi\right)$; $\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi, -\frac{\pi}{4}+n\pi\right)$, $k,n\in\mathbb{Z}$.
12.229. $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$, $k,n\in\mathbb{Z}$. **12.230.** $\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

12.232. $\dfrac{\pi}{1+\frac{\pi}{180}}$.

12.234. $\left(\dfrac{\pi}{3}+m\pi, \dfrac{\pi}{3}+n\pi\right)$; $\left(-\dfrac{\pi}{3}+m\pi, -\dfrac{\pi}{3}+n\pi\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

12.235. $\left(\dfrac{\pi}{3}+2m\pi, \dfrac{\pi}{3}+2n\pi\right)$; $\left(-\dfrac{\pi}{3}+2m\pi, -\dfrac{\pi}{3}+2n\pi\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

12.237. $\dfrac{\pi}{15}+\dfrac{k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}$. **12.238.** $\pm\sqrt{2k\pi}; -1\pm\sqrt{1+2k\pi}, k=0,1,2,\ldots$

12.240. 3π. **12.241.** $\left(-\dfrac{\pi}{2}+2m\pi, \dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

12.242. $\left(\dfrac{\pi}{6}+m\pi, \dfrac{\pi}{6}+n\pi\right)$; $\left(-\dfrac{\pi}{6}+m\pi, -\dfrac{\pi}{6}+n\pi\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

12.243. $\left(\dfrac{\pi}{6}+2m\pi, \dfrac{\pi}{6}+2n\pi\right)$; $\left(\dfrac{5\pi}{6}+2m\pi, \dfrac{5\pi}{6}+2n\pi\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

12.244. $\left(\dfrac{2\pi}{3}+m\pi, \dfrac{2\pi}{3}+n\pi\right)$; $\left(-\dfrac{2\pi}{3}+m\pi, -\dfrac{2\pi}{3}+n\pi\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

12.245. $\left(\dfrac{\pi}{3}+2m\pi, \dfrac{\pi}{3}+2n\pi\right)$, $m, n \in \mathbb{Z}$. **12.247.** $[3\sqrt{2}; 6]$.

12.248. $\cos\dfrac{3\pi}{10}$. **12.249.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **12.250.** 4.

12.251. $\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}$. **12.252.** $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

12.253. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; $-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$. **12.254.** -1. **12.255.** 3. **12.256.** $\dfrac{1}{2}$.

12.257. 0; $\dfrac{1}{2}$. **12.258.** $-\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{10}$; $\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{10}$. **12.259.** 3. **12.260.** -3.

12.261. 9. **12.262.** $\sqrt{3}$. **12.263.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **12.264.** 2. **12.265.** 1.

12.266. $\sin\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

12.267. $\left(\dfrac{-13-\sqrt{481}}{10}, \dfrac{-13+\sqrt{481}}{10}\right)$; $\left(\dfrac{-13+\sqrt{481}}{10}, \dfrac{-13-\sqrt{481}}{10}\right)$.

12.268. 2.**12.269.** $\dfrac{-7+\sqrt{17}}{8}$.**12.270.** $c \in (-\infty; -\pi) \cup [\pi; +\infty)$.

12.271. $\min a = \dfrac{1}{2}$; $\max a = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{9}}$. **12.272.** 0; $\dfrac{9+\sqrt{81+12\pi}}{2}$.

12.273. $\left(-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}+l\pi, \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}-l\pi\right)$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

12.275. $(0, 2k\pi) \cup (2, 2k\pi) \bigcup \left(-1, \dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\right) \bigcup \left(3, \dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\right)$,

$k \in \mathbb{Z}$.

12.276. $\left(\dfrac{\pi}{6}+2n\pi,\ (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{3}+k\pi\right)$; $\left(\dfrac{5\pi}{6}+2n\pi,\ (-1)^{k}\dfrac{\pi}{3}+k\pi\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

12.277. $\left(x_k, \dfrac{\pi}{4}+k\pi-x_k\right)$; $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq -2, -1, 0, 1$, где $x_k = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)^2 - 36}$. **12.278.** $\left((-1)^n\dfrac{\pi}{4}+n\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

12.279. $\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}, \pi+2m\pi\right)$, $k, m \in \mathbb{Z}$. **12.280.** $1+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.281. $\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}+l\pi, \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}-l\pi\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}+l\pi, \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}-l\pi\right)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. **12.282.** $\left((-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+k\pi, 2l\pi\right)$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

12.283. $\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \pm\dfrac{\pi}{3}+2l\pi\right)$; $\left(-\dfrac{\pi}{12}+2k\pi, 2l\pi\right)$; $\left(-\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi, 2l\pi\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{12}+2k\pi, \dfrac{\pi}{2}+l\pi\right)$; $\left(\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi, \dfrac{\pi}{2}+l\pi\right)$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

12.284. $(-\pi, -\pi)$; $(0, -2\pi)$; $(\pi, -\pi)$.

12.285. $\left(\pm\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, (-1)^l\dfrac{\pi}{4}+l\pi\right)$, $\left(\pm\dfrac{\pi}{4}+2k\pi, (-1)^l\dfrac{\pi}{3}+l\pi\right)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. **12.286.** $\left(\dfrac{\pi}{24}+k\pi, \dfrac{5\pi}{24}-k\pi\right)$; $\left(\dfrac{5\pi}{24}+k\pi, \dfrac{\pi}{24}-k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.287. $\left(n\pi, \dfrac{\pi}{4}-n\pi\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi, -k\pi\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

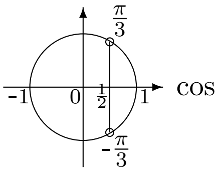
12.288. $\left(-\dfrac{\pi}{3}+2n\pi, -\dfrac{5\pi}{6}+2m\pi\right)$; $\left(-\dfrac{\pi}{6}+2n\pi, -\dfrac{2\pi}{3}+2m\pi\right)$; $\left(\dfrac{5\pi}{6}+2n\pi, \dfrac{\pi}{3}+2m\pi\right)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

12.289. $\left(\dfrac{5\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}, \dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

12.290. $\left(\dfrac{\pi}{12}\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2-3\sqrt{3}}{6}+k\pi, \dfrac{5\pi}{12}\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2-3\sqrt{3}}{6}+k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.291.** $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$.

12.292. $(2k\pi, 2l\pi)$; $\left(2k\pi \pm \dfrac{2\pi}{3}, 2l\pi \mp \dfrac{2\pi}{3}\right)$; $\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\pm\arccos\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{4}+2k\pi, \pm\dfrac{\pi}{6}\mp\arccos\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{4}+2l\pi\right)$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

13.1. *Решение.* Решение неравенства будем проводить, используя тригонометрический круг и ось косинусов. Отметим на оси косинусов точку $\frac{1}{2}$ и восстановим перпендикуляр к оси до пересечения с тригонометрическим кругом. Отметим на тригонометрическом круге точки пересечения и дугу, которая является решением неравенства. Выпишем ответ, добавляя период косинуса 2π.



$$-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3},$$

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right),\ \ k \in \mathbb{Z}.$

13.2. $\left(-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.3. $\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.5. $\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.6. $\left(\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2k\pi;\ \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.7. $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **13.8.** $(k\pi; \operatorname{arcctg}(-3) + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.9. $(2\pi - 6 + 2k\pi;\ 6 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. **13.10.** $\left(\frac{1}{3};\ 1\right]$.

13.11. $(-\sqrt{3};\ +\infty)$. **13.12.** $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.13. $\left(-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.14. $\left(-\frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.15. $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ -\operatorname{arctg} 2 + k\pi\right] \bigcup \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi;\ \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.17. $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **13.18.** $[1;\ 2) \cup (2;\ \sqrt{5}]$.

13.19. $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ -\frac{\pi}{4} + k\pi\right] \bigcup \left[\frac{\pi}{4} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.20. $\left(-\arccos\frac{1}{4} + 2k\pi;\ \arccos\frac{1}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

13.21. $\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.22. $\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi;\ \frac{9\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

13.23. $\left(-\arcsin\dfrac{1}{3}+2k\pi;\ \pi+\arcsin\dfrac{1}{3}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.24. $\left[\operatorname{arctg}2+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.25.** $\left[\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\pi+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.26. $[-1;\ 1]$. **13.27.** $(-\infty;\ \operatorname{ctg}2)$.

13.29. $\left(-\sqrt{\dfrac{\pi}{6}};\ \sqrt{\dfrac{\pi}{6}}\right)\bigcup\left(-\sqrt{\dfrac{\pi}{6}+2k\pi};\ -\sqrt{-\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi}\right)\bigcup$ $\left(\sqrt{-\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi};\ \sqrt{\dfrac{\pi}{6}+2k\pi}\right)$, $k=1,2,\ldots$.

13.30. $\left(2k\pi-\pi+\arcsin\dfrac{3}{5};\ \arcsin\dfrac{3}{5}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.31. $\left[\dfrac{\pi}{6}+2k\pi;\ \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.32. $\left(\arccos\dfrac{1}{5}+2k\pi;\ 2\pi-\arccos\dfrac{1}{5}+2k\pi\right)\bigcup\left(-\arccos\dfrac{1}{4}+\right.$ $\left.2k\pi;\ \arccos\dfrac{1}{4}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.34. $\left(k\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+k\pi\right]\bigcup\left\{\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\right\}$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.35. $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.36.** $\left(\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\dfrac{2\pi}{3}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.37. $\left[\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;\ \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.38. $\left(-\dfrac{7\pi}{12},-\dfrac{\pi}{2}\right]\bigcup\left[0,\dfrac{\pi}{12}\right)$.

13.39. $\left[-\dfrac{\pi}{4};\ +\infty\right)\bigcup\left[-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+k\pi\right]$, $k=-1,-2\ldots$.

13.40. $\left[2k\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right]$, $n\in\mathbb{Z}$. **13.41.** $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.42. $\left(\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi;\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.45.** $\left(2\pi k;\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.46. $\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. **13.48.** $\left(-\dfrac{7\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2};\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.49. $[-13;-4\pi)\bigcup\left(-4\pi;-\dfrac{11\pi}{3}\right)\bigcup\left(-\dfrac{7\pi}{3};-2\pi\right)\bigcup\left(-2\pi;-\dfrac{5\pi}{3}\right)$ $\bigcup\left(-\dfrac{\pi}{3};\ -1\right]$.

13.50. $f(x)=2$ при $x\in$ ОДЗ $=\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.51. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.52. $\left(\dfrac{\pi}{6}+2k\pi;\ \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)\bigcup\left(\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.54. $\left(\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{3\pi}{4}\right)\bigcup\left(\dfrac{5\pi}{6};\ \pi\right]$.

13.55. $\left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)\bigcup\left(\dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{2\pi}{3}\right)\bigcup\left(\dfrac{3\pi}{4};\ \pi\right)\bigcup\left(\dfrac{5\pi}{4};\ \dfrac{4\pi}{3}\right)\bigcup\left(\dfrac{5\pi}{3};\ \dfrac{7\pi}{4}\right)$.

13.56. $\left(\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi;\ \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\bigcup\left(\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi;\ \dfrac{4\pi}{3}+2k\pi\right)\bigcup$ $\left(-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.57. $\left(2k\pi;\ \dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)\bigcup\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;\ \dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\bigcup$ $\left(\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right)\bigcup\left(\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi;\ 2\pi+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.58. $\left(k\pi;\ \dfrac{\pi}{6}+k\pi\right)\bigcup\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ \dfrac{5\pi}{6}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.59. *Решение.* Преобразуя произведение косинусов в сумму косинусов по формуле $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-\beta)+\cos(\pi-\gamma) = \cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma$, получим эквивалентное неравенство

$$4\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma\big)\cos\gamma\le 1 \iff 4\cos^2\gamma-4\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)+1\ge 0$$

$$\iff \big(2\cos\gamma-\cos(\alpha-\beta)\big)^2+1-\cos^2(\alpha-\beta)\ge 0.$$

Последнее неравенство выполняется, поскольку первое слагаемое есть полный квадрат и, следовательно, неотрицательно, разность $1-\cos^2(\alpha-\beta)$ неотрицательна, так как косинус по модулю не превышает единицы.

13.66. 2. **13.67.** $(1;\ +\infty)$. **13.68.** $\left[\dfrac{3}{4};\ \dfrac{4}{5}\right)$.

13.69. $\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi;\ 2\pi+2k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **13.70.** $[-\sqrt{10};\ 1]$.

13.71. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};1\right]$. **13.72.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. **13.73.** $\left[0;\dfrac{1}{2}\right)$. **13.74.** $[-1;0)$.

13.75. $\dfrac{1}{3}$. **13.76.** $\left(-1;\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]\bigcup\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right)$. **13.77.** $(1, k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

13.78. $\left(-\infty;\ \dfrac{4\pi+18}{5}\right]\bigcup[8\pi-18;\ 18-3\pi]$.

14.1. Нет. Например, числа 1; 2; $\sqrt{2}$ не являются членами никакой арифметической прогрессии.

14.2. 6, 8, 10, 12.

14.3. *Решение.* Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — искомая арифметическая прогрессия, d — разность этой прогрессии. Тогда $a_5 = a_1 + 4d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$ и условия задачи запишутся в виде системы:

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = \dfrac{5}{3}, \\ a_3 \cdot a_4 = \dfrac{65}{72}, \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 + a_1 + 4d = \dfrac{5}{3}, \\ (a_1 + 2d)(a_1 + 3d) = \dfrac{65}{72}, \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} a_1 + 2d = \dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{5}{6}\left(\dfrac{5}{6} + d\right) = \dfrac{65}{72}, \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = \dfrac{5}{6} - 2d, \\ \dfrac{5}{6} + d = \dfrac{13}{12}, \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}, \\ d = \dfrac{13}{12} - \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Найдем сумму первых 17 членов арифметической прогрессии по формуле $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$:

$$S_{17} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3} + (17-1) \cdot \frac{1}{4}}{2} \cdot 17 = \frac{\frac{2}{3} + 4}{2} \cdot 17 = \frac{7}{3} \cdot 17 = \frac{119}{3}.$$

14.4. 2. **14.5.** 44. **14.6.** 810. **14.7.** 462462. **14.8.** $a_1 = 3$, $d = 4$. **14.9.** $1, 9, 17$. **14.10.** $a_1 = 3$, $d = 6$. **14.11.** 2 грамма. **14.12.** 33. **14.13.** 8 членов. **14.14.** Имеется 10 чисел вида $2 + 15p$, $p = 1, \ldots, 10$. **14.15.** 3997. **14.16.** $2^{1001} - 4$. **14.17.** $2^{2000} \cdot 3^{1999000}$. **14.18.** 4004001. **14.19.** $-3\sqrt[4]{\dfrac{51}{196}}$. **14.20.** 24. **14.22.** $a = -5$; $-\dfrac{5}{13}$. **14.23.** $(2, -1, -4, \ldots)$; $(-10, -7, -4, \ldots)$.
14.24. Можно. С 8 руб. 50 к. по 16 руб. 00 к. включительно.
14.25. За 8 часов. **14.26.** -9. **14.27.** $a_1 = 2$, $d = 3$. **14.28.** $a_1 = 1$ или $a_1 = 4$, $d = -\frac{1}{5}$. **14.29.** $x = 1$; $d = -6$. **14.30.** $a_1 = 3$. **14.31.** 24. **14.32.** -150. **14.33.** $a_{12} = 17$. **14.34.** 28. **14.35.** 2. **14.36.** $S_6 \in \{0; 3\}$. **14.37.** 50. **14.38.** 9. **14.39.** 119. **14.40.** 5. **14.41.** 82350. **14.42.** $a_1 = 12$, $d = 4$. **14.43.** 41. **14.44.** $a_1 = 11$. **14.45.** $-20{,}5$; 10. **14.46.** 1 : 1. **14.47.** -292. **14.49.** 0. **14.50.** $n = 6$, $S_6 = -66$. **14.51.** $S_8 = 56$.
14.52. Имеется 14 чисел вида $23 + 28(m-1)$, $m = 1, \ldots, 14$.
14.53. $S_{100} = 15050$, $b_{40} = 81$. **14.54.** $3^{2000} \cdot 4^{1999000}$. **14.55.** 4008004. **14.56.** $-5\sqrt[4]{\frac{7}{202}}$. **14.57.** Может.

15.1. Нет. Например, числа 1; 1; 2 не являются членами никакой геометрической прогрессии.

15.2. -1. **15.3.** 4. **15.4.** 70. **15.5.** 30.

15.6. *Решение.* Обозначим b_1, b_2, b_3, b_4 ($b_1 \neq 0$) — четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, q — её знаменатель ($q \neq 0$). Выразим числа b_2, b_3, b_4 через первый член прогрессии b_1 и её знаменатель q. Получим, $b_2 = b_1q$, $b_3 = b_1q^2$, $b_4 = b_1q^3$. По условию задачи имеем систему

$$\begin{cases} b_1 + b_4 = -49, \\ b_2 + b_3 = 14, \end{cases} \iff \begin{cases} b_1 + b_1q^3 = -49, \\ b_1q + b_1q^2 = 14, \end{cases} \iff \begin{cases} b_1(1 + q^3) = -49, \\ b_1q(1 + q) = 14. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение последней системы на второе

$$\frac{b_1(1+q^3)}{b_1q(1+q)} = -\frac{49}{14} \iff \frac{1+q^3}{q(1+q)} = -\frac{7}{2} \iff \begin{cases} 2(1+q^3) = -7q(1+q), \\ q \neq -1. \end{cases}$$

Решим первое уравнение последней системы, предварительно разложив $1 + q^3$ как сумму кубов $1^3 + q^3$ в произведение и разделив обе части уравнения на $1 + q \neq 0$,

$$2(1+q^3) = -7q(1+q) \iff 2(1+q)(q^2-q+1) = -7q(1+q) \iff$$

$$2(q^2-q+1) = -7q \iff 2q^2+5q+2 = 0 \iff q = -2,\ q' = -\frac{1}{2}.$$

Поэтому $b_1 = -\dfrac{49}{1+q^3} = 7$, $b_1' = -56$.

В итоге имеем два набора чисел, которые являются перестановкой в обратном порядке друг друга:

$(7, -14, 28, -56)$; $(-56, 28, -14, 7)$.

Ответ. $(7, -14, 28, -56)$; $(-56, 28, -14, 7)$.

15.7. 162. **15.8.** $\dfrac{\overbrace{1\ldots1}^{n}0 - n}{9}$. **15.9.** 20.

15.10. $\dfrac{-1+\sqrt{1+\frac{8n}{5}}}{2}$, где $n=6, 7, \ldots, 250$. **15.11.** $(9, 3, 1)$;$(1, 3, 9)$.

15.12. 573. **15.13.** Нет, не могут. **15.14.** $a=7$; $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=8$.

15.15. $(7,-28,112,-448)$; $\left(-\dfrac{35}{3},-\dfrac{140}{3},-\dfrac{560}{3},-\dfrac{2240}{3}\right)$.

15.16. $(9,3,1);(1,3,9)$. **15.17.** 48 и $\dfrac{1}{4}$; 3 и 4. **15.18.** $\dfrac{1}{2}$. **15.19.** ± 6.

15.20. $-5^{-\frac{5}{3}}$. **15.21.** 2. **15.22.** -2. **15.23.** 12.

15.24. $\dfrac{\overbrace{7\ldots7}^{n}0-7n}{9}$. **15.25.** $(8,4,2)$; $(2,4,8)$. **15.26.** 194.

15.27. $b_1=-2,\ q=-3;\quad b_1'=54,\ q'=-\dfrac{1}{3}$.

15.28. $\dfrac{4+\sqrt{16+40n}}{5n}$, где $n=4,5,\ldots,100$. **15.29.** 39. **15.31.** $\left(\dfrac{s}{\sigma}\right)^{\frac{n}{2}}$.

15.32. $\dfrac{4^{n+1}}{3}-\dfrac{1}{3\cdot 4^n}+2n-1$. **15.33.** Существует.

15.34. $k=-\frac{1}{5}$. **15.36.** 1. **15.37.** $\frac{1}{8}$.

15.38. *Решение.* Слагаемые, начиная со второго, $x,x^2,x^3,\ldots$ образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $b_1=x$ и знаменателем $q=x$ ($|q|<1$). По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S_\infty=\frac{b_1}{1-q}\iff x+x^2+x^3+\ldots=\frac{x}{1-x}.$$

Следовательно, имеем уравнение:

$$\frac{1}{x}+\frac{x}{1-x}=\frac{7}{2}\iff 9x^2-9x+2=0\iff x=\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}.$$

Оба корня удовлетворяют условию $|x|<1$.

Ответ. $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{2}{3}$.

15.39. 2. **15.40.** $\frac{1}{3}$. **15.41.** 6 и $-\frac{1}{2}$. **15.42.** $-\frac{7}{9}$; $\frac{1}{2}$.

15.43. В 2 раза. **15.44.** $\sqrt{3}$; 3. **15.45.** 2, 4, 8, 16.

15.46. $d=-10$ или $d=0$. **15.47.** $\frac{4}{25};-\frac{16}{25};\frac{64}{25}$ и $4;8;16$. **15.48.** 1; 2.

15.49. $a_1=7$, $a_2=7$, $a_3=7$; $a_1=7-7\sqrt{2}$, $a_2=7$, $a_3=7+7\sqrt{2}$; $a_1=7+7\sqrt{2}$, $a_2=7$, $a_3=7-7\sqrt{2}$. **15.50.** -9.

15.51. $(n-1)2^{n+1}+2$.

15.52. ± 2. **15.54.** 1; $\frac{1}{3}$. **15.55.** $b_1=\frac{15}{2}$ или $b_1=5$.

15.56. $\{7,7,7\}$; $\{3+\sqrt{2},-1+2\sqrt{2},-5+3\sqrt{2}\}$; $\{3-\sqrt{2},-1-2\sqrt{2},-5-3\sqrt{2}\}$.

15.57. -4. **15.58.** $(n-1)2^{n+1}+2-\frac{1}{2}n(n+1)$. **15.59.** $(n-1)3^{n+1}+3$.
16.1. 36 *сек.* **16.2.** 10. **16.3.** Нет. **16.4.** 12:48. **16.5.** 3,2 км/ч.
16.6. $\frac{3}{5}$. **16.7.** Нет. **16.8.** 5. **16.9.** 14^{00}. **16.10.** 80 км/час.
16.11. 5 *ч* 30 *мин.* **16.12.** 28 *мин.* **16.13.** 80 м. **16.14.** $(1; 18-12\sqrt{2}]$.
16.15. 1,5. **16.16.** 2 *мин.* **16.17.** 50. **16.18.** 3. **16.19.** 6 км/час.
16.20. 5 км. **16.21.** 14^{00}. **16.22.** 6 *км.* **16.23.** 20 *км.*
16.24. 60 *км/ч.* **16.25.** 32,5 *км/ч.* **16.26.** 10 *км/ч.*
16.27. 290 *км*; 2 *км/ч.* **16.28.** 60 и 100 км/ч. **16.29.** 7 ч, 55 км.
16.30. Первый пешеход прошел путь за 1 час, второй — за 5 часов.
16.39. $\frac{1}{9}$, $m = \frac{4}{3}$. **16.32.** 2 км. **16.33.** 4, 8 и 12 *км/ч.*
16.34. 4 км/час. **16.35.** 28 мин. **16.36.** 500 *м.* **16.37.** 15 км/час.
16.38. а) 2 : 3; б) 2 ч 48 мин. **16.39.** а) 40 км; б) 80 и 60 км/ч.

16.40. Точки, лежащие в бесконечном криволинейном треугольнике, образованном положительным направлением оси Ou_1 и частью нижней ветви гиперболы $u_2 = \dfrac{vu_1}{2u_1 + v}$, лежащей в правой полуплоскости.

16.41. 16 ч. **16.42.** 60 км/час. **16.43.** 10 км/ч. **16.44.** $\frac{300}{13}$ км.
16.45. От A к B; 8 км/ч. **16.46.** 6. **16.47.** 1 *ч* 5 *мин* $27\frac{3}{11}$ *сек.*
16.48. 14:$27\frac{3}{11}$ и 15:00. **16.49.** 6 и 4 оборотов в минуту.
16.50. 4 и 6 *сек.* **16.51.** 15 полных кругов. **16.52.** $\frac{3}{32}\ \frac{\text{м}}{\text{сек}}$, $\frac{7}{96}\ \frac{\text{м}}{\text{сек}}$.
16.53. $\frac{35}{\pi}$. **16.54.** 1 *час* 20 *мин.* **16.55.** 2 часа 24 мин. **16.57.** 25.
16.59. 5 насосов; нельзя. **16.60.** 12 млн. т. **16.61.** 14,5 часа.
16.62. 13. **16.63.** 6. **16.64.** $\frac{1}{2}$. **16.65.** 9. **16.66.** 11 землекопов.
16.67. За 10 часов. **16.68.** 750 м^3. **16.69.** 10 часов.
16.70. За $\frac{4}{3}$ часа. **16.71.** 20 деталей в час и 18 деталей в час.
16.72. Первый — 10, второй — 12. **16.73.** 7 суток.
16.74. 300 или 600 телевизоров. **16.75.** 24%. **16.76.** $\frac{2}{3}$ л.
16.77. 2,5 л. **16.78.** $\frac{2}{3}$ ложки. **16.79.** 6. **16.80.** 12 л.
16.81. $5 + \frac{1}{5^{29}}$. **16.82.** 13,5 кг. **16.83.** 60 *мл.* **16.84.** 10 и 20 л.
16.85. 2,1 кг. **16.86.** 8%. **16.87.** 200 кг. **16.88.** 140 кг. **16.89.** 2,5 кг.
16.90. 70. **16.91.** $\frac{1}{2}$ и $3\frac{1}{2}$. **16.92.** 5. **16.93.** 5.
16.94. Стоимость товара понизилась на 4%. **16.95.** 38,8%.
16.96. 16550. **16.97.** Через 24 года. **16.98.** 5760 руб. **16.99.** 15%.
16.100. 75%. **16.101.** На 251. **16.102.** В два раза.
16.103. 7 месяцев. **16.104.** V_2 больше V_1 на $19\frac{1}{21}$%.
16.105. 2400 рублей. **16.106.** 20. **16.107.** 20,2. **16.108.** 240.

16.110. 25. **16.111.** 20%. **16.112.** На 7,1%. **16.113.** На 6%.
16.114. На 20%. **16.115.** 5400 и 8100 рублей.
16.116. 100 тыс. руб. и 50 тыс. руб.
16.117. 2 млн. 400 тыс. рублей и 3 млн. 600 тыс. рублей.
16.118. На 17%. **16.119.** 20%. **16.120.** 27. **16.121.** 3,9%.
16.122. Сначала следует выступить в газете, затем в любом порядке 2 раза по радио и 1 раз по телевидению. **16.123.** 4%.
16.124. 8,75%. **16.125.** 15 кг. **16.126.** 25%, 62,5%, 10%.
16.127. 14%. **16.128.** Выросла на $\frac{500}{9}$%. **16.129.** 30%; 30.
16.130. 5%. **16.131.** $\frac{100}{49}$. **16.132.** 20%.
16.133. $29\frac{2}{3}\%, 24\frac{2}{3}\%, 18\frac{2}{3}\%, 11\frac{2}{3}\%$ соответственно.
16.134. 42,3%. **16.135.** 210 тыс. рублей. **16.136.** 126. **16.137.** 48.
16.138. 173. **16.139.** 10 002 000 у. е. **16.140.** 8 час 15 мин.
16.141. $6, 7, \ldots, 14$. **16.142.** 218.
16.143. На второй остановке вошло на 1 человека больше, чем вышло. **16.144.** 11000 тыс. руб. и 12600 тыс. руб.
16.145. 20 школьников, 18 000 руб.
16.146. Билет в цирк стоил 1 руб, билет в кино — 20 коп.
16.147. 6,5 ч. **16.148.** 36.
16.149. 24 трактора в первой бригаде и 45 — во второй.
16.150. а) $3\frac{2}{3}$; б) $3\frac{8}{11}$. **16.151.** 1984.
16.152. Один дом на 16 квартир и 11 домов на 12 квартир.
16.153. 132. **16.154.** 17 роз. **16.155.** 6. **16.156.** 48, 80, 12, 12.
16.157. 16, 24, 40, 48. **16.158.** 24. **16.159.** 83. **16.160.** 108.
16.161. 4. **16.162.** 7 час 30 мин. **16.163.** 300. **16.164.** а) 10π; б) 160.
16.165. 14. **16.166.** 37.
16.167. 2 пятерки, 10 четверок, 7 троек и 11 двоек.
16.168. 74. **16.169.** 1085 и 30. **16.170.** 28.
16.171. Команда B забила в третьем периоде на две шайбы больше, чем команда A во втором периоде.
16.172. Таких участников нет. **16.173.** 962 500 руб.
16.174. 20%. **16.175.** 72 часа. **16.176.** 27 тысяч рублей.
16.177. 137 и 77. **16.178.** 10500 тыс. руб. и 12600 тыс. руб.
16.179. 26. **16.180.** $k = 27$, $l = 189$, $m = 1323$.
16.181. 4 и 3. **16.182.** 1980.

Литература

[1] Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Пособие для учащихся 10-11 классов. М.: Изд-во “Наука”, 1987.

[2] Задачник по элементарной математике для программируемого обучения. Алгебра 1–3. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2001.

[3] Моденов В. П. Пособие по математике. Часть I. М.: Изд-во МГУ, 1977.

[4] Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. Алгебра и начала анализа. Уравнения и неравенства. Пособие для учащихся 10-11 классов. М.: Изд-во “Экзамен”, 1998.

[5] Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Учебное пособие. /Под редакцией Сканави М. И., М.: Изд-во “Высшая школа”, 1980.

[6] Ципкин А. Г., Пинский А. И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. М.: Изд-во “Наука”, 1989.

[7] Черкасов О. Ю., Якушев А. Г. Математика. Интенсивный курс подготовки к экзамену. М.: Изд-во Рольф: Айрис пресс, 1999.

[8] Якушева Е. В., Попов А. В., Якушев А. Г. Математика. Все для экзамена. М.: Изд-во “Экономика”, 2000.

Сведения об авторе

Галеев Эльфат Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Специалист в области теории аппроксимации, функционального анализа, теории экстремальных задач и методики преподавания элементарной математики. Автор более 150 научных работ, в том числе ряда монографий по теории экстремальных задач и учебно-методических пособий по подготовке к вступительным экзаменам по математике в МГУ. Неоднократно участвовал в составлении вариантов и приеме вступительных экзаменов на различные факультеты МГУ.

Замечания и предложения по улучшению содержания книги можно направлять по адресу:

119992, Москва, МГУ, механико-математический факультет,
кафедра общих проблем управления,
профессору Галееву Эльфату Михайловичу.
моб. тел. 8-926-266-02-87.

e-mail: galeevem@mail.ru

Учебно-методическое пособие

Галеев Эльфат Михайлович

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ (типы задач и методы их решений).

Часть 3

- **Тригонометрические уравнения и неравенства**
- **Арифметические и геометрические прогрессии**
- **Текстовые задачи**

Издание десятое, дополненное

М.: Издательство “Попечительский совет мех-мат. ф-та МГУ”, 2012.—110 с.

Подписано в печать 15.06.2012 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 6,75 п.л.
Заказ 3. Тираж 300 экз.

Издательство “Попечительский совет механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова”.
119992, г. Москва, Ленинские Горы, д.1.

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета.