2 Формулировка и доказательство принципа максимума Понтрягина для задачи со свободным концом

Приведем формулировку и доказательство принципа максимума Понтрягина для следующего частного случая задачи оптимального управления — задачи со свободным правым концом и закрепленным временем (концы отрезка интегрирования t_0, t_1 фиксированы):

$$B(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\, dt \to \min; \qquad (P)$$

$$\dot{x}(t) - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0 \;\forall\, t \in T,\; u(t) \in U \;\forall\, t \in [t_0,\, t_1],\; x(t_0) = x_0,$$

где фазовая переменная $x \in PC^1([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^n)$, управление $u \in PC([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^r)$, $U \subset \mathbb{R}^r$ — произвольное множество, $T \subset [t_0,\, t_1]$ — множество точек непрерывности управления $u(\cdot)$.

Теорема. *Пусть* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *— оптимальный управляемый процесс в задаче оптимального управления* (P) $((\hat{x}, \hat{u}) \in strlocmin\, P)$, *функции* f, φ *непрерывны в некоторой окрестности множества* $\Gamma_{\hat{x}} = \{(t, \hat{x}(t)) \mid t \in [t_0,\, t_1]\}$, *декартово умноженного на* U, *частные производные (по Фреше)* f_x, φ_x *определены на этом множестве и непрерывны в точках множества* $\Gamma_{\hat{x}\hat{u}} = \{(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \mid t \in [t_0,\, t_1]\}$.

Тогда выполняется условие оптимальности по u*:*

$$f(t, \hat{x}(t), u) - p(t)\varphi(t, \hat{x}(t), u) \geq \hat{f}(t) - p(t)\hat{\varphi}(t) \quad \forall\, t \in T,\; \forall\, u \in U, \qquad (1)$$

где p *— единственное решение дифференциального уравнения*

$$-\dot{p}(t) + \hat{f}_x(t) - p(t)\hat{\varphi}_x(t) = 0 \quad \forall\, t \in T \qquad (2)$$

с краевым условием

$$p(t_1) = 0. \qquad (3)$$

Отметим, что принцип оптимальности (1) с условиями (2)–(3) может быть выведен из необходимых условий оптимальности в общей задаче оптимального управления, множитель Лагранжа λ_0 при функционале B оказывается равным единице, а условие трансверсальности по $x(t_0)$ не существенно.

Доказательство. Единственность решения уравнения (2) с краевым условием (3) следует из теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейных систем [АТФ, с. 191].

А) *Игольчатые вариации.* Зафиксируем точку $\tau \in T$, управление $v \in U$ и такое малое число $\alpha \geq 0$, что отрезок $[\tau–\alpha,\, \tau] \subset T$. Управление $u_\alpha(t) = \begin{cases} \hat{u}(t), & t \notin [\tau-\alpha, \tau), \\ v, & t \in [\tau-\alpha, \tau), \end{cases}$ назовем *элементарной игольчатой вариацией управления* $\hat{u}$ (рис. 6).

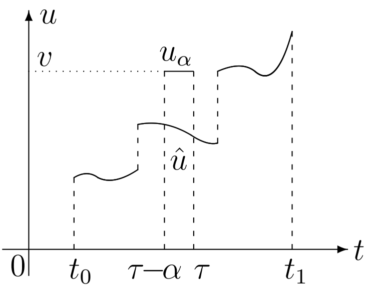

Рис. 6

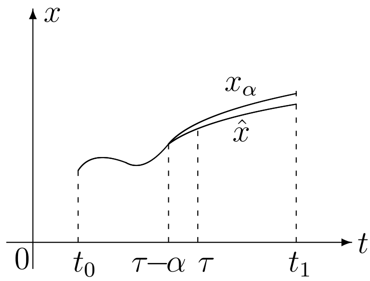

Рис. 7

Пусть $x_\alpha(\cdot)$ — решение уравнения $\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u_\alpha(t))$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Из леммы 1, формулируемой ниже, следует, что вектор-функция x_α определяется единственным образом на всем отрезке $[t_0,\, t_1]$. Поскольку при $t \in [t_0,\, \tau - \alpha)$ управление $u_\alpha(t) = \hat{u}(t)$, то на полуинтервале $[t_0,\, \tau - \alpha)$ функции x_α и $\hat{x}$, являющиеся решениями одного и того же дифференциального уравнения, совпадают (см. рис. 7). Функция x_α называется *элементарной игольчатой вариацией функции* $\hat{x}$, а пара (x_α, u_α) — *элементарной игольчатой вариацией процесса* $(\hat{x}, \hat{u})$. Тройку (τ, v, α), определяющую эту вариацию, будем называть *элементарной иголкой.*

В) **Лемма 1** (о свойствах элементарной игольчатой вариации). *Пусть в элементарной иголке (τ, v, α) точка τ и управление v фиксированы. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\alpha \in [0, \varepsilon]$ отрезок $[\tau - \alpha, \tau] \subset T$, а функция x_α — игольчатая вариация функции $\hat{x}$ — определена на всем отрезке $[t_0, t_1]$; и при $\alpha \to +0$*

1) функция $x_\alpha(\cdot) \to \hat{x}(\cdot)$ в метрике пространства $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$;

2) функция $\dfrac{x_\alpha(\cdot) - \hat{x}(\cdot)}{\alpha} \to y(\cdot)$ в метрике пространства $C([\tau, t_1], \mathbb{R}^n)$, где функция y кусочно дифференцируема и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{y}(t) = \hat{\varphi}_x(t)y(t) \quad \forall\ t \in [\tau, t_1] \cap T \tag{4}$$

с начальным условием

$$y(\tau) = \varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \hat{\varphi}(\tau). \tag{5}$$

Доказательство леммы 1. Существование функции x_α следует из теоремы существования решения обыкновенного дифференциального уравнения, а сходимости функций следуют соответственно из теорем о непрерывной и непрерывно дифференцируемой зависимости решения от начальных данных. Полное доказательство этих утверждений мы здесь не приводим, отсылая к книге АТФ, с. 89–91.

Докажем, что функция y кусочно дифференцируема на отрезке $[\tau, t_1]$, удовлетворяет начальному условию (5) и дифференциальному уравнению (4).

Восстанавливая значение функций x_α и $\hat{x}$ в точке $t \in [\tau, t_1]$ через их производные $x(t) = \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)ds + x(t_0)$ и учитывая то, что эти функции удовлетворяют дифференциальному уравнению $\dot{x} = \varphi(t, x, u)$, имеем

$$y(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \to +0} \frac{x_\alpha(t) - \hat{x}(t)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to +0} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}_\alpha(s) - \dot{\hat{x}}(s)}{\alpha} ds =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\int\limits_{t_0}^{t}\big(\varphi(s, x_\alpha(s), u_\alpha(s)) - \hat\varphi(s)\big)ds = \lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\tau-\alpha}^{\tau}\big(\varphi(s, x_\alpha(s), v) - \hat\varphi(s)\big)ds +$$

$$+ \lim_{\alpha\to+0}\int\limits_{\tau}^{t} \frac{\varphi(s, x_\alpha(s), \hat u(s)) - \hat\varphi(s)}{\alpha}ds = \lim_{\alpha\to+0} \big(\varphi(s, x_\alpha(s), v) - \hat\varphi(s)\big)\Big|_{s\in[\tau-\alpha,\,\tau]} +$$

$$+ \lim_{\alpha\to+0}\int\limits_{\tau}^{t} \frac{\big(\hat\varphi_x(s)[x_\alpha(\cdot) - \hat x(\cdot)] + o(x_\alpha(\cdot) - \hat x(\cdot))\big)(s)}{\alpha}ds =$$

$$= \varphi(\tau, \hat x(\tau), v) - \hat\varphi(\tau) + \int\limits_{\tau}^{t} \hat\varphi_x(s)y(s)ds. \qquad (6)$$

При переходе к пределу в первом интеграле мы воспользовались теоремой о среднем для определенных интегралов[1], а во втором интеграле мы вначале воспользовались дифференцируемостью по Фреше отображения $\varphi\colon C([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^n) \to C([t_0,\, t_1], \mathbb{R}^n)$ в точке $\hat x(\cdot)$[2], а потом перешли к пределу под знаком интеграла[3]. При этом

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{\|o(x_\alpha - \hat x)\|_{C([\tau,\, t_1], \mathbb{R}^n)}}{\alpha} = \lim_{\alpha\to+0} \frac{\|o(x_\alpha - \hat x)\|_C}{\|x_\alpha - \hat x\|_C}\cdot\frac{\|x_\alpha - \hat x\|_C}{\alpha} = 0\cdot\|y\|_C = 0.$$

Подставляя в полученное уравнение (6) значение $t = \tau$, получаем начальное условие (5) для функции y в точке τ, а продифференцировав уравнение по t, получим, что функция y удовлетворяет дифференциальному уравнению (4). $\rhd\rhd$

---

[1] подынтегральная функция непрерывна

[2] дифференцируемость следует из заданных условий гладкости функции φ

[3] подынтегральная функция сходится в метрике пространства $C([\tau,\, t_1], \mathbb{R}^n)$ к функции y

C) **Лемма 2** (о приращении функционала). *Пусть в элементарной иголке* (τ, v, α) *точка* $\tau \in T$ *и управление* $v \in U$ *фиксированы, обозначим* $B(\alpha) := B(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot))$. *Тогда функция* B *дифференцируема справа в нуле и*

$$B'(+0) = f(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \hat{f}(\tau) - p(\tau)\big(\varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \hat{\varphi}(\tau)\big).$$

Доказательство леммы 2. Используя теорему о среднем для определенных интегралов, правило перехода к пределу под знаком интеграла, дифференцируемость по Фреше и лемму 1, получим

$$B'(+0) = \lim_{\alpha\to+0} \frac{B(\alpha) - B(0)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to+0} \frac{B(x_\alpha, u_\alpha) - B(\hat{x}, \hat{u})}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} \big(f(t, x_\alpha(t), u_\alpha(t)) - \hat{f}(t)\big)\, dt\right) =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{\alpha}\left(\int\limits_{\tau-\alpha}^{\tau} \big(f(t, x_\alpha(t), v) - \hat{f}(t)\big)\, dt + \int\limits_{\tau}^{t_1} \big(f(t, x_\alpha(t), \hat{u}(t)) - \hat{f}(t)\big)\, dt\right) +$$

$$= \lim_{\alpha\to+0} \big(f(t, x_\alpha(t), v) - \hat{f}(t)\big)\Big|_{t\in[\tau-\alpha;\tau]} + \lim_{\alpha\to+0} \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{\hat{f}_x[x_\alpha - \hat{x}] + o(x_\alpha - \hat{x})}{\alpha} dt =$$

$$= f(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \hat{f}(\tau) + \int\limits_{\tau}^{t_1} \hat{f}_x(t) y(t)\, dt.$$

Выражая $\hat{f}_x$ из уравнения (2), учитывая уравнение (4), и начальное условие (5) для $y(\tau)$, имеем

$$\int\limits_{\tau}^{t_1} \hat{f}_x y\, dt = \int\limits_{\tau}^{t_1} (\dot{p} + p\hat{\varphi}_x) y\, dt = \int\limits_{\tau}^{t_1} (\dot{p}y + p\dot{y})\, dt = \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{d}{dt}(py)\, dt =$$

$$= p(t_1)y(t_1) - p(\tau)y(\tau) \overset{p(t_1)=0}{=} -p(\tau)(\varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) - \hat{\varphi}(\tau)).$$

Подставляя найденное значение $\int\limits_{\tau}^{t_1} \hat{f}_x y\, dt$ в выражение для $B'(+0)$, получим искомое представление. ▷▷

D) *Завершение доказательства.* Из леммы 1 следует, что если $\alpha \in [0,\, \varepsilon]$, то (x_α, u_α) — допустимый управляемый процесс и $x_\alpha(\cdot)$ равномерно стремится к $\hat{x}(\cdot)$. Поскольку $(\hat{x}, \hat{u})$ — оптимальный процесс, то при малых $\alpha > 0$

$$B(x_\alpha, u_\alpha) \geq B(\hat{x}, \hat{u}) \iff B(\alpha) \geq B(0).$$

Отсюда $B'(+0) \geq 0$, и из выражения для $B'(+0)$ по лемме 2 вытекает, что

$$f(\tau, \hat{x}(\tau), v) - p(\tau)\varphi(\tau, \hat{x}(\tau), v) \geq \hat{f}(\tau) - p(\tau)\hat{\varphi}(\tau) \quad \forall\, \tau \in T, \quad \forall\, v \in U,$$

т. е. выполняется соотношение (1). Теорема полностью доказана. $\triangleright$