Задача с подвижными концами в пространстве $C^1(\Delta)\times\mathbb{R}^2$:

$$J(\xi)=J\big(x,t_0,t_1\big)=\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t,x,\dot x)\,dt+l_0(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))\to\mathrm{extr};$$
$$l_i(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))=0,\ \ i=1,\dots,m,\qquad (P)$$

где $x(\cdot)\in C^1(\Delta)$, Δ — заданный конечный отрезок, $t_0,t_1\in\Delta$, $t_0<t_1$. Здесь t_0,t_1 — не фиксированы, иногда один из концов или даже оба закреплены.

Определение

Допустимый элемент $\hat\xi=(\hat x(\cdot),\hat t_0,\hat t_1)$ доставляет слабый локальный минимум ($\hat\xi\in\mathrm{wlocmin}\,P$), если $\exists\ \delta>0$: $J(\xi)\geq J(\hat\xi)\ \forall\ \xi=(x(\cdot),t_0,t_1)\in D(P)$, для которого $\|x(\cdot)-\hat x(\cdot)\|_{C^1(\Delta)}<\delta$, $|t_0-\hat t_0|<\delta$, $|t_1-\hat t_1|<\delta$.

Теорема

$\hat{\xi} = (\hat{x}(\cdot), \hat{t}_0, \hat{t}_1) \in \mathrm{wlocextr}\, P;\ L, L_x, L_{\dot{x}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}));$
$l_i \in C^1(\hat{t}_0, \hat{x}(\hat{t}_0), \hat{t}_1, \hat{x}(\hat{t}_1)),\ i = 0, 1, \ldots, m.$ Тогда
$\exists\ \lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \neq 0$: для функции Лагранжа

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(x, t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \underbrace{\lambda_0 f(t, x, \dot{x})}_{L}\, dt + \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i l_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))}_{l}$$

выполнены условия:

a) стационарности по x — уравнение Эйлера:
$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0\ \forall\ t \in \Delta \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}\lambda_0 \hat{f}_{\dot{x}}(t) + \lambda_0 \hat{f}_x(t) = 0;$

b) трансверсальности: $\begin{cases} \hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x(t_0)}, \\ \hat{L}_{\dot{x}}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x(t_1)}; \end{cases}$

c) стационарности по подвижным концам:
$\hat{\mathscr{L}}_{t_0} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_0 \hat{f}(\hat{t}_0) + \hat{l}_{t_0} + \hat{l}_{x(t_0)} \dot{\hat{x}}(\hat{t}_0) = 0,$
$\hat{\mathscr{L}}_{t_1} = 0 \Leftrightarrow\ \lambda_0 \hat{f}(\hat{t}_1) + \hat{l}_{t_1} + \hat{l}_{x(t_1)} \dot{\hat{x}}(\hat{t}_1) = 0.$

Пример. $J(x, T) = \int\limits_0^T (\dot{x}^2 - x + 1)\, dt \to \mathrm{extr};\ \ x(0) = 0.$

Функция Лагранжа

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(x(\cdot), T) = \int\limits_0^T \underbrace{\lambda_0(\dot{x}^2 - x + 1)}_{L}\, dt + \underbrace{\lambda_1 x(0)}_{l}.$$

Необходимые условия экстремума: a) уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}2\lambda_0\dot{x} - \lambda_0 = 0 \Leftrightarrow -2\lambda_0\ddot{x} - \lambda_0 = 0;$$

b) трансверсальность по x:

$$\begin{cases} L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)}, \\ L_{\dot{x}}(T) = -l_{x(T)}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_0\dot{x}(0) = \lambda_1, \\ 2\lambda_0\dot{x}(T) = 0; \end{cases}$$

c) стационарность по T (выписываем только для подвижного конца отрезка интегрирования):

$$\mathscr{L}_T = 0 \Leftrightarrow \lambda_0(\dot{x}^2(T) - x(T) + 1) = 0.$$

Пример. $J(x,T)=\int\limits_0^T(\dot x^2-x+1)\,dt\to\operatorname{extr};\ x(0)=0.$

$a)\ -2\lambda_0\ddot x-\lambda_0=0;\ b)\ \begin{cases}2\lambda_0\dot x(0)=\lambda_1,\\ 2\lambda_0\dot x(T)=0;\end{cases}$

$c)\ \lambda_0(\dot x^2(T)-x(T)+1)=0.$

$\lambda_0=0\overset{b}{\Rightarrow}\lambda_1=0$ — все множители Лагранжа нули.
$\lambda_0\neq 0$, $\lambda_0=1$. Тогда условия $a)$–$c)$ преобразуются к виду

$$-2\ddot x-1=0\ \left(\Leftrightarrow\ddot x=-\tfrac12\right),\ \dot x(T)=0,\ x(T)=1.$$

Из уравнения Эйлера $\dot x=-\frac{t}{2}+C_1\Rightarrow x=-\frac{t^2}{4}+C_1t+C_2$.
$x(0)=0\Rightarrow C_2=0$; величины C_1,T определяются из условий
$\begin{cases}\dot x(T)=0,\\ x(T)=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{T}{2}+C_1=0,\\ -\frac{T^2}{4}+C_1T=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=\frac{T}{2},\\ -\frac{T^2}{4}+\frac{T^2}{2}=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\hat T=2,\\ C_1=1,\end{cases}$
$\Rightarrow\hat\xi=(\hat x(\cdot),\hat T)=\left(-\frac{t^2}{4}+t,2\right)$ — допустимая экстремаль.

Пример. $J(x,T)=\int\limits_0^T(\dot x^2-x+1)\,dt\to \mathrm{extr};\ x(0)=0.$

Покажем, что $\hat\xi=(\hat x(\cdot),\hat T)=\left(-\frac{t^2}{4}+t,2\right)\notin \mathrm{locextr}.$

Возьмем $\xi=(x(\cdot),T)=\left(-\frac{t^2}{4}+t,T\right)\in D(P)$. Тогда

$$J(\xi)=\int\limits_0^T\left(\left(-\tfrac{t}{2}+1\right)^2-\left(-\tfrac{t^2}{4}+t\right)+1\right)dt=\int\limits_0^T\left(\tfrac{t^2}{2}-2t+2\right)dt=$$

$$=2\int\limits_0^T\left(\tfrac{t}{2}-1\right)^2dt\begin{cases}>J(\hat\xi)=2\int_0^{\hat T}\left(\frac{t}{2}-1\right)^2dt, & T>\hat T,\\ <J(\hat\xi), & T<\hat T.\end{cases}$$

Покажем, что $S_{\mathrm{absmin}}=-\infty$. Действительно, возьмем
$\xi_n=(x(\cdot),T)=(t,n)\in D(P)$. Тогда
$J(\xi_n)=\int_0^n(2-t)\ dt\to-\infty$ при $n\to+\infty$.

Покажем, что $S_{\mathrm{absmax}}=+\infty$. Действительно, возьмем
$\xi_n=(x(\cdot),T)=(nt,1)\in D(P)$. Тогда
$J(\xi_n)=\int_0^1(n^2-nt+1)\,dt\to+\infty$ при $n\to+\infty$.