4 Выпуклые задачи

В задачах 4.1–4.9 выяснить, при каких значениях параметров функции являются выпуклыми:

4.1. $f(x) = ax^2 + bx + c$.

4.2. $f(x) = ae^{2x} + be^x + c$.

4.3. $f(x) = (1 - x^2)^2 + 2ax^2$.

4.4. $f(x) = ax^2 + 3\sin x$.

4.5. $f(x) = ax^2 + x - \cos x$.

4.6. $f(x) = ax^2 + \operatorname{th} x$.

4.7. $f(x) = ax^2y^2 + (x + y)^4$.

4.8. $f(x_1, x_2) = \big(|x_1|^p + |x_2|^p\big)^{\frac{1}{p}}, \quad p > 0$.

4.9. $f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$.

В задачах 4.10–4.13 выяснить, являются ли выпуклыми функции:

4.10. $f(x) = 3|x| - 2|x - 1|$.

4.11. $f(x) = \big||x| - 1\big|$.

4.12. $f(x) = \begin{cases} x\ln x + (1 - x)\ln(1 - x), & 0 < x < 1, \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$

4.13. $f(x) = \min\{x_1^2 + x_2^2 \mid x_1 + x_2 = x\}$.

4.14. $f(x) = |x+1| + 2|x|; \quad \partial f(x) = ?$

4.15. $f(x) = |x| + 2|x-1|; \quad \partial f(x) = ?$

4.16. $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0, \\ +\infty, & 0 < x; \end{cases} \quad \partial f(x) = ?$

4.17. $f(x) = \max\{1, e^x\}; \quad \partial f(x) = ?$

4.18. $f(x) = \max\{-x, 0\} + 2|x|; \quad \partial f(x) = ?$

4.19. $f(x) = \max\{1, x\} + |x-1|; \quad \partial f(x) = ?$

4.20. $f(x) = |x+1| + |x| + 2|x-1| - 4; \quad \partial f(x) = ?$

4.21. $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \max\{x_1, x_2\} \le 0, \\ +\infty, & \max\{x_1, x_2\} > 0; \end{cases} \quad \partial f(0) = ?$

4.22. $f(x_1, x_2) = \max\{x_1, 2x_2\}; \quad \partial f(x) = ?$

4.23. $f(x) = \max\{x,\, 0\}; \quad \partial f(0) = ?$

4.24. $f(x) = \max\{e^x,\, 1-x\}; \quad \partial f(0) = ?$

4.25. $f(x_1, x_2) = \sqrt{4x_1^2 + x_2^2}; \quad \partial f(0) = ?$

4.26. $f(x_1, x_2) = \max\{x_1,\, x_2\}; \quad \partial f(0) = ?$

4.27. $f(x_1, \dots, x_n) = |x| := \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \quad \partial f(0) = ?$

4.28. $f(x_1, x_2) = \left(\left(\frac{x_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{3} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \quad \partial f(0) = ?$

4.29. $f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j}{a_j} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \quad \partial f(0) = ?$

4.30. $f(x_1,\ldots,x_n)=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1<p<+\infty$; $\quad \partial f(0)=\,?$

4.31. $f(x_1,\ldots,x_n)=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\left|\frac{x_j}{a_j}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1<p<+\infty$; $\quad \partial f(0)=\,?$

4.32. $f(x_1,x_2)=|x_1|+2|x_2|$; $\quad \partial f(0)=\,?$

4.33. $f(x_1,x_2)=\max\{|x_1|,2|x_2|\}$; $\quad \partial f(0)=\,?$

4.34. $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|$; $\quad \partial f(0)=\,?$

4.35. $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_j|x_j|,\, a_j>0,\, j=1,\ldots,n$; $\quad \partial f(0)=\,?$

4.36. $f(x_1,\ldots,x_n)=\max\limits_{j=1,\ldots,n}|x_j$; $\quad \partial f(0)=\,?$

4.37. $f(x_1,\ldots,x_n)=\max\limits_{j=1,\ldots,n}a_j|x_j|,\, a_j>0,\, j=1,\ldots,n$; $\partial f(0)=\,?$

4.38. $f(x_1,x_2)=\max\{x_1,2x_2\}$, $\partial f(0)=\,?$

4.39. $f(x_1,x_2)=\max\{2x_1,-3x_2\}$, $\partial f(0)=\,?$

4.40. $f(x_1,\ldots,x_n)=\max\limits_{j=1,\ldots,n}x_j$, $\partial f(0)=\,?$

4.41. $f(x_1,\ldots,x_n)=\max\limits_{j=1,\ldots,n}a_jx_j\ (a_j>0)$, $\partial f(0)=\,?$

4.42. $f(x_1,\ldots,x_n)=\max\{0,\langle a,x\rangle\}$, $a\in\mathbb{R}^n$; $\quad \partial f(0)=\,?$

4.43. $f\colon X\to\mathbb{R}$, $f(x)=\|x\|$ (X — нормированное пространство); $\quad \partial f(0)=\,?$

4.44. Найти функцию Минковского для треугольника с вершинами в точках $(1,0)$, $\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4.45. Привести пример выпуклой, замкнутой функции f и точки $\hat{x}$ таких, что $|f(\hat{x})| < \infty$, $\partial f(\hat{x}) = \emptyset$.

4.46. Привести пример выпуклой, но не замкнутой функции.

4.47. Показать на примере, что суперпозиция двух выпуклых функций не всегда выпукла.

4.48. Доказать, что любая выпуклая функция, конечная на всей прямой, непрерывна.

4.49. Доказать, что не существует выпуклой ограниченной функции, определенной на всей прямой и отличной от константы.

Решить выпуклые задачи 4.50–4.58:

4.50. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 + 3|x_1 - x_2 - 2| \to \min$.

4.51. $f(x) = \max\{x^2, -x + 2\} \to \min$.

4.52. $f(x) = \max\{x^2, x + 2\} \to \min$.

4.53. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4\max\{x_1, x_2\} \to \min$.

4.54. $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2} + \max\{x_1, x_2\} \to \min$.

4.55. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} \to \min$.

4.56. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2|x_1 - x_2| \to \min$.

4.57. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + |x_1 - x_2| \to \min$.

4.58. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2a|x_1 + x_2 - 1| \to \min \qquad (a > 0)$.

В задачах 4.59–4.82 найти поляру множеств.

4.59. $A = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}$.

4.60. Найдите поляру прямого кругового цилиндра (начало координат – в центре цилиндра).

4.61. Найдите поляру прямого кругового конуса (начало координат – на оси конуса).

4.62. $A = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 2x_1\}$.

4.63. $A = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 1,\ |x_2| \leq x_1 + 1\}$.

4.64. $A = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq -1,\ x_2 \leq 1 - 2|x_1|\}$.

4.65. A — треугольник (с внутренностью) с вершинами $(1, 0)$, $(-1, 1), (-1, -1)$.

4.66. A — треугольник (с внутренностью) с вершинами $(1, 1)$, $(0, -1), (-1, 1)$.

4.67. A — треугольник (с внутренностью) с вершинами $(0, 1)$, $(1, -1), (-1, -1)$.

4.68. $A = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 1,\ |x_2| \leq 1\}$.

4.69. $A = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq -1,\ |x_2| \leq 1\}$.

4.70. $A = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 4x_2^2 \leq 1\}$.

4.71. $A = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\dfrac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{a_2}\right)^2 \leq 1\right\}$.

4.72. $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle = 0\}$.

4.73. $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \leq 0\}$.

4.74. $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \geq 0\}$.

4.75. $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = 1\}$.

4.76. $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq 1\}$, $a \neq 0$.

4.77. $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \geq 1\}$, $a \neq 0$.

4.78. $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid m \leq \langle a, x \rangle \leq M\}$, $m < 0$, $M > 0$.

4.79. Найдите поляру множества $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 > 0,\ x_1 x_2 \geq 1\}$.

4.80. Найдите поляру множества $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1,\ 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$.

4.81. Найти поляру единичного куба в $\mathbb{R}^3$.

4.82. Найти поляру октаэдра $A = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1$ в $\mathbb{R}^3$.