§7. Гладкая задача с равенствами

7.1 Постановка задачи

X, Y — линейные нормированные пространства, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $F\colon X \to Y$. Гладкая задача с ограничениями типа равенств:

$$f(x) \to \mathrm{extr}; \quad F(x) = 0. \qquad (P)$$

Отметим, что отображение типа равенства в бесконечномерных пространствах может содержать в себе как конечное, так и бесконечное число равенств.

Допустимые точки.

$$f(x) \to \mathrm{extr}; \quad F(x) = 0. \qquad (P)$$

Теорема (принцип Лагранжа)

$\hat{x} \in \operatorname{locextr} P$, X, Y — банаховы, $f, F \in SD(\hat{x})$ (гладкость), $\operatorname{Im} F'(\hat{x})$ — замкнутое подпространство в Y (ослабленное условие регулярности) $\Rightarrow \exists\ (\lambda_0, y^*) \in \mathbb{R} \times Y^*$, $(\lambda_0, y^*) \neq 0$: для функции Лагранжа $\mathscr{L}(x) = \lambda_0 f(x) + \langle y^*, F(x) \rangle$ выполняется условие стационарности:

$$\mathscr{L}'(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \langle \lambda_0 f'(\hat{x}), h \rangle + \langle y^*, F'(\hat{x})[h] \rangle = 0\ \forall\ h \in X$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 f'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* y^* = 0.$$

Теорема (принцип Лагранжа)

$\hat{x} \in \operatorname{locextr} P$, X, Y — банаховы, $f, F \in SD(\hat{x})$, $\operatorname{Im} F'(\hat{x})$ — замкнуто в $Y \Rightarrow \exists\ (\lambda_0, y^*) \in \mathbb{R} \times Y^*$, $(\lambda_0, y^*) \neq 0$: для $\mathscr{L} = \lambda_0 f(x) + \langle y^*, F(x)\rangle$ выполняется условие стационарности:

$$\mathscr{L}'(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 \langle f'(\hat{x}), h\rangle + \langle y^*, F'(\hat{x})[h]\rangle = 0\ \forall\ h \in X.$$

$\lhd$ НеОО $f(\hat{x}) = 0$. Определим $\mathcal{F}(x) := (f(x), F(x)) \Rightarrow \mathcal{F} \in SD(\hat{x})$, $\mathcal{F}'(\hat{x}) = (f'(\hat{x}), F'(\hat{x}))$, $\mathcal{F}, \mathcal{F}'(\hat{x}) \colon X \to \mathbb{R} \times Y$.

Перепишем условие стационарности в виде $\langle(\lambda_0, y^*), (\langle f'(\hat{x}), h\rangle, F'(\hat{x})[h])\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle(\lambda_0, y^*), \mathcal{F}'(\hat{x})[h]\rangle = 0\ \forall\ h \in X$ $\Leftrightarrow \langle(\lambda_0, y^*), \operatorname{Im} \mathcal{F}'(\hat{x})\rangle = 0 \Leftrightarrow (\lambda_0, y^*) \in (\operatorname{Im} \mathcal{F}'(\hat{x}))^\perp$ $\Leftrightarrow (\operatorname{Im} \mathcal{F}'(\hat{x}))^\perp \neq 0$. Поскольку по лемме о замкнутости образа ($\operatorname{Im} F'(\hat{x})$ замкнуто по условию, $f'(\operatorname{Ker} F'(\hat{x})) = 0$ или $\mathbb{R}$ — замкнуты) $\operatorname{Im} \mathcal{F}'(\hat{x})$ замкнут в $\mathbb{R} \times Y$, то по лемме о нетривиальности аннулятора это эквивалентно тому, что замкнутое подпространство $\operatorname{Im} \mathcal{F}'(\hat{x})$ в $\mathbb{R} \times Y$ является собственным.

$$f(x) \to \mathrm{extr}; \quad F(x) = 0. \qquad (P)$$

$\mathcal{F}(x) := (f(x), F(x)), \quad \mathcal{F}, \mathcal{F}'(\hat{x})\colon X \to \mathbb{R} \times Y$

Доказательство теоремы проведем от противного.

Предположим, что теорема не верна $\Rightarrow \operatorname{Im} \mathcal{F}'(\hat{x})$ не является собственным подпространством в $\mathbb{R} \times Y \Rightarrow \operatorname{Im} \mathcal{F}'(\hat{x}) = \mathbb{R} \times Y$.

$\mathcal{F}(\hat{x}) = (0, 0)$. По т. об обратном отображении

$\exists\ \mathcal{F}^{-1}\colon W \in \mathcal{O}((0,0), \mathbb{R} \times Y) \to X : \mathcal{F}^{-1}(0,0) = \hat{x}$,

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\alpha,y)) = (\alpha,y),\ \|\mathcal{F}^{-1}(\alpha,y) - \mathcal{F}^{-1}(0,0)\| \le K\|(\alpha,y) - (0,0)\|$$
$$\Leftrightarrow \|\mathcal{F}^{-1}(\alpha, y) - \hat{x}\| \le K\|(\alpha, y)\|\ \forall\ (\alpha, y) \in W\ (K > 0).$$

Положим $x(\varepsilon) := \mathcal{F}^{-1}(\varepsilon, 0)$, $|\varepsilon|$ мал $\Rightarrow$

$$\mathcal{F}(x(\varepsilon)) = (\varepsilon, 0) \Leftrightarrow f(x(\varepsilon)) = \varepsilon \gtrless 0 = f(\hat{x}),\ F(x(\varepsilon)) = 0,$$
$$\|x(\varepsilon) - \hat{x}\| = \|\mathcal{F}^{-1}(\varepsilon, 0) - \hat{x}\| \le K\|(\varepsilon, 0)\| = K|\varepsilon|$$

$\Rightarrow \hat{x} \notin \operatorname{locextr} P$ — противоречие. $\triangleright$

Теорема (принцип Лагранжа)

$\hat{x} \in \operatorname{locextr} P$, X, Y — банаховы, $f, F \in SD(\hat{x})$, $\operatorname{Im} F'(\hat{x})$ — замкнуто в $Y \Rightarrow \exists\ (\lambda_0, y^*) \in \mathbb{R} \times Y^*$, $(\lambda_0, y^*) \neq 0$:

$$\lambda_0 \langle f'(\hat{x}), h\rangle + \langle y^*, F'(\hat{x})[h]\rangle = 0 \quad \forall\ h \in X.$$

Замечание

Если в условиях теоремы $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$, то $\lambda_0 \neq 0$, и, следовательно, можем считать его равным единице: $\lambda_0 = 1$.

$\triangleleft$ Действительно, если $\lambda_0 = 0$, то $y^* \neq 0$ в силу того, что множители Лагранжа одновременно в ноль не обращаются. Поэтому условие стационарности приобретает вид:
$\langle y^*, F'(\hat{x})[h]\rangle = 0\ \forall\ h \in X \Leftrightarrow \langle y^*, Y\rangle = 0 \Leftrightarrow y^* = 0$ — противоречие. $\triangleright$

X, Y — лин. норм. пространства, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $F\colon X \to Y$.

$$f(x) \to \text{extr}; \quad F(x) = 0. \qquad (P)$$

Теорема

$\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$, X, Y — банаховы (условие банаховости), $f, F \in D^2(\hat{x})$ (условие гладкости), $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$ (условие регулярности) $\Rightarrow \exists\ y^* \in Y^*$: для функции Лагранжа с $\lambda_0 = 1$ $\mathscr{L}(x) = f(x) + \langle y^*, F(x)\rangle$ выполняется условие стационарности

$$\mathscr{L}'(\hat{x}) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow f'(\hat{x}) + \left(F'(\hat{x})\right)^* y^* = 0\right)$$

и неотрицательности:

$$\mathscr{L}''(\hat{x})[h, h] \geq 0 \quad \forall\ h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x}).$$

$\triangleleft$ Напомним, что (Замечание к Следствию 2 п. 5.3.3) существование второй производной Фреше в точке гарантирует строгую дифференцируемость отображения в этой точке.
Поэтому условие стационарности вытекает из правила множителей Лагранжа для гладкой задачи с равенствами и замечания к нему ($\lambda_0 = 1$ при $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$).

Условие неотрицательности. Возьмем $h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$. Поскольку по т. о касательном пространстве $\operatorname{Ker} F'(\hat{x}) = T_{\hat{x}}M$, то $h \in T_{\hat{x}}M$, где $M := D(P) = \{x \in X \mid F(x) = F(\hat{x}) = 0\}$. По определению касательного вектора $\exists\, \varepsilon > 0$ и отображение $r\colon [-\varepsilon; \varepsilon] \to Y : F(\hat{x} + th + r(t)) = 0 \ \forall\, t \in [-\varepsilon; \varepsilon]$ и $\|r(t)\| = o(t)$ при $t \to 0 \Rightarrow \hat{x} + th + r(t) \in D(P)$ при $t \in [-\varepsilon; \varepsilon]$. Тогда для $\mathscr{L}(x) = f(x) + \langle y^*, F(x) \rangle$ имеем:

$$f(\hat{x}) \overset{\hat{x} \in \text{locmin}}{\leq} f(\hat{x} + th + r(t)) \overset{\text{def}\,\mathscr{L}}{=} \mathscr{L}(\hat{x} + th + r(t)) -$$
$$- \langle y^*, F(\hat{x} + th + r(t)) \rangle \overset{\text{ф. Тейлора}}{=} \mathscr{L}(\hat{x}) + \mathscr{L}'(\hat{x})[th + r(t)] +$$
$$+ \frac{1}{2}\mathscr{L}''(\hat{x})[th + r(t), th + r(t)] + o(\|th + r(t)\|^2) =$$
$$= f(\hat{x}) + \frac{t^2}{2}\mathscr{L}''(\hat{x})[h, h] + o(t^2) \Rightarrow \frac{t^2}{2}\mathscr{L}''(\hat{x})[h, h] + o(t^2) \geq 0$$ при малых t. Разделим обе части последнего неравенства на t^2 и устремим t к нулю. Получим $\mathscr{L}''(\hat{x})[h, h] \geq 0$. $\triangleright$

Необходимое условие максимума формулируется аналогично для $\mathscr{L}(x) = -f(x) + \langle y^*, F(x) \rangle$. $\triangleright$

$$f(x) \to \mathrm{extr}; \quad F(x) = 0. \tag{P}$$

Теорема

Пусть выполняются условия теоремы о необходимых условиях II порядка (банаховость, гладкость, регулярность, стационарность для функции Лагранжа $\mathscr{L}(x) = f(x) + \langle y^*, F(x)\rangle$ с множителем $\lambda_0 = 1$) и для некоторого $\alpha > 0$ выполняется условие строгой положительности:

$$\mathscr{L}''(\hat{x})[h, h] \geq \alpha \|h\|^2 \quad \forall\ h \in \mathrm{Ker}\, F'(\hat{x}).$$

Тогда $\hat{x} \in \mathrm{locmin}\, P$.

$\lhd$ По лемме о правом обратном к отображению $F'(\hat{x})\colon X \overset{\text{на}}{\to} Y$ $\exists$ отображение $M\colon Y \to X$ и константа $C > 0$:

$$F'(\hat{x}) \circ M = I_Y, \quad \|My\| \le C\|y\| \quad \forall\, y \in Y.$$

Возьмем $\hat{x} + h \in D(P)$ $(F(\hat{x} + h) = 0)$. Положим $h_2 := M(F'(\hat{x})[h])$ и обозначим $h_1 := h - h_2$.
Тогда $F'(\hat{x})[h_1] = F'(\hat{x})[h - h_2] =$
$F'(\hat{x})[h] - F'(\hat{x})M(F'(\hat{x})[h]) = F'(\hat{x})[h] - F'(\hat{x})[h] = 0$
$\Rightarrow h_1 \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$. По формуле Тейлора

$$0 = F(\hat{x} + h) = F(\hat{x}) + F'(\hat{x})h + \tfrac{1}{2}F''(\hat{x})[h, h] + o(\|h\|^2).$$

Отсюда $\exists\ \delta > 0$ и константа $C_1 > 0$:

$$\|F'(\hat{x})h\| = \left\| -\tfrac{1}{2}F''(\hat{x})[h, h] + o(\|h\|^2)\right\| \le C_1\|h\|^2 \quad \forall\ \|h\| < \delta.$$

Поэтому $\|h_2\| = \|MF'(\hat{x})[h]\| \le C\|F'(\hat{x})[h]\| \le CC_1\|h\|^2 \le CC_1\delta\|h\| = \varepsilon\|h\|$ при $\varepsilon = CC_1\delta$ и
$\|h\| - \|h_2\| \le \|h_1\| = \|h - h_2\| \le \|h\| + \|h_2\|$
$\Leftrightarrow (1 - \varepsilon)\|h\| \le \|h_1\| \le (1 + \varepsilon)\|h\|$.

Далее имеем:

$$f(\hat{x}+h) = \mathscr{L}(\hat{x}+h) = \mathscr{L}(\hat{x})+\mathscr{L}'(\hat{x})[h]+\frac{1}{2}\mathscr{L}''(\hat{x})[h,h]+o(\|h\|^2) =$$

$$\overset{\mathscr{L}'(\hat{x})=0}{=} f(\hat{x}) + \frac{1}{2}\mathscr{L}''(\hat{x})[h,h] + o(\|h\|^2).$$

Отсюда, обозначая $B := \|\mathscr{L}''(\hat{x})\|$, получим

$$f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) = \frac{1}{2}\mathscr{L}''[h_1+h_2, h_1+h_2] + o(\|h\|^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\big(\mathscr{L}''[h_1,h_1] + 2\mathscr{L}''[h_1,h_2] + \mathscr{L}''[h_2,h_2]\big) + o(\|h\|^2) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\big(\alpha\|h_1\|^2 - 2B\|h_1\|\cdot\|h_2\| - B\|h_2\|^2\big) + o(\|h\|^2) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\|h\|^2\big(\alpha(1-\varepsilon)^2 - 2B(1+\varepsilon)\varepsilon - B\varepsilon^2\big) + o(\|h\|^2) \geq 0$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$ (при $\varepsilon = 0$ множитель в круглых скобках равен $\alpha > 0$) $\Rightarrow \hat{x} \in \operatorname{locmin} P$. $\triangleright$

Достаточное условие максимума формулируется аналогично для $\mathscr{L}(x) = -f(x) + \langle y^*, F(x)\rangle$.