4.6 Поляры множеств

4.6.1 Определение поляр множеств

Определение 1. *Линейные пространства* X *и* Y *называются пространствами в двойственности, если определена билинейная форма* $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon Y \times X \to \mathbb{R}$ *такая, что если* $\langle y, x \rangle = 0 \ \forall\, y \in Y$, *то* $x = 0$, *а если* $\langle y, x \rangle = 0 \ \forall\, x \in X$, *то* $y = 0$.

Пример. Если X — линейное нормированное пространство, а $Y = X^*$, то форма $\langle y, x \rangle$ является билинейной, а пространства X и $Y = X^*$ являются пространствами в двойственности.

Далее для образности представления рассматриваем именно этот случай.

Определение 2. Пусть X и Y — пространства в двойственности. *Полярой множества* $A \subset X$ называется множество $A^\circ = \{y \in Y \mid \sup\limits_{x \in A} \langle y, x \rangle \leq 1\}$.

4.6.2 Свойства поляры

1. *Поляра множества в линейном нормированном пространстве является выпуклым замкнутым подмножеством, содержащим ноль.*

$\lhd$ Множество A° является пересечением выпуклых замкнутых множеств (полупространств) $L_x = \{y \in Y \mid \langle y, x\rangle \le 1\}$ по всем $x \in A$, а значит – выпукло и замкнуто. Очевидно, поляра содержит ноль. $\rhd$

2. $B \supset A \Rightarrow B^\circ \subset A^\circ$.

$\lhd$ Включение $B^\circ \subset A^\circ$ следует из неравенства

$$\sup_{x\in A}\langle y, x\rangle \overset{A\subset B}{\le} \sup_{x\in B}\langle y, x\rangle. \qquad \rhd$$

3. $(\lambda A) = \lambda^{-1}A^\circ\ \forall\ \lambda > 0$.

$\lhd$ Поскольку $\sup\limits_{x\in\lambda A}\langle y, x\rangle = \sup\limits_{x\in A}\langle y, \lambda x\rangle = \lambda \sup\limits_{x\in A}\langle y, x\rangle$, то $\sup\limits_{x\in\lambda A}\langle y, x\rangle \le 1 \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in A}\langle y, x\rangle \le \frac{1}{\lambda}$. Из последней эквивалентности вытекает свойство 3. $\rhd$

4. $(\,\overline{A}\,)^\circ = A^\circ$.

$\lhd$ Поскольку $\overline{A} \supset A$, то по свойству 2 $(\,\overline{A}\,)^\circ \subset A^\circ$.

Докажем обратное включение, что $(\,\overline{A}\,)^\circ \supset A^\circ$. Пусть $y \in A^\circ$. Тогда для точки $\overline{x} \in \overline{A}$ существует последовательность точек $x_k \in A$, $x_k \to \overline{x}$, для которой $\langle y, x_k\rangle \le 1$. Переходя в неравенстве к пределу по $x_k \to \overline{x} \Rightarrow \langle y, \overline{x}\rangle \le 1$, получим $\sup\limits_{\overline{x}\in\overline{A}}\langle y, \overline{x}\rangle \le 1$. Это означает, что $y \in (\,\overline{A}\,)^\circ$. $\rhd$

5. $(A \cup \{0\})^\circ = A^\circ$.

$\lhd$ Поскольку множество $A \cup \{0\} \supset A$, то по свойству 2 множество $(A \cup \{0\})^\circ \subset A^\circ$.

Докажем обратное включение, что $(A \cup \{0\})^\circ \supset A^\circ$. Пусть $y \in A^\circ$. Тогда $\sup\limits_{x\in A}\langle y, x\rangle \le 1$. Отсюда $\sup\limits_{x\in A\cup\{0\}}\langle y, x\rangle \le 1$. Это означает, что $y \in (A \cup \{0\})^\circ$. $\rhd$

6. $(\operatorname{conv} A)^\circ = A^\circ$.

$\lhd$ Поскольку множество $\operatorname{conv} A \supset A$, то по свойству 2 множество $(\operatorname{conv} A)^\circ \subset A^\circ$.

Докажем обратное включение, что $(\operatorname{conv} A)^\circ \supset A^\circ$. Пусть $y \in A^\circ$. Тогда для $x \in \operatorname{conv} A$ имеем разложение:
$x = \sum\limits_{j=1}^{n} t_j x_j$, $x_j \in A$, $\sum\limits_{j=1}^{n} t_j = 1$, $t_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Поэтому

$$\langle y, x\rangle = \left\langle y, \sum_{j=1}^{n} t_j x_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} t_j \langle y, x_j\rangle \overset{\langle y,x_j\rangle \leq 1}{\leq} \sum_{j=1}^{n} t_j = 1.$$

Следовательно, $y \in (\operatorname{conv} A)^\circ$. $\rhd$

Из свойств 4-6 следует, что

7. $\left(\overline{\operatorname{conv} A \cup \{0\}}\right)^\circ \overset{4}{=} (\operatorname{conv} A \cup \{0\})^\circ \overset{5}{=} (\operatorname{conv} A)^\circ \overset{6}{=} A^\circ$.

8. $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, $\big(\operatorname{conv}(A \cup B)\big)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

$\lhd$ Поскольку $A \cup B \supset A$, то по свойству 2 $(A \cup B)^\circ \subset A^\circ$, аналогично, $A \cup B \supset B$, то по свойству 2 $(A \cup B)^\circ \subset B^\circ$. Отсюда $(A \cup B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$.

Докажем обратное включение. Пусть функционал $y \in A^\circ \cap B^\circ$. Из того, что $y \in A^\circ$ следует, что $\sup\limits_{x \in A} \langle y, x\rangle \leq 1$; аналогично из того, что $y \in B^\circ$ следует, что $\sup\limits_{x \in B} \langle y, x\rangle \leq 1$. Отсюда $\sup\limits_{x \in A \cup B} \langle y, x\rangle \leq 1$. Значит, $y \in (A \cup B)^\circ$. $\rhd$

9. $(A \cap B)^\circ = \overline{\operatorname{conv}(A^\circ \cup B^\circ)}$ *для любых выпуклых замкнутых множеств A, B, содержащих ноль.*

$\lhd$ Обозначим $C = A^\circ$, $D = B^\circ$. Тогда C, D — выпуклые замкнутые множества, содержащие ноль (как поляры множеств). Следовательно, $C^\circ = A^{\circ\circ} = A$ по теореме о биполяре. Аналогично, $D^\circ = B^{\circ\circ} = B$. Тогда $(A \cap B)^\circ \overset{\text{def}}{=} (C^\circ \cap D^\circ)^\circ \overset{8}{=} \big((C \cup D)^\circ\big)^\circ \overset{7}{=}$
$= \left(\left(\overline{\operatorname{conv}(C \cup D)}\right)^\circ\right)^\circ = \overline{\operatorname{conv}(C \cup D)} = \overline{\operatorname{conv}(A^\circ \cup B^\circ)}$. $\rhd$

Формулы 8-9 обобщаются на случай n множеств.

Лемма 1. *X — линейное нормированное пространство, $A \subset X$ — выпуклое множество. Тогда $0 \in \operatorname{int} A$ тогда и только тогда, когда A° — ограниченное множество.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $0 \in \operatorname{int} A$. Докажем, что тогда A° — ограниченное множество. Действительно, условие $0 \in \operatorname{int} A$ означает, что существует радиус $r > 0$, для которого шар $B_r = \{x \in X \mid \|x\| \leq r\} \subset A$. Значит, если $y \in A^\circ$, то по определению поляры $1 \geq \sup\limits_{x \in A} \langle y, x\rangle \geq \sup\limits_{x \in B_r} \langle y, x\rangle = r\|y\|_{X^*}$. Отсюда $\|y\|_{X^*} \leq \frac{1}{r}$, т. е. A° — ограниченное множество.

Обратно. Пусть A° — ограниченное множество. Докажем, что отсюда следует, что $0 \in \operatorname{int} A$. Предположим противное, что $0 \notin \operatorname{int} A$. Тогда по теореме отделимости множество A можно отделить от точки 0, т. е. существует линейно непрерывный функционал $\hat{y} \neq 0$ такой, что $\sup\limits_{a \in A} \langle \hat{y}, a\rangle \leq \langle \hat{y}, 0\rangle = 0$. Из этого неравенства следует, что $\sup\limits_{a \in A} \langle t\hat{y}, a\rangle \leq 0$ для любого $t > 0$. Значит, функционал $t\hat{y} \in A^\circ$ для любого $t > 0$ — противоречие с ограниченностью множества A°. □

Лемма 2. *X — линейное нормированное пространство. Тогда $A \subset X$ — ограниченное множество тогда и только тогда, когда $0 \in \operatorname{int} A^\circ$.*

Доказательство. Пусть A — ограниченное множество. Тогда оно содержится в некотором шаре радиуса R, т. е. существует R такое, что $\|a\|_X \leq R$ для любого $a \in A$. Тогда

$$\sup_{a \in A} \langle y, a\rangle \leq \sup_{a \in A} \|y\|_{X^*} \cdot \|a\|_X \leq R\|y\|_{X^*} \leq 1 \text{ при } \|y\|_{X^*} \leq \frac{1}{R}.$$

Это означает, что шар $B_{\frac{1}{R}} \subset A^\circ$. Следовательно, $0 \in \operatorname{int} A^\circ$.

Обратно. Пусть $0 \in \operatorname{int} A^\circ$. Это означает, что существует радиус $r > 0$, для которого шар $B_r \subset A^\circ$. Тогда $\langle y, x\rangle \leq 1$ для любого $x \in A$, для любого $y \in A^\circ$. Отсюда

$$1 \geq \sup_{y \in A^\circ} \langle y, x\rangle \geq \sup_{y \in B_r} \langle y, x\rangle = r\|x\|_X.$$

Значит, $\|x\|_X \leq \frac{1}{r}$, т. е. A — ограниченное множество. □

4.6.3 Примеры поляр множеств

- $A = a \neq 0 \Rightarrow A^\circ = \{y \in Y \mid \langle y, a\rangle \leq 1\}$ — полупространство.

- $A = \{a_1, \dots, a_n\} \Rightarrow A^\circ$ — пересечение n полупространств, т. е. многогранник.

- $A = \operatorname{conv}\{a_1, \dots, a_n\}$ — многогранник $\Rightarrow A^\circ$ — многогранник.

Число граней многогранника A° равно числу вершин A, и наоборот, число вершин многогранника A° равно числу граней A.

- $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle = 0,\ a \neq 0\}$ — гиперплоскость $\Rightarrow A^\circ = \{\lambda a \in \mathbb{R}^n \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ — прямая.

$\lhd$ Представим функционал $y \in A^\circ$ в виде $y = \lambda a + b$, где $b \perp a$.
Тогда $\sup\limits_{\langle a,x\rangle=0} \langle \lambda a + b, x\rangle = \sup\limits_{\langle a,x\rangle=0} \langle b, x\rangle$ конечен, если $b = 0$ (если $b \neq 0$, то можно взять $x = \mu b \in A$ и $\sup\limits_{\mu} \langle b, \mu b\rangle = +\infty$). Следовательно, $y = \lambda a$. Поэтому $\sup\limits_{\langle a,x\rangle=0} \langle \lambda a, x\rangle = 0$ и, значит, $\lambda a \in A^\circ$. $\rhd$

- $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \leq 0\}$ — полупространство $\Rightarrow A^\circ = \{y = \lambda a \in \mathbb{R}^n \mid \lambda \geq 0\} = \operatorname{cone} a$ — луч.

$\lhd$ Представим вектор $x \in A$ в виде $x = \mu a + b$, где $b \perp a$. Тогда $x \in A \Leftrightarrow \langle a, x\rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle a, \mu a + b\rangle \leq 0 \Leftrightarrow \mu\langle a, a\rangle \leq 0 \Leftrightarrow \mu \leq 0$. Представим $y \in A^\circ$ в виде $y = \lambda a + c$, где $c \perp a$. Тогда $\sup\limits_{x\in A} \langle y, x\rangle = \sup\limits_{\substack{\mu\leq 0\\ b\perp a}} \langle \lambda a + c, \mu a + b\rangle = \sup\limits_{\substack{\mu\leq 0\\ b\perp a}} (\lambda\mu\langle a, a\rangle + \langle c, b\rangle)$ конечен, если $c = 0$ (если $c \neq 0$, то можно взять $x = tc \in A$ и $\sup\limits_{t} \langle c, tc\rangle = +\infty$), $\lambda \geq 0$. В этом случае, $y = \lambda a$, $\lambda \geq 0$. Поэтому $\sup\limits_{x\in A} \langle y, x\rangle = \sup\limits_{\mu\leq 0} \lambda\mu\langle a, a\rangle \leq 0$ и, значит, $y \in A^\circ$. $\rhd$

- $A=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \langle a,x\rangle\le 1\}$, $a\ne 0 \Rightarrow A^\circ=\{y=\lambda a\in\mathbb{R}^n \mid 0\le\lambda\le 1\}=[0,a]$ — отрезок.

$\lhd$ Представим $x\in A$ и $y\in A^\circ$ в виде $x=\mu a+b$, $y=\lambda a+c$, где $b,c\perp a$. Тогда $x\in A\Leftrightarrow\langle a,x\rangle\le 1\Leftrightarrow\langle a,\mu a+b\rangle\le 1\Leftrightarrow\mu\langle a,a\rangle\le 1$, $\sup\limits_{x\in A}\langle y,x\rangle=\sup\limits_{\substack{\mu\langle a,a\rangle\le 1\\ b\perp a}}\langle\lambda a+c,\mu a+b\rangle=\sup\limits_{\substack{\mu\langle a,a\rangle\le 1\\ b\perp a}}(\lambda\mu\langle a,a\rangle+\langle c,b\rangle)$ конечен, если $c=0$ (если $c\ne 0$, то можно взять $x=tc\in A$ и $\sup\limits_t\langle c,tc\rangle=+\infty$). В этом случае $y=\lambda a$. Следовательно, $\sup\limits_{x\in A}\langle y,x\rangle=\sup\limits_{\mu\langle a,a\rangle\le 1}\lambda\mu\langle a,a\rangle\le 1\Leftrightarrow 0\le\lambda\le 1$ и, значит, $y=\lambda a\in A^\circ$. $\rhd$

- $A=\{x\in X \mid \|x\|_X\le 1\}\Rightarrow A^\circ=\big\{y\in X^* \mid \|y\|_{X^*}\le 1\big\}$.

$\lhd$ $\sup\limits_{x\in A}\langle y,x\rangle=\sup\limits_{\|x\|_X\le 1}\langle y,x\rangle=\|y\|_{X^*}\le 1\Leftrightarrow\|y\|_{X^*}\le 1\Rightarrow A^\circ=\big\{y\in X^* \mid \|y\|_{X^*}\le 1\big\}$. $\rhd$

- $A=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|\le C\}$, $C>0$, $|x|:=\Big(\sum\limits_{j=1}^n x_j^2\Big)^{\frac12}\Rightarrow A^\circ=\big\{y\in\mathbb{R}^n \mid |y|\le\frac{1}{C}\big\}$.

$\lhd$ Поскольку $A=CB$, где $B=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|\le 1\}$, и по предыдущему $B^\circ=\big\{y\in\mathbb{R}^n \mid |y|\le 1\big\}$, то $A^\circ=(CB)^\circ\overset{4}{=}\frac{1}{C}B^\circ=\big\{y\in\mathbb{R}^n \mid |y|\le\frac{1}{C}\big\}$. $\rhd$

4.6.4 Биполяра. Теорема о биполяре

Поляра от поляры называется *биполярой*:
$A^{\circ\circ} := (A^\circ)^\circ = \{x \in X \mid \sup\limits_{y \in A^\circ} \langle y, x\rangle \le 1\}$.

Теорема (о биполяре)**.** *Множество A совпадает со своей биполярой $A^{\circ\circ}$ ($A = A^{\circ\circ}$) тогда и только тогда, когда A — выпуклое замкнутое множество, содержащее ноль.*

Доказательство. Если $A = A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ$, то множество A само является полярой, а поляра всегда является выпуклым замкнутым множеством, содержащим ноль.

Обратно. Пусть A — выпуклое замкнутое множество, содержащее ноль. Вложение $A \subset A^{\circ\circ}$ — очевидно. Действительно, если $x \in A$, то выполняется неравенство $\langle y, x\rangle \le 1$ для любого $y \in A^\circ$. Тогда по определению поляры $x \in (A^\circ)^\circ = A^{\circ\circ}$.

Докажем вложение $A \supset A^{\circ\circ}$. Предположим противное, что $A \not\supset A^{\circ\circ}$, значит, существует $\hat{x} \in A^{\circ\circ}$, $\hat{x} \notin A$. По теореме о строгой отделимости точку $\hat{x}$ можно строго отделить от множества A, т. е. существует линейный непрерывный функционал $\hat{y}$ такой, что

$$\langle \hat{y}, \hat{x}\rangle > \sup_{a \in A} \langle \hat{y}, a\rangle \ge 0 \text{ (так как } 0 \in A) \Longrightarrow \langle \hat{y}, \hat{x}\rangle > 0.$$

Следовательно, найдется такое $t > 0$, что будет выполняться двойное неравенство $\langle t\hat{y}, \hat{x}\rangle > 1 \ge \sup\limits_{a \in A} \langle t\hat{y}, a\rangle$. Это означает, что $t\hat{y} \in A^\circ$, $\hat{x} \notin A^{\circ\circ}$ — противоречие. □

Следствие 1. *Если A — выпуклое замкнутое множество и $0 \in A$, то множество A является полярой некоторого выпуклого замкнутого множества B, содержащего 0 ($A = B^\circ$).*

Доказательство. По теореме о биполяре $A = A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ = B^\circ$, где $B = A^\circ$ — выпуклое замкнутое множество и $0 \in B$, так как поляра всегда является выпуклым замкнутым подмножеством, содержащим ноль. □

Следствие 2. *Если A — произвольное множество, то биполяра* $A^{\circ\circ} = \overline{\operatorname{conv}(A \cup \{0\})}$.

Доказательство. В силу свойства 7 $\left(A^\circ = \left(\overline{\operatorname{conv}(A \cup \{0\})}\,\right)^\circ\right)$ имеем: $A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ \stackrel{7}{=} \left(\left(\overline{\operatorname{conv}(A \cup \{0\})}\,\right)^\circ\right)^\circ = \overline{\operatorname{conv}(A \cup \{0\})}$ (по теореме о биполяре для выпуклого замкнутого множества $\overline{\operatorname{conv}(A \cup \{0\})}$, содержащего ноль). $\square$