

5 Элементы функционального анализа

5.1 Линейные, нормированные и банаховы пространства

5.1.1 Определение пространств

Непустое множество X элементов x, y, z, \dots называется *линейным* (векторным) пространством, если

а) для любых элементов $x, y \in X$ однозначно определен элемент из X , называемый их суммой и обозначаемый $x + y$;

б) для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ и элемента x однозначно определен элемент, называемый произведением числа λ на элемент x и обозначаемый λx .

Эти операции должны удовлетворять следующим условиям:

I. 1°. $x + y = y + x$ — коммутативность.

2°. $(x + y) + z = x + (y + z)$ — ассоциативность.

3°. Существует элемент 0 такой, что $x + 0 = x \forall x \in X$. Элемент 0 называется *нулевым* элементом.

4°. Для любого элемента x существует элемент, обозначаемый через $-x$, такой, что $x + (-x) = 0$.

II. 1°. $1 \cdot x = x$.

2°. $\alpha(\beta x) = \alpha\beta(x)$.

III. 1°. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

2°. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Линейное пространство X называется *нормированным*, если на X определен функционал $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$, называемый *нормой* и удовлетворяющий условиям:

а) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

б) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in X$;

в) $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in X$.

Линейное нормированное пространство иногда будем называть для краткости нормированным пространством. Иногда, чтобы подчеркнуть, что норма задана именно на пространстве X , мы пишем $\|x\|_X$. Две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ на X называются *эквивалентными*, если существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1.$$

Всякое нормированное пространство становится *метрическим*, если в нем ввести расстояние $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$. В метрическом пространстве с помощью открытых и замкнутых шаров естественным образом вводятся понятия открытых и замкнутых множеств, сходимость.

Последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ метрического пространства называется *фундаментальной*, если она удовлетворяет *критерию Коши*, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует N_ε такое, что $d(x_{n_1}, x_{n_2}) < \varepsilon$ для всех $n_1, n_2 > N_\varepsilon$.

Метрическое пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность сходится.

Полное относительно введенного расстояния метрическое пространство называется *банаховым* пространством.

Отметим, что всякое конечномерное нормированное пространство является банаховым. Бесконечномерное нормированное пространство не обязано быть банаховым (приведите пример!).

5.1.2 Произведение пространств

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства. Декартово произведение $X \times Y$ можно превратить в линейное нормированное пространство, введя норму

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \max \{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

Легко проверить, что все аксиомы нормы выполняются. Возможны и другие эквивалентные нормировки.

Отметим очевидное утверждение: *декартово произведение банаховых пространств банахово*.

5.1.3 Примеры банаховых пространств

1. Конечномерное пространство \mathbb{R}^n , состоящее из векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ с нормой

$$\|x\| = |x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Эту норму иногда называют *евклидовой нормой*, а расстояние, вводимое с помощью этой нормы, называют *евклидовым расстоянием*.

2. Конечномерное пространство l_p , $1 \leq p \leq \infty$, состоящее из векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ с нормой

$$\|x\|_{l_p} = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n x_j^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Отметим, что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

3. Бесконечномерное пространство l_2 , состоящее из последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (иногда пишем, $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$), для которых $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$, с нормой

$$\|x\|_{l_2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

4. Пространство $C([t_0, t_1]) := C([t_0, t_1], \mathbb{R})$ непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$ функций $x(\cdot)$ с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{C([t_0, t_1])} = \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)|.$$

Обобщением этого пространства является пространство $C(K, \mathbb{R}^n)$ непрерывных вектор-функций $x(\cdot): K \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданных на компакте K , с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{C(K)} = \max_{t \in K} |x(t)|.$$

5. Пространство $C^1([t_0, t_1]) := C^1([t_0, t_1], \mathbb{R})$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[t_0, t_1]$ функций $x(\cdot)$ с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{C^1([t_0, t_1])} = \max \{ \|x(\cdot)\|_{C([t_0, t_1])}, \|\dot{x}(\cdot)\|_{C([t_0, t_1])} \}.$$

Обобщением этого пространства является пространство $C^r(K, \mathbb{R}^n)$ r раз непрерывно дифференцируемых вектор-функций $x(\cdot): K \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданных на компакте K с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{C^r(K)} = \max \{ \|x(\cdot)\|_{C(K)}, \|\dot{x}(\cdot)\|_{C(K)}, \dots, \|x^{(r)}(\cdot)\|_{C(K)} \}.$$

5.1.4 Сопряженное пространство, сопряженный оператор

Совокупность X^* всех линейных непрерывных функционалов на нормированном пространстве X образует *сопряженное* к X пространство. Оно является банаховым пространством относительно нормы

$$\|x^*\|_{X^*} := \max_{\|x\|_X \leq 1} \langle x^*, x \rangle,$$

где $\langle x^*, x \rangle$ означает действие функционала x^* на элемент x .

Пусть X и Y — нормированные пространства. Через $L(X, Y)$ обозначим пространство линейных непрерывных операторов из X в Y . Для оператора $\Lambda \in L(X, Y)$ можно определить *сопряженный оператор* $\Lambda^* : Y^* \rightarrow X^*$, действующий по формуле

$$\langle \Lambda^* y^*, x \rangle = \langle y^*, \Lambda x \rangle \quad \forall x \in X.$$

Для линейного непрерывного функционала на произведении пространств имеет место следующая очевидная

Лемма. *Всякий функционал $\Lambda \in (X \times Y)^*$ однозначно представляется в виде*

$$\langle \Lambda, (x, y) \rangle = \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, y \rangle,$$

где $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$.

5.2 Определения производных

Для вещественнозначных функций одного вещественного переменного два определения — существование конечного предела

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + h) - f(\hat{x})}{h} \quad (1)$$

и возможность асимптотического разложения при $h \rightarrow 0$

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})h + o(h) \quad (2)$$

— приводят к одному и тому же понятию дифференцируемости. Но уже для функций двух и большего числа переменных существует несколько различных подходов к понятию дифференцируемости (гладкости). Определение (1) ведет к понятиям производной по направлению, вариации по Лагранжу и производной Гато. Определение (2) ведет к понятиям производной Гато, Фреше и строгой дифференцируемости.

Пусть далее в этом пункте X, Y, Z — линейные нормированные пространства. Как правило (если это не оговорено иначе), $f: X \rightarrow Y$ — отображение пространства X или некоторой окрестности точки $\hat{x} \in X$ в пространство Y .¹

5.2.1 Производная по направлению

Будем говорить, что отображение f имеет в точке \hat{x} *производную по направлению* h , если существует предел справа

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x})}{\lambda} =: \delta_+ f(\hat{x}, h),$$

который обозначается $\delta_+ f(\hat{x}, h)$. Плюс в индексе здесь указывает на то, что берется именно предел справа.

5.2.2 Вариация по Лагранжу

Если для отображения f в точке \hat{x} существует предел

$$\delta f(\hat{x}, h) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x})}{\lambda} \quad \forall h \in X,$$

¹Но вполне содержателен пример, когда $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$. Элемент из $L(X, Y)$ определяется в этом случае матрицей размера $n \times m$.

то говорят, что отображение f имеет в точке \hat{x} вариацию по Лагранжу. При этом отображение $h \rightarrow \delta f(\hat{x}, h)$ называют *вариацией по Лагранжу*, $\delta f(\hat{x}, \cdot): X \rightarrow Y$.

Таким образом, для существования вариации по Лагранжу необходимо существование в точке \hat{x} производной по всем направлениям h и выполнения равенств $\delta_+ f(\hat{x}, h) = -\delta_+ f(\hat{x}, -h) \forall h \in X$.

5.2.3 Производная Гато

Если оператор вариации по Лагранжу $\delta f(\hat{x}, \cdot): X \rightarrow Y$ линеен и непрерывен по h ($\delta f(\hat{x}, \cdot) \in L(X, Y)$), то говорят, что отображение f дифференцируемо по Гато в точке \hat{x} , а оператор $\delta f(\hat{x}, \cdot)$ называется *производной Гато отображения f в точке \hat{x}* и обозначается $f'_G(\hat{x})$.

Отсюда следует, что если отображение f дифференцируемо по Гато в точке \hat{x} , то для любого фиксированного вектора h имеет место разложение

$$f(\hat{x} + \lambda h) = f(\hat{x}) + \lambda f'_G(\hat{x})[h] + r(h, \lambda),$$

где $\|r(h, \lambda)\|_Y = o(|\lambda|)$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Отметим, что отображение, дифференцируемое по Гато в точке \hat{x} , не обязано быть непрерывным в этой точке (см. Пример 4, п. 5.2.8).

5.2.4 Производная Фреше

Отображение f называют *дифференцируемым по Фреше в точке \hat{x}* и пишут $f \in D(\hat{x})$, если существуют линейный непрерывный оператор $f'(\hat{x}): X \rightarrow Y$ и отображение $r: X \rightarrow Y$ такие, что

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})[h] + r(h), \quad (*)$$

где $\|r(h)\|_Y = o(\|h\|_X)$ при $\|h\|_X \rightarrow 0$. Оператор $f'(\hat{x})$ называется *производной Фреше*. Это разложение можно кратко записать так:

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})[h] + o(h),$$

понимая $o(h)$ как элемент пространства Y , для которого $\|o(h)\|_Y = o(\|h\|)$ при $\|h\| \rightarrow 0$. Через $f'(\hat{x})[h]$ обозначено значение отображения $f'(\hat{x})$ на элементе h .

Из разложения (*) следует, что функция, дифференцируемая по Фреше, непрерывна в точке дифференцируемости, а также дифференцируема в этой точке по Гато. Уже в двумерном случае эти два понятия различаются: из дифференцируемости функции по Гато не следует ее дифференцируемость по Фреше (см. Пример 4, п. 5.2.8). Аналогично из дифференцируемости по Гато по определению вытекает существование вариации по Лагранжу. И снова (уже в двумерном случае) эти понятия различны. Производная Фреше линейного оператора совпадает с самим оператором.

Если в каждой точке x открытого множества U отображение $f \in D(x)$, а отображение $x \rightarrow f'(x)$ непрерывно, то пишем $f \in C^1(U)$.

На языке ε - δ определение дифференцируемости по Фреше отображения f в точке \hat{x} формулируется так: существует оператор $f'(\hat{x}) \in L(X, Y)$ такой, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, при котором для любого $\|h\| < \delta$ выполняется неравенство

$$\|f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) - f'(\hat{x})[h]\|_Y \leq \varepsilon \|h\|_X.$$

Из разложения (*) следует, что производная Фреше определена однозначно, ибо равенство $\Lambda_1 h - \Lambda_2 h = o(h)$ для линейных непрерывных операторов Λ_1 и Λ_2 возможно лишь при $\Lambda_1 = \Lambda_2$.

Для функций одной переменной производная по Фреше совпадает с обычной производной, которая изучается в курсе математического анализа.

5.2.5 Строгая дифференцируемость

Во многих задачах конечномерного и бесконечномерного анализа дифференцируемости по Фреше в точке недостаточно для получения содержательного результата. Это побуждает к следующему усилению дифференцируемости в точке.

Пусть отображение f дифференцируемо по Фреше в точке \hat{x} . Оно называется *строго дифференцируемым в точке \hat{x}* (при этом пишут $f \in SD(\hat{x})$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x_1 и x_2 , удовлетворяющих неравенствам $\|x_1 - \hat{x}\| < \delta$, $\|x_2 - \hat{x}\| < \delta$, выполнено неравенство

$$\|f(x_1) - f(x_2) - f'(\hat{x})[x_1 - x_2]\|_Y \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|_X.$$

Из определения следует, что функция, строго дифференцируемая по Фреше в точке, непрерывна в некоторой окрестности этой точки.

Ниже будет показано, что если производная Фреше (даже производная Гато) отображения непрерывна в точке, то отображение будет строго дифференцируемо в этой точке.

5.2.6 Частные производные

Пусть X, Y, Z — нормированные пространства. Рассмотрим отображение $f: X \times Y \rightarrow Z$, $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$. Если отображение $x \rightarrow f(x, \hat{y})$ дифференцируемо в точке \hat{x} по Фреше, то его производная называется *частной производной по x отображения f в точке (\hat{x}, \hat{y})* и обозначается $f'_x(\hat{x}, \hat{y})$ или $\frac{\partial f(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x}$. Аналогично определяется частная производная по y $f'_y(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\partial f(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y}$.

5.2.7 Производные высших порядков

Дадим теперь определение второй производной Фреше. Если отображение $f: X \rightarrow Y$ дифференцируемо в каждой точке $x \in X$, то определено отображение $x \rightarrow f'(x)$ пространства X в пространство $L(X, Y)$. Поскольку $L(X, Y)$ также является линейным нормированным пространством, то можно определять производную Фреше этого отображения $f': X \rightarrow L(X, Y)$, которая и называется *второй производной* отображения f :

$$f''(\hat{x}) = (f')'(\hat{x}) \in L(X, L(X, Y)).$$

Для вектора $h_1 \in X$ определен оператор $f''(\hat{x})[h_1] \in L(X, Y)$. Для $h_2 \in X$ определен элемент $f''(\hat{x})[h_1][h_2] \in Y$. Тем самым определено отображение $f''(\hat{x})[h_1, h_2] := f''(\hat{x})[h_1][h_2]$. Значит, определено билинейное (линейное по каждому аргументу) отображение $f''(\hat{x}): X \times X \rightarrow Y$.

Аналогично определяются производные высших порядков.

Теорема (о смешанных производных). [АТФ, с. 156] *Если отображение f дважды дифференцируемо в точке \hat{x} ($f \in D^2(\hat{x})$), то*

$$f''(\hat{x})[h_1, h_2] = f''(\hat{x})[h_2, h_1] \quad \forall h_1, h_2 \in X.$$

5.2.8 Контрпримеры на дифференцируемость

Приведем несколько контрпримеров, показывающих, что введенные выше понятия дифференцируемости действительно различны.

Пример 1. *Непрерывная функция не имеет в фиксированной точке производной ни по какому направлению:*

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \hat{x} = 0.$$

На прямой \mathbb{R} имеются с точностью до умножения на положительную константу два направления: $h_1 = 1$ и $h_2 = -1$. Однако производных ни по какому направлению не существует. Действительно, предел

$$\delta_+ f(\hat{x}, h) \Big|_{\substack{\hat{x}=0 \\ h=1}} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x})}{\lambda} \Big|_{\substack{\hat{x}=0 \\ h=1}} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{\lambda \sin \frac{1}{\lambda}}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \sin \frac{1}{\lambda}$$

не существует. В силу четности функции f не существует также предел по направлению $h = -1$.

Пример 2. *Непрерывная функция имеет в фиксированной точке производную по всем направлениям, но не имеет в этой точке вариации по Лагранжу:*

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|, \hat{x} = 0.$$

Как и в примере 1 на прямой \mathbb{R} имеются с точностью до умножения на положительную константу два направления: $h_1 = 1$ и $h_2 = -1$. Пределы по обоим направлениям существуют:

$$\delta_+ f(\hat{x}, h) \Big|_{\substack{\hat{x}=0 \\ h=h_i}} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x})}{\lambda} \Big|_{\substack{\hat{x}=0 \\ h=h_i}} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{|\lambda h_i|}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{|\lambda|}{\lambda} = 1,$$

$i = 1, 2$. Но предел

$$\delta f(\hat{x}, h) \Big|_{\substack{\hat{x}=0 \\ h=1}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x})}{\lambda} \Big|_{\substack{\hat{x}=0 \\ h=1}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{|\lambda|}{\lambda}$$

не существует. Следовательно, отображение f не имеет в точке $\hat{x} = 0$ вариации по Лагранжу.

Отметим, что если $\hat{x} \neq 0$, то $\delta f(\hat{x}, h) = f'(\hat{x})[h] = \text{sign } \hat{x} \cdot h$.

Пример 3. *Отображение имеет в фиксированной точке вариацию по Лагранжу, непрерывно в этой точке, но не имеет в этой точке производной Гато.*

Определим отображение в полярных координатах $x = (x_1, x_2) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ по формуле: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = r \cos 3\varphi$, $\hat{x} = 0$.

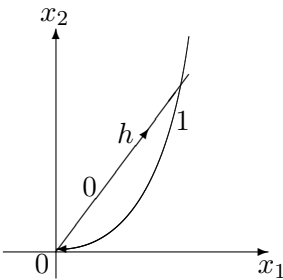
Вычислим вариацию по Лагранжу данного отображения в точке $\hat{x} = 0$. Возьмем произвольное направление $h = (t \cos \alpha, t \sin \alpha)$. Тогда

$$\delta f(\hat{x}, h) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left. \frac{f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x})}{\lambda} \right|_{\hat{x}=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda t \cos 3\alpha}{\lambda} = t \cos 3\alpha.$$

Покажем, что вариация по Лагранжу $\delta f(\hat{x}, h)$ не является линейным оператором по h . Действительно, возьмем два вектора $h_1 = (1, 0) = (\cos 0, \sin 0)$ ($t = 1, \alpha = 0$) и $h_2 = (0, 1) = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right)$ ($t = 1, \alpha = \frac{\pi}{2}$). Тогда $h_1 + h_2 = (1, 1) = \left(\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}\right)$. Однако $\delta f(\hat{x}, h_1 + h_2) = \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4} = -1 \neq \delta f(\hat{x}, h_1) + \delta f(\hat{x}, h_2) = \cos 0 + \cos \frac{3\pi}{2} = 1$.

Пример 4. *Функция f имеет в фиксированной точке производную Гато, но не имеет в этой точке производной Фреше:*

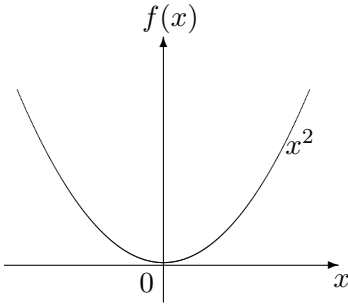
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x_2 = x_1^2, x_1 > 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad \hat{x} = (0, 0).$$



Поскольку $\delta f(\hat{x}, h) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x})}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda h)}{\lambda} = 0$ для любого h , то производная Гато существует и $f'_G(\hat{x}) = 0$. С другой стороны, функция f разрывна в точке $\hat{x} = (0, 0)$, а функция, дифференцируемая по Фреше, должна быть непрерывна в точке дифференцируемости.

Пример 5. *Функция имеет в фиксированной точке производную Фреше, но не строго дифференцируема в этой точке:*

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ рационально,} \\ 0, & x \text{ иррационально,} \end{cases} \quad \hat{x} = 0.$$



Выписанная функция одной (!) переменной дифференцируема в точке $\hat{x} = 0$. Значит она дифференцируема по Фреше в этой точке. С другой стороны, функция имеет разрывы в любой окрестности нуля, а строго дифференцируемая функция должна быть непрерывна в некоторой окрестности \hat{x} .

5.3 Некоторые теоремы дифференциального исчисления в нормированных пространствах.

Приведем несколько теорем, наиболее часто используемых для решения экстремальных задач.

5.3.1 Теорема о суперпозиции

Теорема. Пусть X, Y, Z — линейные нормированные пространства, $\varphi: X \rightarrow Y$, $\psi: Y \rightarrow Z$, $\varphi(\hat{x}) = \hat{y}$, $f = \psi \circ \varphi: X \rightarrow Z$ — суперпозиция отображений φ и ψ . Тогда, если отображение ψ дифференцируемо по Фреше в точке \hat{y} , а отображение φ в точке \hat{x} имеет вариацию по Лагранжу (дифференцируемо по Гато, дифференцируемо по Фреше), то отображение f обладает в точке \hat{x} тем же свойством, что и отображение φ , и при этом соответственно

A) $\delta f(\hat{x}, h) = \psi'(\hat{y})[\delta\varphi(\hat{x}, h)] \quad \forall h \in X$,

B) $f'_G(\hat{x}) = \psi'(\hat{y}) \circ \varphi'_G(\hat{x})$,

C) $f'(\hat{x}) = \psi'(\hat{y}) \circ \varphi'(\hat{x}) \quad (\Leftrightarrow f'(\hat{x})[h] = \psi'(\hat{y})[\varphi'(\hat{x})[h]])$,

D) Если отображение $\psi \in SD(\hat{y})$ строго дифференцируемо в точке \hat{y} , а отображение $\varphi \in SD(\hat{x})$ строго дифференцируемо в точке \hat{x} , то отображение $f \in SD(\hat{x})$ строго дифференцируемо в точке \hat{x} .

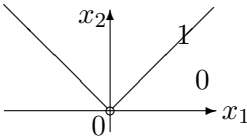
Замечание. Теорема о суперпозиции не имеет места для производной Гато.

Доказательство. Пусть $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$, $\hat{x} = 0$, $\varphi(\hat{x}) = \hat{y} = 0$, $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\psi(y_1, y_2) = \begin{cases} 1, & y_1 = y_2^2, y_2 > 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Функция φ дифференцируема по Фреше в точке \hat{x} и даже строго дифференцируема (проверьте!), функция ψ дифференцируема по Гато в точке \hat{y} (см. Пример 4, п. 5.2.8). С другой стороны, функция

$$f(x) = \psi \circ \varphi(x) = \psi(x_1^2, x_2) = \begin{cases} 1, & x_1^2 = x_2^2, x_2 > 0 \Leftrightarrow x_2 = |x_1|, x_2 > 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$



являющаяся суперпозицией отображений φ и ψ , не дифференцируема по Гато в нуле (и даже не имеет в этой точке производных по направлениям $h = (1, 1)$ и $h = (-1, 1)$). \triangleright

5.3.2 Формула Тейлора

Теорема. [АТФ, с. 159] Пусть X, Y — нормированные пространства, отображение $f : X \rightarrow Y$, причем отображение f n раз дифференцируемо по Фреше в точке \hat{x} ($f \in D^n(\hat{x})$). Тогда имеет место разложение в ряд Тейлора

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})[h] + \frac{1}{2}f''(\hat{x})[h, h] + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\hat{x})[h, \dots, h] + r(h),$$

где $\|r(h)\| = o(\|h\|^n)$ при $h \rightarrow 0$.

5.3.3 Теорема о среднем

Хорошо известно, что для числовых функций одного переменного справедлива следующая теорема Лагранжа, называемая иногда также теоремой о среднем значении или формулой конечных приращений:

Теорема Лагранжа. Если функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b) , то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (*)$$

Замечание 1. Формула (*) остается справедливой и для числовых функций $f(x)$, аргумент которых принадлежит произвольному линейному нормированному пространству. Дифференцируе-

мость понимается в смысле Гато. ($f: X \rightarrow \mathbb{R}$, X — л.н.п., $f \in C[a, b]^2$, $D_G(a, b)^3 \Rightarrow (*)$)

Доказательство. Полагая $\varphi(t) := f(a + t(b - a))$, мы сводим доказательство к случаю функции одной переменной:

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) = f'(a + \theta(b - a))(b - a) = f'(c)(b - a),$$

где $\theta \in (0, 1)$, $c = a + \theta(b - a) \in (a, b)$. \triangleright

Замечание 2. Для векторнозначных функций теорема Лагранжа неверна.

Доказательство. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\sin x, -\cos x)$. Тогда $f'(x)[h] = (\cos x, \sin x)[h] = (h \cos x, h \sin x)$, $h \in \mathbb{R}$. В то же время

$$f(2\pi) - f(0) = (\sin 2\pi, -\cos 2\pi) - (\sin 0, -\cos 0) = (0, 0),$$

$$f'(c)[2\pi - 0] = 2\pi(\cos c, \sin c).$$

Равенства $f(2\pi) - f(0) = f'(c)[2\pi - 0] \Leftrightarrow (0, 0) = 2\pi(\cos c, \sin c)$ не может быть ни для какого c , так как $\cos c$ и $\sin c$ одновременно в ноль не обращаются. Значит, формула (*) для функции f не имеет места. \triangleright

Отметим, что в анализе, как правило, используется не сама формула (*), а вытекающая из нее оценка

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{c \in (a, b)} |f'(c)| \cdot |b - a|$$

Покажем, что в этом более слабом виде утверждение распространяется уже на случай произвольных нормированных пространств. По традиции оно сохраняет название “теорема о среднем”, хотя, конечно, его следовало бы назвать “теоремой об оценке конечного приращения”.

Теорема о среднем. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, отображение $f: X \rightarrow Y$ дифференцируемо по Гато в каждой точке отрезка $[a, b]$. Тогда

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{c \in (a, b)} \|f'_G(c)\| \cdot \|b - a\|.$$

²Отрезок $[a, b] = \{x \in X \mid x = a + t(b - a), 0 \leq t \leq 1\}$.

³Интервал $(a, b) = \{x \in X \mid x = a + t(b - a), 0 < t < 1\}$.

Доказательство. По лемме Банаха (см. п. 5.4) для любого $y \in Y$, а значит, и для $y = f(b) - f(a)$ найдется элемент $y^* \in Y^*$ такой, что $\|y^*\| = 1$ и $\langle y^*, y \rangle = \|y\|$, т.е. $\langle y^*, f(b) - f(a) \rangle = \|f(b) - f(a)\|$.

Обозначим $\varphi(t) = \langle y^*, f(a + t(b - a)) \rangle$. Поскольку y^* — линейный непрерывный функционал, а отображение f в каждой точке отрезка $[a, b]$ имеет производную Гато, то по теореме о суперпозиции, пользуясь тем, что производная Фреше линейного непрерывного функционала совпадает с ним самим, получим

$$\varphi'(t) = \langle y^*, f'_G(a + t(b - a))[b - a] \rangle \quad \forall t \in [0, 1].$$

Из дифференцируемости функции φ следует ее непрерывность на отрезке $[0, 1]$ и, следовательно, к ней можно применить формулу Лагранжа: $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$, $\theta \in (0, 1)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| &= \langle y^*, f(b) - f(a) \rangle = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) = \\ &= \langle y^*, f'_G(a + \theta(b - a))[b - a] \rangle \leq \|y^*\| \cdot \|f'_G(a + \theta(b - a))[b - a]\| = \\ &\stackrel{\|y^*\|=1}{=} \|f'_G(a + \theta(b - a))[b - a]\| \leq \\ &\leq \|f'_G(a + \theta(b - a))\| \cdot \|b - a\| \leq \sup_{c \in (a, b)} \|f'_G(c)\| \cdot \|b - a\|. \end{aligned}$$

Приведем несколько следствий из теоремы о среднем.

Следствие 1. Пусть выполнены все условия теоремы о среднем ($f \in D_G[a, b]$) и оператор $\Lambda \in L(X, Y)$. Тогда

$$\|f(b) - f(a) - \Lambda(b - a)\| \leq \sup_{c \in (a, b)} \|f'_G(c) - \Lambda\| \cdot \|b - a\|.$$

Доказательство. Надо применить теорему о среднем к отображению $g = f - \Lambda$.

Следствие 2. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, отображение $f: X \rightarrow Y$ дифференцируемо по Гато в некоторой окрестности точки \hat{x} , отображение $x \rightarrow f'_G(x)$ непрерывно в точке \hat{x} . Тогда отображение f строго дифференцируемо в точке \hat{x} (а следовательно, и дифференцируемо по Фреше в той же точке).

Доказательство. В силу непрерывности отображения $x \rightarrow f'_G(x)$ в точке \hat{x} для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\|f'_G(x) - f'_G(\hat{x})\| < \varepsilon$ при $\|x - \hat{x}\| < \delta$.

В силу выпуклости шара $B := \overset{\circ}{B}(\hat{x}, \delta) = \{x \mid \|x - \hat{x}\| < \delta\}$ из условия $x_1, x_2 \in B$ следует, что отрезок $[x_1, x_2] \in B$. По следствию 1 теоремы о среднем с $\Lambda = f'_G(\hat{x})$ получаем

$$\begin{aligned} & \|f(x_1) - f(x_2) - f'_G(\hat{x})[x_1 - x_2]\| \leq \\ & \leq \sup_{x \in (x_1, x_2)} \|f'_G(x) - f'_G(\hat{x})\| \cdot \|x_1 - x_2\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

что означает строгую дифференцируемость отображения f в точке \hat{x} . \triangleright

Следствие 2 показывает, что при проверке дифференцируемости конкретного функционала достаточно доказать существование производной Гато в некоторой окрестности точки \hat{x} и проверить ее непрерывность в точке \hat{x} . Это гарантирует строгую дифференцируемость в точке \hat{x} и тем более существование производной Фреше.

Следствие 3. *Существование второй производной Фреше в точке гарантирует строгую дифференцируемость отображения в этой точке ($f \in D^2(\hat{x}) \Rightarrow f \in SD(\hat{x})$).*

Доказательство. Покажем, что все условия для выполнения Следствия 2 имеются. Действительно, из существования второй производной Фреше в точке \hat{x} следует существование производной Фреше (и, следовательно, существование производной Гато) в некоторой окрестности этой точки, а также непрерывность производной Фреше (и, следовательно, непрерывность производной Гато) в точке \hat{x} . Тогда по Следствию 2 вытекает строгая дифференцируемость отображения в этой точке. \triangleright

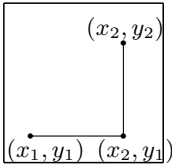
5.3.4 Теорема о полном дифференциале

Теорема. *Пусть X, Y, Z — линейные нормированные пространства, отображение $F: X \times Y \rightarrow Z$ имеет в каждой точке (x, y) из некоторой окрестности точки $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ частные производные $F_x(x, y)$ и $F_y(x, y)$ в смысле Гато, являющиеся непрерывными по совокупности переменных в точке (\hat{x}, \hat{y}) . Тогда отображение $F \in SD(\hat{x}, \hat{y})$ строго дифференцируемо в той же точке и при этом*

$$F'(\hat{x}, \hat{y})[(\xi, \eta)] = F_x(\hat{x}, \hat{y})[\xi] + F_y(\hat{x}, \hat{y})[\eta].$$

Доказательство. В силу непрерывности отображений $F_x(x, y)$ и $F_y(x, y)$ в точке (\hat{x}, \hat{y}) для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что для любой точки (x, y) из “прямоугольной” окрестности $V := \overset{\circ}{B}(\hat{x}, \delta) \times \overset{\circ}{B}(\hat{y}, \delta)$ точки (\hat{x}, \hat{y}) существуют частные производные $F_x(x, y)$ и $F_y(x, y)$ в смысле Гато и выполняются неравенства

$$\|F_x(x, y) - F_x(\hat{x}, \hat{y})\| < \varepsilon, \quad \|F_y(x, y) - F_y(\hat{x}, \hat{y})\| < \varepsilon. \quad (*)$$



Если точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$, то и точка $(x_2, y_1) \in V$ и оба отрезка $[(x_1, y_1), (x_2, y_1)], [(x_2, y_1), (x_2, y_2)] \in V$ в силу выпуклости множества V . Поэтому отображения $x \rightarrow F(x, y_1)$ и $y \rightarrow F(x_2, y)$ дифференцируемы и имеют производные $F_x(x, y_1)$ на отрезке $[x_1, x_2]$, $F_y(x_2, y)$ на отрезке $[y_1, y_2]$.

Рассмотрим норму разности

$$\|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2) - F_x(\hat{x}, \hat{y})[x_1 - x_2] - F_y(\hat{x}, \hat{y})[y_1 - y_2]\| =$$

(вычтем и добавим $F(x_2, y_1)$)

$$\begin{aligned} &= \|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_1) - F_x(\hat{x}, \hat{y})[x_1 - x_2] + \\ &+ F(x_2, y_1) - F(x_2, y_2) - F_y(\hat{x}, \hat{y})[y_1 - y_2]\| \leq \end{aligned}$$

(по неравенству треугольника для норм и Следствию 1 Теоремы о среднем)

$$\leq \sup_{x \in (x_1, x_2)} \|F_x(x, y_1) - F_x(\hat{x}, \hat{y})\| \cdot \|x_1 - x_2\| +$$

$$+ \sup_{y \in (y_1, y_2)} \|F_y(x_2, y) - F_y(\hat{x}, \hat{y})\| \cdot \|y_1 - y_2\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\| + \varepsilon \|y_1 - y_2\|$$

для любых $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$, что и означает строгую дифференцируемость отображения F в точке (\hat{x}, \hat{y}) и дает явный вид производной Фреше (и полного дифференциала) отображения от двух переменных. \triangleright

5.4 Дополнительные сведения из алгебры и функционального анализа

В этом пункте приводятся дополнительные сведения из алгебры и функционального анализа, которые понадобятся для доказательства теорем об условиях экстремума в гладких экстремальных задачах в нормированных пространствах.

Определение. *Аннулятором* A^\perp множества A линейного нормированного пространства X называется множество линейных непрерывных функционалов x^* , для которых $\langle x^*, x \rangle = 0$ для любого $x \in A$:

$$A^\perp := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle = 0 \quad \forall x \in A\}.$$

Отметим, что аннулятор A^\perp всегда содержит нулевой элемент ($x^* = 0$) сопряженного пространства X^* .

Лемма о нетривиальности аннулятора. *Пусть L — замкнутое собственное* (т. е. $L \neq X$) *подпространство* линейного нормированного пространства X . Тогда аннулятор L^\perp содержит ненулевой элемент $x^* \in X^*$.

Доказательство. Поскольку $L \neq X$, то существует точка $\hat{x} \notin L$. По теореме о строгой отделимости точки, не принадлежащей выпуклому замкнутому множеству, от множества существует линейный непрерывный функционал $x^* \in X^*$, строго разделяющий точку \hat{x} и подпространство L (L — подпространство линейного пространства и, следовательно, выпукло)

$$\langle x^*, \hat{x} \rangle > \sup_{x \in L} \langle x^*, x \rangle. \quad (*)$$

Из этого неравенства следует, что $x^* \neq 0$. Покажем, что $x^* \in L^\perp$, т. е. $\langle x^*, x \rangle = 0 \quad \forall x \in L$. Действительно, если бы существовало $x_0 \in L$, для которого $\langle x^*, x_0 \rangle \neq 0$, то поскольку $\alpha x_0 \in L$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, было бы

$$\sup_{x \in L} \langle x^*, x \rangle \geq \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \langle x^*, \alpha x_0 \rangle = +\infty.$$

Это не так в силу неравенства (*). Следовательно, $\langle x^*, x \rangle = 0 \quad \forall x \in L$ и, поэтому $x^* \in L^\perp$. \triangleright

Далее нам понадобятся следующие две теоремы из функционального анализа и некоторые леммы.

Теорема Банаха об открытости. [КФ, с. 262; ГТ, с. 109] Пусть X, Y — банаховы пространства, Λ — непрерывный линейный оператор из X в Y , являющийся эпиморфизмом ($\Lambda: X \xrightarrow{\text{на}} Y$). Тогда образ каждого открытого множества в X открыт в Y .

Теорема Банаха об обратном операторе. [КФ, с. 213] Пусть X, Y — банаховы пространства, Λ — непрерывный линейный оператор из X в Y , являющийся эпиморфизмом и $\text{Ker } \Lambda = 0$. Тогда существуют обратный оператор $\Lambda^{-1}: Y \rightarrow X$, так же линейный и непрерывный.

Лемма Банаха. [ГТ, с. 109] Пусть X — линейное нормированное пространство, $x_0 \in X$. Тогда существует линейный непрерывный функционал $x^* \in X^*$ такой, что $\|x^*\| = 1$, $\langle x^*, x_0 \rangle = \|x_0\|$.

Лемма Банаха является следствием из известной теоремы Хана–Банаха о продолжении линейного функционала.

Лемма о правом обратном отображении. Пусть X, Y — банаховы пространства, Λ — непрерывный линейный оператор из X в Y , являющийся эпиморфизмом. Тогда существуют отображение $M: Y \rightarrow X$ (необязательно непрерывное и необязательно линейное) и константа $K > 0$ такие, что

$$\Lambda \circ M = I_Y^4, \quad \|My\| \leq K\|y\| \quad \forall y \in Y.$$

Доказательство. Обозначим $B_X := \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$ — открытый шар радиуса 1 в пространстве X . По теореме Банаха об открытости образ открытого множества ΛB_X открыт. Поскольку при линейном отображении ноль переходит в ноль, то множество ΛB_X содержит внутренней точкой ноль, и, следовательно, содержит какой-то некоторый открытый шар с центром в нуле $\delta B_Y := \{y \in Y \mid \|y\| < \delta\}$. Значит, для любого $y \in \delta B_Y$ найдется $x(y)$ такой, что $\Lambda x(y) = y$, $\|x(y)\| < 1$. Для любого $y \in Y$, $y \neq 0$, обозначим $My := \frac{2\|y\|}{\delta} x\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right)$.

Тогда $\left\| \frac{\delta y}{2\|y\|} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ и из определения отображения M имеем:

$$\Lambda \circ My = \Lambda\left(\frac{2\|y\|}{\delta} x\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right)\right) = \frac{2\|y\|}{\delta} \Lambda\left(x\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right)\right) = \frac{2\|y\|}{\delta} \cdot \frac{\delta y}{2\|y\|} = y,$$

⁴Через I_Y обозначается тождественный оператор на пространстве Y .

$$\|My\| = \left\| \frac{2\|y\|}{\delta} x \left(\frac{\delta y}{2\|y\|} \right) \right\| = \frac{2\|y\|}{\delta} \cdot \left\| x \left(\frac{\delta y}{2\|y\|} \right) \right\| \leq \frac{2}{\delta} \|y\|. \triangleright$$

Лемма о замкнутости образа. Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $A: X \rightarrow Y$, $B: X \rightarrow Z$ — линейные непрерывные операторы, подпространство $\text{Im } A$ замкнуто в Y , подпространство $B\text{Ker } A$ замкнуто в Z , $C: X \rightarrow Y \times Z$, $Cx := (Ax, Bx)$. Тогда C — линейный непрерывный оператор и подпространство $\text{Im } C$ замкнуто в $Y \times Z$.

Доказательство. Очевидно, что оператор C линеен и непрерывен. Докажем замкнутость его образа. Замкнутое подпространство $\tilde{Y} = \text{Im } A$ банахового пространства Y само банахово и, значит, отображение $A: X \rightarrow \tilde{Y}$ — эпиморфизм. По лемме о правом обратном отображении существуют оператор $M: \tilde{Y} \rightarrow X$ и константа $K > 0$ такие, что

$$A \circ M = I_{\tilde{Y}}, \quad \|My\| \leq K\|y\| \quad \forall y \in \tilde{Y}.$$

Пусть точка $(y, z) \in \overline{\text{Im } C}$ принадлежит замыканию образа оператора C . Это означает, что найдется последовательность $\{x_n\}$ такая, что последовательность $\{(Ax_n, Bx_n)\}$ сходится к (y, z) . В силу замкнутости подпространства $\text{Im } A$ предельная точка $y = \lim Ax_n \in \text{Im } A = \tilde{Y}$. Значит, определены точки $h_n := M(Ax_n - y)$. По свойству оператора M

$$A(x_n - h_n) = Ax_n - A(M(Ax_n - y)) \stackrel{A \circ M = I_{\tilde{Y}}}{=} Ax_n - (Ax_n - y) = y,$$

$\|h_n\| = \|M(Ax_n - y)\| \leq K\|Ax_n - y\| \rightarrow 0$. Поэтому $Bh_n \rightarrow 0$ в силу непрерывности оператора B и

$$z := \lim Bx_n = \lim B(x_n - h_n),$$

т. е. z принадлежит замыканию множества $\Sigma = \{z = Bx \mid Ax = y\}$. Это множество, как легко видеть, является сдвигом подпространства $B\text{Ker } A$, следовательно, замкнуто. Итак, $z \in \bar{\Sigma} = \Sigma$. Это означает, что существует $x \in X$: $Ax = y$, $Bx = z$, т. е. $(y, z) \in \text{Im } C$. \triangleright

Лемма об аннуляторе ядра регулярного оператора. Пусть X, Y — банаховы пространства, $A: X \rightarrow Y$ — линейный непрерывный эпиморфизм. Тогда $(\text{Ker } A)^\perp = \text{Im } A^*$.

Доказательство. А) Докажем, что $(\text{Ker } A)^\perp \supset \text{Im } A^*$. Возьмем $x^* \in \text{Im } A^* \Rightarrow x^* = A^*y^*$. Следовательно,

$$\langle x^*, x \rangle = \langle A^*y^*, x \rangle = \langle y^*, Ax \rangle = 0 \quad \forall x \in \text{Ker } A.$$

Значит, $x^* \in (\text{Ker } A)^\perp$. Вложение доказано.

В) Докажем, что $(\text{Ker } A)^\perp \subset \text{Im } A^*$. Возьмем $x^* \in (\text{Ker } A)^\perp$, т. е. $\langle x^*, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \text{Ker } A$. Применим лемму о замкнутости образа для пространств $X, Y, Z = \mathbb{R}$ и отображений $A, Bx := \langle x^*, x \rangle$. Условия леммы выполняются: подпространство $\text{Im } A = Y$ замкнуто в Y , подпространство $B\text{Ker } A = \langle x^*, \text{Ker } A \rangle = 0$, состоящее из одного нуля, замкнуто в $Z = \mathbb{R}$. По лемме о замкнутости образа подпространство $\text{Im } C = \text{Im } (A, x^*)$ замкнуто в $Y \times Z = Y \times \mathbb{R}$. Подпространство $\text{Im } (A, x^*)$ является собственным, так как точка $(0, 1) \notin \text{Im } (A, x^*)$ (если $Ax = 0$, то $\langle x^*, x \rangle = 0 \neq 1$).

По лемме о нетривиальности аннулятора замкнутого собственного подпространства существует ненулевой линейный непрерывный функционал $(y^*, \lambda) \in (\text{Im } (A, x^*))^\perp \subset (Y \times \mathbb{R})^* = Y^* \times \mathbb{R}^* = Y^* \times \mathbb{R}$ такой, что

$$\begin{aligned} \langle (y^*, \lambda), (Ax, \langle x^*, x \rangle) \rangle = 0 &\iff \langle y^*, Ax \rangle + \lambda \langle x^*, x \rangle = 0 \iff \\ \langle A^*y^*, x \rangle + \lambda \langle x^*, x \rangle = 0 &\iff \langle A^*y^* + \lambda x^*, x \rangle = 0 \quad \forall x \in X \\ &\iff A^*y^* + \lambda x^* = 0. \end{aligned}$$

Причем $\lambda \neq 0$ (ибо иначе $\langle y^*, Ax \rangle = 0 \quad \forall x \in X \stackrel{AX=Y}{\implies} y^* = 0$ — противоречие). Тогда $x^* = A^*\left(-\frac{y^*}{\lambda}\right) \in \text{Im } A^*$, т. е. $(\text{Ker } A)^\perp \subset \text{Im } A^*$.

Теорема об обратном отображении. Пусть X, Z — банаховы пространства, отображение $F: X \rightarrow Z$, $F(\hat{x}) = \hat{z}$, $F \in SD(\hat{x})$, оператор $F'(\hat{x})$ является эпиморфизмом. Тогда существуют обратное отображение $F^{-1}: W \subset Z \rightarrow X$ некоторой окрестности W точки \hat{z} и константа $K > 0$ такие, что $F^{-1}(\hat{z}) = \hat{x}$ и

$$F(F^{-1}(z)) = z, \quad \|F^{-1}(z) - F^{-1}(\hat{z})\| \leq K\|z - \hat{z}\| \quad \forall z \in W.$$

Теорема Люстерника. Пусть X, Z — банаховы пространства, отображение $F: X \rightarrow Z$, $F \in SD(\hat{x})$, оператор $F'(\hat{x})$ является эпиморфизмом. Тогда существуют отображение $\varphi: U \subset X \rightarrow X$ некоторой окрестности U точки \hat{x} и число $K > 0$ такие, что

$$F(x + \varphi(x)) = F(\hat{x}), \quad \|\varphi(x)\| \leq K\|F(x) - F(\hat{x})\| \quad \forall x \in U.$$

Пусть X — линейное нормированное пространство, M — некоторое его подмножество. Вектор $h \in X$ называется *односторонним касательным (полукасательным) вектором к множеству M в точке $\hat{x} \in X$* , если существуют $\varepsilon > 0$ и отображение $r: (0, \varepsilon] \rightarrow X$, такие, что

- a) $\hat{x} + th + r(t) \in M \forall t \in (0, \varepsilon]$;
- b) $\|r(t)\| = o(t)$ при $t \rightarrow +0$.

Вектор h называется *касательным к множеству M в точке $\hat{x} \in X$* , если векторы h и $-h$ являются односторонними касательными векторами к M в \hat{x} . Иными словами, элемент $h \in X$ называется *касательным вектором к множеству M в точке \hat{x}* , если существуют $\varepsilon > 0$ и отображение $r: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow X$ такие, что

- a) $\hat{x} + th + r(t) \in M \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon], t \neq 0$;
- b) $\|r(t)\| = o(t)$ при $t \rightarrow 0$.

Множество всех касательных векторов к M в точке \hat{x} обозначается $T_{\hat{x}}M$, множество односторонних касательных векторов обозначается $T_{\hat{x}}^+M$. Очевидно, что $T_{\hat{x}}M$ и $T_{\hat{x}}^+M$ — конусы. Если множество $T_{\hat{x}}M$ является подпространством в X , то оно называется *касательным пространством к множеству M в точке \hat{x}* .

Если точка $\hat{x} \in M$, то в обоих определениях t может равняться нулю.

Во многих случаях, в том числе и представляющих значительный интерес для теории экстремальных задач, множество касательных векторов может быть найдено при помощи такого следствия из теоремы Люстерника.

Теорема (о касательном пространстве). Пусть X, Z — банаховы пространства, $F: X \rightarrow Z$, $F \in SD(\hat{x})$, оператор $F'(\hat{x})$ — эпиморфизм, множество $M = \{x \in X \mid F(x) = F(\hat{x})\}$. Тогда

$$T_{\hat{x}}M = \text{Ker } F'(\hat{x}).$$

Доказательство. А) Докажем, что $T_{\hat{x}}M \subset \text{Ker } F'(\hat{x})$. Пусть $h \in T_{\hat{x}}M$, тогда существуют $\varepsilon > 0$ и отображение $r: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow X$, такие, что $\hat{x} + th + r(t) \in M \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \|r(t)\| = o(t)$ при $t \rightarrow 0$. При малых t

$$F(\hat{x}) = F(\hat{x} + th + r(t)) = F(\hat{x}) + tF'(\hat{x})[h] + o(t).$$

Отсюда $tF'(\hat{x})[h] + o(t) = 0$ и, значит, $F'(\hat{x})[h] = 0$, т.е. $h \in \text{Ker } F'(\hat{x}) \Rightarrow T_{\hat{x}}M \subset \text{Ker } F'(\hat{x})$.

В) Докажем, что $T_{\hat{x}}M \supset \text{Ker } F'(\hat{x})$. Пусть $h \in \text{Ker } F'(\hat{x})$. Положим $r(t) = \varphi(\hat{x} + th)$, где φ — отображение, построенное в теореме Люстерника. Тогда

$$F(\hat{x} + th + r(t)) \stackrel{\text{def}}{=} F(\hat{x} + th + \varphi(\hat{x} + th)) = F(\hat{x}) \implies \hat{x} + th + r(t) \in M,$$

$$F(\hat{x} + th) - F(\hat{x}) = tF'(\hat{x})[h] + o(t) \stackrel{F'(\hat{x})[h]=0}{=} o(t),$$

$$\|r(t)\| = \|\varphi(\hat{x} + th)\| \leq K\|F(\hat{x} + th) - F(\hat{x})\| = K\|tF'(\hat{x})[h] + o(t)\| = K\|o(t)\| = o(t),$$

т.е. $h \in T_{\hat{x}}M \Rightarrow \text{Ker } T_{\hat{x}}M \supset \text{Ker } F'(\hat{x})$.

Таким образом, $T_{\hat{x}}M = \text{Ker } F'(\hat{x})$. \triangleright