

3 Обоснование симплекс-метода

3.1 Теоремы существования, двойственности, критерий решения

Приведем три теоремы, играющие важную роль при обосновании симплекс-метода.

Рассмотрим задачу линейного программирования в общей форме

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \min; Ax \leq b, \quad (P)$$

где $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, матрица размеров $m \times n$ $A = (a_i^j)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} =$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_m^1 & \dots & a_m^n \end{pmatrix} \text{ со столбцами } a^j = \begin{pmatrix} a_1^j \\ \vdots \\ a_m^j \end{pmatrix}, j = 1, \dots, n.$$

Введем множество

$$K := \{(\alpha, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mid \exists x : \langle c, x \rangle \leq \alpha, Ax \leq z\}.$$

Легко видеть, что K — выпуклый конус.

Напомним два определения из выпуклого анализа.

Пусть $C := \{c_1, \dots, c_m\} \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое конечное подмножество. Элемент $k = \sum_{i=1}^m t_i c_i$, $t_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, называется *конической комбинацией* C .

Множество K называется *конечнопорожденным конусом*, если $\exists c_1, \dots, c_m$ такие, что $K = \left\{ k = \sum_{i=1}^m t_i c_i \mid t_i \geq 0, i = 1, \dots, m \right\}$.

Лемма 1. *Конус K — конечнопорожденный.*

Доказательство. Покажем, что $K = \text{cone}\{\pm\xi_1, \dots, \pm\xi_n, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m\}$, где $\xi_j = (c_j, a^j) = (c_j, a_1^j, \dots, a_m^j)$, $j = 1, \dots, n$; $\eta_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) = e_i$ — канонический базис в пространстве \mathbb{R}^{m+1} .

Вложение $\text{cone}\{\pm\xi_1, \dots, \pm\xi_n, \eta_0, \dots, \eta_m\} \subset K$ следует из того, что все образующие конуса лежат в K . Действительно, $\xi_j \in K$ (в определении K берем $x = e_j \Rightarrow \langle c, e_j \rangle = c_j \leq c_j$, $A(e_j) = a^j \leq a^j$), аналогично, $-\xi_j \in K$ (в определении K берем $x = -e_j$); $\eta_i \in K$ (в определении K берем $x = 0$).

Обратно, если вектор $(\alpha, z) = (\alpha, z_1, \dots, z_m) \in K$, то существует $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, для которого $\langle c, x \rangle \leq \alpha$, $Ax \leq z$. Значит, для некоторого набора чисел $\beta_0 \geq 0, \dots, \beta_m \geq 0$ выполняются соотношения

$$\langle c, x \rangle + \beta_0 = \alpha, \quad Ax + \beta = z \quad (\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)) \iff$$

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j + \beta_0 = \alpha, \quad \sum_{j=1}^n a^j x_j + \beta = z \iff$$

$$\sum_{j=1}^n (c_j, a^j) x_j + \sum_{i=0}^m \beta_i \eta_i = (\alpha, z) \iff$$

$$\sum_{j=1}^n \xi_j x_j + \sum_{i=0}^m \beta_i \eta_i = (\alpha, z) \iff \sum_{j=1}^n |x_j| (\pm \xi_j) + \sum_{i=0}^m \beta_i \eta_i = (\alpha, z).$$

Это означает, что $(\alpha, z) \in \text{cone}\{\pm\xi_1, \dots, \pm\xi_n, \eta_0, \dots, \eta_m\}$. \square

Лемма 2 (о замкнутости конечнопорожденного конуса). *Конечнопорожденный конус замкнут.*

Обозначим S_P — численное значение задачи (P) , $\text{Arg } P$ — множество решений задачи (P) , т. е. множество допустимых точек $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $\langle c, x \rangle = S_P$.

Теорема (существования). *Если численное значение задачи (P) конечно, то ее решение существует ($|S_P| < \infty \Rightarrow \text{Arg } P \neq \emptyset$).*

Доказательство. Отметим сразу, что поскольку численное значение задачи конечно, то множество допустимых элементов непусто ($D(P) \neq \emptyset$).

Поскольку $S_P = \inf \{\alpha \mid \exists x : \langle c, x \rangle = \alpha, Ax \leq b\} =: \hat{\alpha}$, то существуют последовательность $\{x_k\}$ такая, что $\langle c, x_k \rangle =: \alpha_k$, $Ax_k \leq b$ и $\alpha_k \rightarrow \hat{\alpha}$ при $k \rightarrow +\infty$. Это означает, что точки $(\alpha_k, b) \in K$ и $(\alpha_k, b) \rightarrow (\hat{\alpha}, b) \in \overline{K}$. Но K — замкнутое по лемме 2 множество, значит, предельная точка $(\hat{\alpha}, b) \in K$. Тогда по определению множества K существует точка \hat{x} такая, что $\langle c, \hat{x} \rangle \leq \hat{\alpha} = S_P$, $A\hat{x} \leq b$. Это означает, что \hat{x} является решением задачи P . \square

Вернемся к задаче линейного программирования в общей форме. Через $S(b) := \inf_x \{\langle c, x \rangle \mid Ax \leq b\}$ обозначаем S -функцию задачи (P) , рассматривая аргумент b как параметр.

Лемма 3. S — выпуклая замкнутая функция.

Доказательство. Для доказательства достаточно доказать, что $\text{epi } S = K$. Напомним, что $\text{epi } S = \{(\alpha, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mid S(b) \leq \alpha\}$. Возьмем $(\alpha, b) \in \text{epi } S$, тогда $S(b) \leq \alpha \Leftrightarrow \inf_x \{\langle c, x \rangle \mid Ax \leq b\} \leq \alpha$. Поэтому $S(b) < +\infty$. Это означает, что $D(P_b) \neq \emptyset$.

Если $S(b) = -\infty$, то $\forall a \in \mathbb{R}$ (в том числе и для $a = \alpha$) $\exists x : \langle c, x \rangle \leq a, Ax \leq b \Rightarrow (\alpha, b) \in K$. Если $S(b)$ конечно, то по теореме существования $\exists x \in \text{Arg } P_b \Leftrightarrow \exists x : \langle c, x \rangle = S(b), Ax \leq b$. Поскольку $S(b) \leq \alpha$, то $\langle c, x \rangle \leq \alpha \Rightarrow (\alpha, b) \in K$. Значит, $\text{epi } S \subset K$.

Обратное включение $\text{epi } S \supset K$ очевидно. Следовательно, $\text{epi } S = K$. \square

Лемма 4. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая замкнутая функция и существует точка z_0 такая, что $f(z_0) = -\infty$. Тогда $f(z) = -\infty \forall z \in \text{dom } f^1$.

¹Эффективное множество функции $\text{dom } f := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < +\infty\}$.

Доказательство. От противного. Предположим, $\exists z_1 : |f(z_1)| < \infty$. Тогда в силу выпуклости надграфика $f(z) = -\infty \forall z \in [z_0, z_1]$. Но это противоречит замкнутости надграфика. \square

Следствие. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая замкнутая функция и $\exists z_1 : |f(z_1)| < \infty \Rightarrow f(z) > -\infty \forall z \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. От противного. Предположим, $\exists z_0 : f(z_0) = -\infty$. Тогда по лемме 4 $f(z) = -\infty \forall z \in \text{dom } f$. Получаем противоречие с условием $|f(z_1)| < \infty$. \square

Выпишем прямую задачу линейного программирования в общей форме и двойственную задачу к ней:

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \min; Ax \leq b, \quad (P) \quad \langle b, y \rangle \rightarrow \max; A^*y = c, y \leq 0. \quad (P^{**})$$

Теорема (двойственности). Для пары двойственных задач линейного программирования (P) и (P^{**}) имеет место следующая альтернатива: или значение одной из задач конечно (и тогда конечно значение другой и оба значения совпадают), или множество допустимых элементов в одной из задач пусто (и тогда другая задача либо несовместна, либо имеет бесконечное значение).

Доказательство. 1) Пусть $|S(b)| < \infty$, тогда поскольку по лемме 3 S — выпуклая замкнутая функция, то по следствию из леммы 4 $S(z) > -\infty \forall z$. Значит, функция S является к тому же и собственной. Тогда по теореме Фенхеля–Моро п. 2.1 $S^{**}(b) = S(b)$. Это означает, что конечно значение двойственной задачи и оба значения совпадают.

2) Пусть $D_P = \emptyset$ ($\Leftrightarrow S(b) = +\infty$), тогда либо а) существует точка z_0 такая, что $S(z_0) = -\infty \Rightarrow S^* \equiv +\infty$, следовательно, $S^{**} \equiv -\infty$, т.е. $D_{P^{**}} = \emptyset$ (это означает, что множество допустимых элементов в двойственной задаче пусто), либо б) $S(z) > -\infty \forall z$, т.е. S — собственная. Тогда вновь по теореме Фенхеля–Моро $S^{**}(b) = S(b) = +\infty$ (это означает, что двойственная задача имеет бесконечное значение). \square

Теорема (критерий решения). Пусть \hat{x}, \hat{y} — допустимые элементы в задачах (P) и (P^{**}) соответственно ($\hat{x} \in D(P)$, $\hat{y} \in D(P^{**})$). Тогда точки \hat{x}, \hat{y} являются решениями в задачах (P) и (P^{**}) соответственно ($\hat{x} \in \text{Arg } P$, $\hat{y} \in \text{Arg } P^{**}$) тогда и только тогда, когда

$$\langle c, \hat{x} \rangle = \langle \hat{y}, b \rangle.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\hat{x} \in \text{Arg } P$, тогда $\hat{x} \in D(P)$ и $\langle c, \hat{x} \rangle = S_P$. Аналогично, $\hat{y} \in \text{Arg } P^{**}$, тогда $\hat{y} \in D(P^{**})$ и $\langle \hat{y}, b \rangle = S_{P^{**}}$. Значение задачи (P) при этом конечно ($|S_P| < +\infty$). Значит по теореме двойственности значение двойственной задачи также конечно и оба значения совпадают ($S_P = S_{P^{**}}$). Следовательно, $\langle c, \hat{x} \rangle = \langle \hat{y}, b \rangle$.

Достаточность. Пусть $\hat{x} \in D(P)$, $\hat{y} \in D(P^{**})$ и $\langle c, \hat{x} \rangle = \langle \hat{y}, b \rangle$. Возьмем произвольные допустимые элементы $x \in D(P)$, $y \in D(P^{**})$. Это означает, что $Ax \leq b$, $A^*y = c$, $y \leq 0$. В силу этих условий на x и y имеем

$$\langle c, x \rangle = \langle A^*y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle \geq \langle y, b \rangle.$$

Из этого соотношения вытекает, что $\langle c, x \rangle \geq \langle \hat{y}, b \rangle = \langle c, \hat{x} \rangle \forall x \in D(P)$. Это означает, что $\hat{x} \in \text{Arg } P$. Аналогично доказывается, что $\hat{y} \in \text{Arg } P^{**}$. \square

3.2 Свойства множества допустимых точек

Рассмотрим задачу линейного программирования в канонической форме

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \max; \quad Ax = b, \quad x \geq 0. \quad (P)$$

Предложение 1. Пусть $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $x_i > 0$, $i = 1, \dots, k$, — допустимая точка в задаче (P). Тогда x является крайней точкой множества допустимых элементов тогда и только тогда, когда столбцы a^1, \dots, a^k матрицы A линейно независимы.

Доказательство. Необходимость. Пусть x — крайняя точка. Докажем, что тогда столбцы a^1, \dots, a^k линейно независимы. Доказательство будем вести от противного. Допустим противное, что столбцы a^1, \dots, a^k линейно зависимы. Тогда существует ненулевой набор множителей $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ такой, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i a^i = 0$. Значит $A\lambda = 0$ для вектора $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Поэтому точка $x + t\lambda$ является допустимой при малых t как больше, так и меньше нуля. Отсюда следует, что точка x не является крайней. Получили противоречие. Значит, наше допущение, что столбцы a^1, \dots, a^k линейно зависимы, неверно. То есть столбцы a^1, \dots, a^k линейно независимы.

Достаточность. Пусть столбцы a^1, \dots, a^k линейно независимы. Докажем, что тогда допустимая точка x — крайняя точка множества допустимых элементов. Доказательство вновь будем вести от противного. Допустим противное, что x не является крайней точкой. Тогда существуют допустимые точки y и z , $y \neq z$, отличные от x и число $t \in (0, 1)$ такие, что $x = ty + (1-t)z$. Из этого равенства и условий $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$, $y, z \geq 0$ следует, что $y = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)$, $z = (z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)$, то есть y и z могут быть отличными от нуля только первые k координат. А из условий $Ay = b$, $Az = b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k y_i a^i = b$,

$\sum_{i=1}^k z_i a^i = b$ вытекает, что $\sum_{i=1}^k (y_i - z_i) a^i = 0$. Это означает, что

столбцы a^1, \dots, a^k линейно зависимы. Получили противоречие. Значит, наше допущение, что x не является крайней точкой, неверно. То есть x является крайней точкой. \square

Поскольку количество линейно независимых столбцов не может превышать количества строк матрицы A , то из предложения 1 следует, что крайняя точка содержит не более m положительных элементов.

Предложение 2. Пусть (P) — невырожденная задача линейного программирования в канонической форме, $x = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $x_i > 0$, $i = 1, \dots, k$, — допустимая точка в задаче. Тогда

а) $k \geq m$;

б) точка x является крайней точкой множества допустимых элементов тогда и только тогда, когда $k = m$.

Доказательство. а) Доказательство будем вести от противного. Допустим противное, что существует допустимая точка, у которой менее m положительных координат. Для определенности, пусть это первые k координат ($k < m$). Рассмотрим множество $\bar{D} = \{y \in \mathbb{R}^k \mid \bar{A}y = b, y \geq 0\}$, где $\bar{A} := \{a^1, \dots, a^k\}$ — матрица, состоящая из первых k столбцов исходной матрицы A . Точка $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \bar{D}$, то есть множество \bar{D} непусто. Пусть \hat{y} — крайняя точка множества \bar{D} (докажите самостоятельно ее существование). У нее число положительных координат l будет меньше m ($l \leq k < m$) и соответствующие l столбцов матрицы A по предложению 1 линейно независимы. Тогда вновь по предложению 1 точка $\hat{x} = (\hat{y}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ будет крайней точкой множества допустимых элементов в задаче (P) , причем число положительных координат l у нее меньше m . Это противоречит невырожденности задачи. Значит, наше допущение, что существует допустимая точка, у которой имеется менее m положительных координат, неверно. То есть $k \geq m$.

б) *Необходимость* непосредственно следует из определения невырожденной задачи, поскольку в невырожденной задаче любая крайняя точка имеет ровно m положительных координат.

Достаточность. Пусть $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$, $x_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, — допустимая точка в задаче. Докажем, что тогда x — крайняя точка множества допустимых элементов. Доказательство будем вести от противного. Предположим противное, что точка x не является крайней. Тогда по предложению 1 столбцы a^1, \dots, a^m линейно зависимы. Это означает, что существует ненулевой набор множителей $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ такой, что $\sum_{i=1}^m \lambda_i a^i = 0$. Значит $A\lambda = 0$ для вектора $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Поэтому $A(x + t\lambda) = Ax + tA\lambda = Ax = b$ для любого t , а вектор $x + t\lambda \geq 0$ при малых t как больше, так и меньше нуля, т. е. $x + t\lambda$ — допустимый элемент при малых t как больше, так и меньше нуля. Поскольку $x_i + t\lambda_i = x_i > 0$ при $t = 0$, $i = 1, \dots, m$, то увеличивая $|t|$, придем к случаю, когда еще одна координата вектора $x + t\lambda$ обратится в ноль, а все остальные по-прежнему больше или равняются нулю. Таким образом, при этом t допустимая точка $x + t\lambda$ будет иметь менее m положительных координат. Это противоречит пункту а) данного предложения. Получили противоречие. Значит, наше предположение, что точка x не является крайней, неверно. То есть x является крайней точкой. \square

3.3 Доказательство симплекс-метода

Рассмотрим невырожденную задачу линейного программирования в канонической форме

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \max; \quad Ax = b, \quad x \geq 0. \quad (P_k)$$

Напомним, что двойственной к ней является следующая задача:

$$\langle b, y \rangle \rightarrow \min; \quad A^*y \geq c. \quad (P_k^{**})$$

При изложении правила решения задачи в канонической форме мы пользовались некоторыми фактами, которые были даны там без обоснования. Сейчас мы их докажем, оформив утверждение в виде теоремы.

Теорема. Пусть $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $x_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, — крайняя точка множества допустимых элементов $D(P_k)$. Тогда:

а) если $\Delta \geq 0$, то вектор x — решение задачи (P_k) , а вектор $y := c_b A_b^{-1}$ — решение двойственной задачи (P_k^{**}) ;

б) если для некоторого j $\Delta_j < 0$ и $x^j \leq 0$, то значение задачи $S_{P_k} = +\infty$;

в) если не выполнены условия п.п. а) и б), то точка x' является новой крайней точкой множества допустимых элементов $D(P_k)$, а разложение векторов x', a^1, \dots, a^n производится согласно симплекс-методу, значение функционала при этом возрастет на величину $-t_{i_0} \Delta_{j_0}$: $\langle c, x' \rangle = \langle c, x \rangle - t_{i_0} \Delta_{j_0}$.

Доказательство. Напомним, что по предположению $1 \det A_b \neq 0$, т.е. матрица A_b обратима.

а) Пусть $\Delta \geq 0$. Преобразуем это условие с учетом определения векторов $z := c_b X$, $y := c_b A_b^{-1} \Leftrightarrow y A_b = c_b$ и матрицы X ($A_b X = A$):

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow z - c \geq 0 \Leftrightarrow z \geq c \Leftrightarrow c_b X \geq c \Leftrightarrow y A_b X \geq c \Leftrightarrow y A \geq c \Leftrightarrow A^* y \geq c$$

Значит, y является допустимым вектором в задаче (P_k^{**}) двойственной к задаче (P_k) . Кроме того в силу условия $A_b x_b = b$ имеем:

$$\langle c, x \rangle = \langle c_b, x_b \rangle = \langle y A_b, x_b \rangle = \langle A_b^* y, x_b \rangle = \langle y, A_b x_b \rangle = \langle y, b \rangle.$$

По критерию решения п. 3.1 x — решение в задаче (P_k) , а y — решение в двойственной задаче (P_k^{**}) .

б) Положим $x(t) := x - t(x^j, 0) + t e_j$ (e_1, \dots, e_n — канонический базис в \mathbb{R}^n). Тогда $x(t) = (x_b - t x^j, 0) + t e_j \geq 0 \forall t \geq 0$ в силу условия $x^j \leq 0$ и $A x(t) = A_b x_b - t A_b x^j + t A e_j = b - t a^j + t a^j = b$. Значит, $x(t)$ — допустимый элемент для любого $t \geq 0$, при этом

$$\begin{aligned} \langle c, x(t) \rangle &= \langle c_b, x_b \rangle - t \langle c_b, x^j \rangle + t \langle c, e_j \rangle = \\ &= \langle c, x \rangle - t z_j + t c_j = \langle c, x \rangle - t(z_j - c_j) = \end{aligned}$$

$$= \langle c, x \rangle - t\Delta_j \rightarrow +\infty \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$

с) Предположим, что не выполнены условия п.п. а) и б) теоремы. Тогда для некоторого j_0 такого, что $m + 1 \leq j_0 \leq n$, выполнено условие $\Delta_{j_0} < 0$ и величина

$$t_{i_0} := \min_i \left\{ \frac{x_i}{x_{ij_0}} \mid x_{ij_0} > 0 \right\} = \frac{x_{i_0}}{x_{i_0j_0}} > 0.$$

Возьмем $x' := x - t_{i_0}(x^{j_0}, 0) + t_{i_0}e_{j_0}$. Докажем, что вектор x' является новой крайней точкой в задаче (P_k) . Покажем вначале, что он является допустимым вектором. Как и в пункте б) выводим, что $Ax' = b$. Так же имеем

$$x'_i = x_i - t_{i_0}x_{ij_0} = x_i - \frac{x_{i_0}}{x_{i_0j_0}}x_{ij_0} \geq 0 \text{ при } i = 1, \dots, m \ (\Rightarrow x'_{i_0} = 0);$$

$$x'_i = 0 \text{ при } i = m + 1, \dots, n, \ i \neq j_0;$$

$$x'_{j_0} = t_{i_0} = \frac{x_{i_0}}{x_{i_0j_0}} > 0.$$

Таким образом, $x' \geq 0$, и значит, вектор x' является допустимым в невырожденной задаче (P_k) . По построению у вектора x' по сравнению с вектором x добавилась одна положительная j_0 -я координата, а какие-то обратились в ноль. Поскольку по предложению 2а) у допустимой точки число положительных координат не менее m , то в ноль может обратиться только одна координата (это x'_{i_0} -я координата обратилась в ноль). Значит, у вектора x' имеется ровно m положительных координат на местах $1, \dots, i_0 - 1, i_0 + 1, \dots, m, j_0$. Следовательно, по предложению 2б) x' — крайняя точка. (Отметим, что в невырожденной задаче число положительных компонент у крайней точки может уменьшаться.)

Выписанные формулы означают, что в новой симплексной таблице столбец x' вычисляется согласно указанному методу построения симплексной таблицы. Покажем, что и остальные столбцы x'^j в новой симплексной таблице строятся по этому же способу. Для этого вычислим координаты x'_{ij} разложения столбцов a^j , $j = 1, \dots, n$, матрицы A по базису $a^1, \dots, a^{i_0-1}, a^{j_0}, a^{i_0+1}, \dots, a^m$.

В старом базисе мы имели следующие разложения:

$$a^j = \sum_{i=1}^m a^i x_{ij} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^m a^i x_{ij} + a^{i_0} x_{i_0j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

В частности при $j = j_0$

$$a^{j_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^m a^i x_{ij_0} + a^{i_0} x_{i_0j_0}.$$

Поскольку $x_{i_0j_0} \neq 0$, то выразим a^{i_0} из последнего уравнения

$$a^{i_0} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^m a^i \frac{x_{ij_0}}{x_{i_0j_0}} + \frac{a^{j_0}}{x_{i_0j_0}},$$

и подставим в соотношение (1). Получим разложения по базису $a^1, \dots, a^{i_0-1}, a^{j_0}, a^{i_0+1}, \dots, a^m$:

$$\begin{aligned} a^j &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^m a^i x_{ij} + \left(- \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^m a^i \frac{x_{ij_0}}{x_{i_0j_0}} + \frac{a^{j_0}}{x_{i_0j_0}} \right) x_{i_0j} = \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^m a^i \left(x_{ij} - \frac{x_{i_0j} x_{ij_0}}{x_{i_0j_0}} \right) + a^{j_0} \frac{x_{i_0j}}{x_{i_0j_0}}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{i_0j} x_{ij_0}}{x_{i_0j_0}}, \quad i \neq i_0, \quad i = 1, \dots, m, \quad \Rightarrow \quad x'_{i_0j} = 0, \quad i \neq i_0,$$

$$x'_{i_0j} = \frac{x_{i_0j}}{x_{i_0j_0}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Теорема полностью доказана. \square