X, Y — линейные нормированные пространства,
$f_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$, $F\colon X \to Y$.
Гладкая задача с ограничениями типа равенств и неравенств:

$$f_0(x) \to \min; \quad f_i(x) \le 0,\ i = 1, \dots, m,\ F(x) = 0. \qquad (P)$$

Допустимые точки — точки, удовлетворяющие ограничениям задачи.
$D(P)$ — множество допустимых точек в задаче (P).

Теорема (принцип Лагранжа)

$\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$, X, Y — банаховы, $f_i, F \in SD(\hat{x})$ (гладкость), $\operatorname{Im} F'(\hat{x})$ — замкнутое подпространство в Y (ослабленное условие регулярности) $\Rightarrow \exists\ (\lambda, y^*) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y^*$, $(\lambda, y^*) \neq 0$: для функции Лагранжа $\mathscr{L}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, F(x) \rangle$ выполняются условия:

a) стационарности: $\mathscr{L}'(\hat{x}) = 0$

$$\left(\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \langle f_i'(\hat{x}), h \rangle + \langle y^*, F'(\hat{x})[h] \rangle = 0 \quad \forall\ h \in X \right.$$

$$\left. \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) + \big(F'(\hat{x})\big)^* y^* = 0 \right);$$

b) дополняющей нежесткости: $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$;

c) неотрицательности: $\lambda_i \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

В задаче на максимум вместо неравенства $\lambda_0 \geq 0$ надо писать $\lambda_0 \leq 0$.

$$f_0(x) \to \min; \quad f_i(x) \le 0,\ i = 1, \dots, m,\ F(x) = 0. \qquad (P)$$

Теорема (принцип Лагранжа)

$\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$, X, Y — банаховы, $f_i, F \in SD(\hat{x})$, $\operatorname{Im} F'(\hat{x})$ — замкнуто в $Y \Rightarrow \exists\ (\lambda, y^*) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y^*$, $(\lambda, y^*) \ne 0$:

$a)$ стационарности: $\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* y^* = 0;$

$b)$ дополняющей нежесткости: $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0,\ i = 1, \dots, m;$

$c)$ неотрицательности: $\lambda_i \ge 0,\ i = 0, 1, \dots, m.$

$\lhd$ НеОО $f_0(\hat{x}) = 0$, иначе $\widetilde{f_0}(x) = f_0(x) - f_0(\hat{x})$.
Если $f_i(\hat{x}) \ne 0$ $(1 \le i \le m) \Rightarrow f_i(\hat{x}) < 0 \Rightarrow f_i(x) < 0\ \forall\ x \in O(\hat{x})$.
Для локального экстремума такие ограничения несущественны и полагаем $\lambda_i = 0$.
Таким образом, считаем, что условия дополняющей нежесткости уже выполнены.

Теорема (принцип Лагранжа)

$\hat{x} \in \operatorname{locmin} P$, X, Y — банаховы, $f_i, F \in SD(\hat{x})$, $\operatorname{Im} F'(\hat{x})$ — замкнуто в $Y \Rightarrow \exists\ (\lambda, y^*) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y^*$, $(\lambda, y^*) \neq 0$:

a) стационарности: $\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* y^* = 0$;

b) дополняющей нежесткости: $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m$;

c) неотрицательности: $\lambda_i \geq 0,\ i = 0, 1, \ldots, m$.

A) $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) \neq Y \Rightarrow \operatorname{Im} F'(\hat{x})$ — замкнутое собственное подпространство $Y \Rightarrow$ по лемме о нетривиальности аннулятора $\exists\ y^* \in (\operatorname{Im} F'(\hat{x}))^{\perp} \subset Y^*$, $y^* \neq 0$. Это означает,

$$\langle y^*, y \rangle = 0\ \forall\ y \in \operatorname{Im} F'(\hat{x}) \Leftrightarrow \langle y^*, F'(\hat{x})[h] \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\langle \big(F'(\hat{x})\big)^* y^*, h \rangle = 0\ \forall\ h \in X \Leftrightarrow \big(F'(\hat{x})\big)^* y^* = 0.$$

Остается положить $\lambda_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

B) $\mathrm{Im}\, F'(\hat{x}) = Y$. Положим $b = (b_0, \ldots, b_m)$, $B := \{(b, y) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y \mid \exists\ h \in X : \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle \le b_i,\ i = 0, \ldots, m;\ y = F'(\hat{x})[h]\}$.

B — выпуклое множество.

Действительно, возьмем $(b, y), (b', y') \in B \overset{def\,B}{\Rightarrow} \exists\ h, h'$: $\langle f_i'(\hat{x}), h\rangle \le b_i$, $\langle f_i'(\hat{x}), h'\rangle \le b_i'$, $y = F'(\hat{x})[h]$, $y' = F'(\hat{x})[h']$.
Покажем, что выпуклая комбинация
$(b_\alpha, y_\alpha) = \alpha(b, y) + (1-\alpha)(b', y') \in B\ \forall\ \alpha \in [0, 1]$.
Положим $h_\alpha = \alpha h + (1-\alpha)h'$, $y_\alpha = \alpha y + (1-\alpha)y'$.
Тогда

$$\langle f_i'(\hat{x}), h_\alpha\rangle = \langle f_i'(\hat{x}), \alpha h + (1-\alpha)h'\rangle = \\ = \alpha\langle f_i'(\hat{x}), h\rangle + (1-\alpha)\langle f_i'(\hat{x}), h'\rangle \le \alpha b_i + (1-\alpha)b_i' = b_{\alpha i},$$

$$y_\alpha = \alpha y + (1-\alpha)y' = \alpha F'(\hat{x})[h] + (1-\alpha)F'(\hat{x})[h'] = \\ = F'(\hat{x})[\alpha h + (1-\alpha)h'] = F'(\hat{x})[h_\alpha].$$

Значит, $(b_\alpha, y_\alpha) \in B$.

$B := \{(b, y) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y \mid \exists\ h \in X : \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle \le b_i,\ i = 0, \ldots, m;$ $y = F'(\hat{x})[h]\}.$

$\operatorname{int} B \ne \emptyset.$

Положим $B_X := \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$. По т. Банаха об открытости образ открытого множества открыт, значит, множество $F'(\hat{x})B_X$ открыто. При линейном отображении $0 \to 0 \Rightarrow 0 \in \operatorname{int} F'(\hat{x})B_X$, и, следовательно, $F'(\hat{x})B_X \supset \delta B_Y := \{y \in Y \mid \|y\| < \delta\}$ с некоторым $\delta > 0$. Значит, $\forall\ y \in \delta B_Y\ \exists\ h(y) \in B_X\ (\|h(y)\| < 1) : F'(\hat{x})h(y) = y$. Тогда $\langle f_i'(\hat{x}), h(y)\rangle \le |\langle f_i'(\hat{x}), h(y)\rangle| \le \|f_i'(\hat{x})\| \cdot \|h(y)\| \le$ $\|f_i'(\hat{x})\| \le \max\limits_{i=0,\ldots,m} \|f_i'(\hat{x})\| = M$. Возьмем $\hat{b}_i > M + 1$, $i = 0, \ldots, m$, $\hat{b} = (\hat{b}_0, \ldots, \hat{b}_m)$. Поэтому $B\mathbb{R}_{\hat{b}}^{m+1} \times \delta BY \subset B$. Значит, $\operatorname{int} B \ne \emptyset$.

$B := \{(b, y) \mid \exists\, h \in X : \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle \le b_i,\ i = 0, \ldots, m;\ \ y = F'(\hat{x})[h]\}.$

$0 \notin \operatorname{int} B$. Предположим противное, и придем к противоречию с тем что $\hat{x} \in \operatorname{locmin}$. Действительно, если $0 \in \operatorname{int} B \Rightarrow$ при достаточно малом $\beta < 0$ $(\beta, \ldots, \beta, 0) \in B$ $\Rightarrow \exists\, h : \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle \le \beta < 0,\ i = 0, 1, \ldots, m,\ F'(\hat{x})[h] = 0.$ По т. о касательном пространстве $\operatorname{Ker} F'(\hat{x}) = T_{\hat{x}}M$, где $M := \{x \in X \mid F(x) = F(\hat{x}) = 0\}$. Значит, $h \in T_{\hat{x}}M$ $\Rightarrow \exists\, r : [-\varepsilon, \varepsilon] \to X$ $(\varepsilon > 0)$: $\|r(t)\| = o(t)$,

$$\hat{x} + th + r(t) \in M \Leftrightarrow F\big(\hat{x} + th + r(t)\big) = 0\ \forall\, t \in [-\varepsilon, \varepsilon]. \qquad (1)$$

При малых $t > 0$ для $i = 0, 1, \ldots, m$ имеем неравенства

$$f_i\big(\hat{x} + th + r(t)\big) = f_i(\hat{x}) + t\langle f_i'(\hat{x}), h\rangle + o(t) < 0. \qquad (1_i)$$

(1), (1_i), $i = 1, \ldots, m \Rightarrow \hat{x} + th + r(t) \in D(P)$. Но при этом (1_0) $\big(f_0\big(\hat{x} + th + r(t)\big) < 0 = f_0(\hat{x})\big)$ противоречит тому, что $\hat{x} \in \operatorname{locmin}$. Значит, $0 \notin \operatorname{int} B$.

$B := \{(b,y) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y \mid \exists\ h \in X : \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle \le b_i,\ i = 0,\dots,m;$
$y = F'(\hat{x})[h]\}.$

По I т. отделимости множество B и точку 0 можно отделить $\Rightarrow \exists\ (\lambda, y^*) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m, y^*) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y^*,\ (\lambda, y^*) \ne 0$:

$$\inf_{(b,y)\in B} \{\langle(\lambda, y^*), (b,y)\rangle\} \ge \langle(\lambda, y^*), (0,0)\rangle$$
$$\Longleftrightarrow\ \langle\lambda, b\rangle + \langle y^*, y\rangle \ge 0\ \forall\ (b,y) \in B. \qquad (*)$$

Условие неотрицательности: $(\mathbb{R}_+^{m+1}, 0) \subset B \Rightarrow (e_i, 0) \in B$,

где $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in B \overset{(*)}{\Rightarrow} \lambda_i \ge 0,\ i = 0, \dots, m.$

Условие стационарности:

$(\langle f_0'(\hat{x}), h\rangle, \dots, \langle f_m'(\hat{x}), h\rangle, F'(\hat{x})[h]) \in B\ \forall\ h \in X \overset{(*)}{\Rightarrow}$

$\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle + \langle y^*, F'(\hat{x})[h]\rangle \ge 0.$ Поскольку в неравенстве можно взять и h, и $-h$, то неравенство выполняется в виде равенства: $\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle + \langle y^*, F'(\hat{x})[h]\rangle = 0.\ \triangleright$