2 Двойственность в линейном программировании

2.1 Преобразование Лежандра

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ — некоторая функция. *Преобразованием Лежандра* функции f (или *сопряженной* функцией к f) называется функция

$$f^*(y) := \sup_x \{\langle x, y\rangle - f(x)\}.$$

Из определения f^* видно, что f^* — верхняя грань семейства аффинных функций $\langle x, y\rangle - f(x)$. Ее надграфик является выпуклым множеством (как пересечение выпуклых множеств — полупространств). Следовательно, f^* — выпуклая функция. Из определения сопряженной функции следует *неравенство Юнга*:

$$\langle x, y\rangle \le f(x) + f^*(y) \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Функция $f^{**}(x) := \sup\limits_y \{\langle x, y\rangle - f^*(y)\}$, являющаяся сопряженной к f^*, называется *второй сопряженной* к f.

В теории двойственности для задач линейного программирования важной является следующая теорема выпуклого анализа.

Теорема Фенхеля–Моро. [АГТ, с. 37] *Собственная функция совпадает со своей второй сопряженной* ($f(x) \equiv f^{**}(x)$) *тогда и только тогда, когда она выпукла и замкнута* (*т. е. когда ее надграфик* $\operatorname{epi} f$ *— выпуклое и замкнутое множество*).

2.2 Примеры

Пример 1. Найти первую и вторую сопряженные (в смысле Лежандра) функции к функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ в зависимости от значений параметров a, b, c.

Решение. По определению сопряженной функции

$$f^*(y) = \sup_x \{\langle x, y\rangle - f(x)\} = \sup_x \{xy - ax^2 - bx - c\} =$$

$$= \sup_x \{-ax^2 + (y-b)x - c\}.$$

Если $a > 0$, то парабола $-ax^2 + (y-b)x - c = -a\Big(x - \dfrac{y-b}{2a}\Big)^2 + \dfrac{(y-b)^2}{4a} - c$ достигает своего максимума $\dfrac{(y-b)^2}{4a} - c$ при $x = \dfrac{y-b}{2a}$. Поэтому

$$f^*(y) = \frac{(y-b)^2}{4a} - c.$$

Найдем вторую сопряженную к f. По определению

$$f^{**}(x) := \sup_y \{\langle x, y\rangle - f^*(y)\} = \sup_y \left\{xy - \frac{(y-b)^2}{4a} + c\right\} =$$

$$= \sup_y \left\{\frac{4axy - (y-b)^2}{4a} + c\right\} = \sup_y \left\{\frac{-(y-b-2ax)^2 + 4a^2x^2 + 4abx}{4a} + c\right\} =$$

$$= \sup_y \left\{-\frac{(y-b-2ax)^2}{4a} + ax^2 + bx + c\right\}.$$

Парабола $u(y) := -\dfrac{(y-b-2ax)^2}{4a} + ax^2 + bx + c$ достигает своего максимума при $y = b + 2ax$. Следовательно,

$$f^{**}(x) = \sup_y \left\{-\frac{(y-b-2ax)^2}{4a} + ax^2 + bx + c\right\} = ax^2 + bx + c.$$

Если $a = 0$, то функция $(y - b)x - c \to +\infty$, если $y \neq b$, при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Поэтому

$$f^*(y) = \sup_x \{(y - b)x - c\} = \begin{cases} -c, & y = b, \\ +\infty, & y \neq b. \end{cases}$$

Найдем вторую сопряженную к f. Нетрудно видеть, что

$$f^{**}(x) := \sup_y \{\langle x, y\rangle - f^*(y)\} = \sup_y \left\{ xy - \begin{cases} -c, & y = b, \\ +\infty, & y \neq b. \end{cases} \right\} = bx + c.$$

Если $a < 0$, то парабола $-ax^2 + (y - b)x - c$ с осями, направленными вверх, стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$. Значит, $f^*(y) = \sup_x \{ -ax^2 + (y - b)x - c\} = +\infty$. Найдем вторую сопряженную к f. Нетрудно видеть, что

$$f^{**}(x) := \sup_y \{\langle x, y\rangle - f^*(y)\} = \sup_y \{xy - (+\infty)\} = -\infty.$$

Пример 2. Найти первую и вторую сопряженные (в смысле Лежандра) функции к функции $f(x) = e^x$.

Решение. По определению сопряженной функции

$$f^*(y) = \sup_x \{\langle x, y\rangle - f(x)\} = \sup_x \{xy - e^x\} = \sup_x g(x),$$

где $g(x) := xy - e^x$. Найдем максимум функции $g(x)$. Имеем $g'(x) = y - e^x = 0 \Leftrightarrow x = \ln y$ при $y > 0$. Поскольку $g''(x) = -e^x < 0$, то по достаточному условию экстремума гладкой функции при $y > 0$ в этой точке будет достигаться максимум функции. Подставляя $\hat{x} = \ln y$ в $g(x)$, находим, что $\sup_x g(x) = g(\hat{x}) = y \ln y - y$.

Если $y = 0$, то очевидно, что $\sup_x g(x) = \sup_x \{-e^x\} = 0$. Если $y < 0$, то $g(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$. Таким образом,

$$f^*(y) = \sup_x \{xy - e^x\} = \begin{cases} y \ln y - y, & y > 0, \\ 0, & y = 0, \\ +\infty, & y < 0. \end{cases}$$

Найдем вторую сопряженную к f. По определению

$$f^{**}(x) := \sup_y \{\langle x, y\rangle - f^*(y)\} = \sup_y \left\{ xy - \begin{cases} y\ln y - y, & y > 0, \\ 0, & y = 0, \\ +\infty, & y < 0, \end{cases} \right\} =$$

$$= \max\{\sup_{y>0}\{xy - y\ln y + y\}, 0\}.$$

Нетрудно видеть, что функция $u(y) := xy - y\ln y + y$ достигает своего максимума при $y > 0$ в точке обращения в нуль своей производной. Действительно,

$$u'(y) = x - \ln y - 1 + 1 = x - \ln y = 0 \Leftrightarrow y = e^x,$$

$$u''(y) = -\frac{1}{y} < 0 \quad \text{при } y > 0.$$

Подставляя найденное значение $y = e^x$ в выражение для $f^{**}(x)$, получаем

$$f^{**}(x) = \max\{\sup_{y>0}\{xy - y\ln y + y\}, 0\} = \max\{e^x, 0\} = e^x.$$

Равенство $f^{**}(x) = f(x) = e^x$ следует также непосредственно из теоремы Фенхеля–Моро, поскольку функция e^x является выпуклой и замкнутой.

2.3 Вывод двойственных задач

2.3.1 Вывод задачи двойственной к задаче в общей форме

Рассмотрим задачу линейного программирования в общей форме

$$\langle c, x\rangle \to \min;\ \ Ax \le b. \tag{P}$$

Обозначим через $S(b) := \inf\limits_{x}\ \{\langle c, x\rangle \mid Ax \le b\}$ — S-функцию задачи (P), рассматривая аргумент b как параметр в задаче (P).

Определение. *Двойственной задачей* к задаче линейного программирования в общей форме называется задача нахождения второй сопряженной (в смысле Лежандра) функции $S^{**}(b)$ для S-функции задачи (P).

Для нахождения второй сопряженной необходимо найти вначале первую сопряженную функцию к функции $S(b)$:

$$S^*(y) = \sup_b \{\langle y, b\rangle - S(b)\} = \sup_b \Big\{\langle y, b\rangle - \inf_x \{\langle c, x\rangle \mid Ax \le b\}\Big\} =$$

(поскольку $-\inf f = \sup\{-f\}$)

$$= \sup_{b,x} \{\langle y, b\rangle - \langle c, x\rangle \mid Ax \le b\} = \begin{cases} \sup\limits_x \{\langle y, Ax\rangle - \langle c, x\rangle\}, & y \le 0, \\ +\infty, & \text{иначе}, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \sup\limits_x \langle A^*y - c, x\rangle, & y \le 0, \\ +\infty, & \text{иначе}, \end{cases} = \begin{cases} 0, & A^*y = c,\ y \le 0, \\ +\infty, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Найдем сопряженную в смысле Лежандра функцию к функции $S^*(y)$, т. е. вторую сопряженную к функции $S(b)$:

$$S^{**}(b) = \sup_y \{\langle y, b\rangle - S^*(y)\} = \sup_y \{\langle y, b\rangle \mid A^*y = c,\ y \le 0\}.$$

Таким образом, двойственной задачей к задаче линейного программирования в общей форме является следующая задача:

$$\langle b, y\rangle \to \max;\ \ A^*y = c,\ y \le 0. \tag{P^{**}}$$

Для задачи линейного программирования в нормальной форме:

$$\langle c, x\rangle \to \max;\ \ Ax \le b,\ \ x \ge 0, \tag{P_n}$$

выпишем без доказательства двойственную задачу (попробуйте сделать это самостоятельно):

$$\langle b, y\rangle \to \min;\ \ A^* y \ge c,\ \ y \ge 0. \tag{P_n^{**}}$$

Как мы видим, двойственная задача в этом случае обладает определенной симметрией по отношению к исходной. Векторы b и c меняются местами, максимум меняется на минимум, матрица A меняется на транспонированную, а матричное неравенство меняет знак.

2.3.2 Вывод задачи двойственной к двойственной задаче для задачи линейного программирования в общей форме

Покажем, что понятие "двойственности" введено правильно, т. е. двойственная задача к двойственной является исходной задачей.

$$\langle c, x\rangle \to \min;\ \ Ax \le b;\quad (P) \qquad \langle b, y\rangle \to \max;\ \ A^* y = c,\ \ y \le 0.\ \ (P^{**})$$

Для того, чтобы вывести двойственную задачу к задаче (P^{**}) сведем ее к задаче линейного программирования в общей форме, для которой уже известна двойственная задача.

Вначале сведем задачу на минимум, заменяя функционал $\langle b, y\rangle$ на функционал $\langle -b, y\rangle$. Затем заменим равенство $A^* y = c$ на два неравенства $c \le A^* y \le c \Leftrightarrow \begin{cases} A^* y \le c, \\ -A^* y \le -c. \end{cases}$ Получим эквивалентную задачу линейного программирования в общей форме:

$$\langle -b, y\rangle \to \min;\ \begin{pmatrix} A^* \\ -A^* \\ I \end{pmatrix} y \le \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Двойственная к ней будет следующая задача:

$$\langle (c, -c, 0), (x^1, x^2, x^3) \rangle \to \max;$$
$$(A \ \ -A \ \ I) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = -b, \ x^1 \leq 0, \ x^2 \leq 0, \ x^3 \leq 0.$$

Перепишем эту задачу в виде

$$\langle c, x^1 - x^2 \rangle \to \max; \ A(x^1 - x^2) + x^3 = -b, \ x^1 \leq 0, \ x^2 \leq 0, \ x^3 \leq 0.$$

Равенство $A(x^1 - x^2) + x^3 = -b$ при $x^3 \leq 0$ эквивалентно неравенству $A(x^1 - x^2) \geq -b$. Обозначим $x = x^2 - x^1$, тогда ограничений на знак x уже не будет. Задача перепишется в виде

$$-\langle c, x \rangle \to \max; \ A(-x) \geq -b.$$

Заменяя max на min и умножая векторное неравенство на -1, придем к задаче

$$\langle c, x \rangle \to \min; \ Ax \leq b, \qquad (P)$$

являющейся двойственной к задаче (P^{**}), которая совпадает с исходной задачей (P).

Таким образом, мы убедились, что термин “двойственная задача” используется правильно.

2.3.3 Вывод задачи двойственной к задаче в канонической форме

Задачу линейного программирования в канонической форме

$$\langle c, x \rangle \to \max; \ Ax = b, \ x \geq 0, \qquad (P_k)$$

сведем к задаче на минимум:

$$\langle -c, x \rangle \to \min; \ Ax = b, \ x \geq 0, \qquad (P')$$

при этом $S_{P_k} = -S_{P'}$.

Обозначим через $S(b) := \inf\limits_x \{\langle -c, x \rangle \mid Ax = b, \ x \geq 0\}$ — S-функцию задачи (P'), рассматривая аргумент b как параметр.

Найдем первую сопряженную функцию к функции $S(b)$:

$$S^*(b^*)=\sup_b\{\langle b^*,b\rangle-S(b)\}=\sup_b\{\langle b^*,b\rangle-\inf_x\{\langle -c,x\rangle\,|Ax=b,\ x\geq 0\}\}=$$

(поскольку $-\inf\{-f\}=\sup f$)

$$=\sup_{b,x}\{\langle b^*,b\rangle+\langle c,x\rangle\mid Ax=b,\ x\geq 0\}=\sup_x\{\langle b^*,Ax\rangle+\langle c,x\rangle\mid x\geq 0\}=$$

$$=\sup_x\{\langle A^*b^*+c,x\rangle\mid x\geq 0\}=\begin{cases}0, & A^*b^*+c\leq 0,\\ +\infty, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Найдем сопряженную в смысле Лежандра функцию к функции $S^*(b^*)$, т. е. вторую сопряженную к функции $S(b)$:

$$S^{**}(b)=\sup_{b^*}\{\langle b^*,b\rangle-S^*(b^*)\}=\sup_{b^*}\{\langle b^*,b\rangle\mid A^*b^*+c\leq 0\}\Rightarrow$$

$$S_{P_k^{**}}=-S^{**}(b)=\inf_{b^*}\{\langle -b^*,b\rangle\mid A^*b^*+c\leq 0\}.$$

Полагая $y=-b^*$, получаем $S_{P_k^{**}}=\inf_y\{\langle y,b\rangle\mid -A^*y+c\leq 0\}$, и, следовательно, имеем следующую двойственную задачу

$$\langle y,b\rangle\to\min;\ A^*y\geq c. \qquad (P_k^{**})$$

Замечание. Отметим, что при выводе задачи двойственной к задаче в канонической форме мы также фактически вывели, что для задачи

$$\langle c,x\rangle\to\min;\ Ax=b,\ x\geq 0,$$

двойственной является задача

$$\langle y,b\rangle\to\max;\ A^*y\leq c.$$

2.3.4 Упражнения

1. Вывести двойственную задачу для задачи линейного программирования в нормальной форме с помощью преобразования Лежандра.

2. Вывести двойственную для задачи линейного программирования в нормальной форме путем сведения ее к общей задаче линейного программирования.

3. Вывести двойственную для задачи линейного программирования в канонической форме путем сведения ее к общей задаче линейного программирования.

4. Вывести двойственную для задачи линейного программирования $\langle c, x\rangle \to \inf;\ Ax = b,\ x \geq 0$, путем сведения ее к канонической задаче, для которой двойственная известна.

5. Вывести двойственную для задачи линейного программирования в нормальной форме путем сведения ее к канонической задаче.

6. Вывести двойственную для задачи линейного программирования $\langle c, x\rangle \to \inf;\ Ax \geq b,\ x \geq 0$ с помощью преобразования Лежандра.

7. Вывести двойственную для задачи линейного программирования $\langle c, x\rangle \to \sup;\ Ax \geq b,\ x \geq 0$ с помощью преобразования Лежандра.