3 Конечномерные гладкие задачи с равенствами и неравенствами

В этом параграфе даются необходимые и достаточные условия экстремума в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств и неравенств.

3.1 Постановка задачи

Пусть $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$, — функции n переменных, отображающие пространство $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, обладающие некоторой гладкостью. *Гладкой конечномерной экстремальной задачей с ограничениями типа равенств и неравенств* называется следующая задача в $\mathbb{R}^n$:

$$f_0(x) \to \min; \quad f_i(x) \le 0,\ i = 1, \dots, m',\ f_i(x) = 0,\ i = m'+1, \dots, m. \tag{P}$$

В задачах, где имеются ограничения типа неравенств, важно, рассматриваемая задача на минимум или максимум. Для определенности мы будем рассматривать задачи на минимум.

3.2 Необходимые и достаточные условия экстремума

3.2.1 Принцип Лагранжа

Сформулируем необходимое условие экстремума I порядка в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств и неравенств — принцип Лагранжа.

Теорема. *Пусть $\hat{x} \in loc\min P$ — точка локального минимума в задаче (P), а функции f_i, $i = 0, 1, \dots, m$, непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\hat{x}$* (условие гладкости). *Тогда существует ненулевой вектор множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\lambda \ne 0$, такой, что для функции Лагранжа задачи (P) $\mathscr{L}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$ выполняются условия:*

а) стационарности:

$$\mathscr{L}'(\hat{x}) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \frac{\partial \mathscr{L}(\hat{x})}{\partial x_j} = 0,\ j = 1, \dots, n \iff \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) = 0 \right);$$

b) *дополняющей нежесткости*: $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m'$;
c) *неотрицательности*: $\lambda_i \geq 0,\ i = 0, 1, \ldots, m'$.

Точки, удовлетворяющие необходимым условиям локального экстремума, называются *критическими*. В задаче на максимум $\lambda_0 \leq 0$.

Отметим, что в задаче (P) с ограничениями типа равенств и неравенств ограничения типа равенств можно было бы не писать, заменив любое из равенств $f(x) = 0 \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 0$ двумя неравенствами $f(x) \leq 0$, $-f(x) \leq 0$.

3.3 Примеры

Пример 1.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min; \quad 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5,\ x_1 + x_2 + x_3 = 3.$$

Решение. Функция Лагранжа

$$\mathscr{L} = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) + \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 3).$$

Необходимые условия локального минимума:
a) стационарности

$$\mathscr{L}_x = 0 \iff \begin{cases} \mathscr{L}_{x_1} = 0, \\ \mathscr{L}_{x_2} = 0, \\ \mathscr{L}_{x_3} = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_0 x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_0 x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0; \end{cases}$$

b) дополняющей нежесткости

$$\lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) = 0;$$

c) неотрицательности

$$\lambda_0 \geq 0,\ \lambda_1 \geq 0.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из уравнений пункта а) выводим, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ — все множители Лагранжа — нули, а этого быть не может.

Поэтому $\lambda_0 \neq 0$, полагаем $\lambda_0 = 1/2$. Получим

$$\begin{cases} x_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -2\lambda_1 - \lambda_2, \\ x_2 = \lambda_1 - \lambda_2, \\ x_3 = -\lambda_1 - \lambda_2. \end{cases}$$

Предположим $\lambda_1 = 0$. Тогда $x_1 = x_2 = x_3 = -\lambda_2$. Подставляя $x_i = -\lambda_2$ в равенство $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, получаем, что $-3\lambda_2 = 3 \Leftrightarrow \lambda_2 = -1 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 1$ — критическая точка.

Пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда в силу условия b) $2x_1 - x_2 + x_3 - 5 = 0$. Подставим x_1, x_2, x_3 в уравнения $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $2x_1 - x_2 + x_3 = 5$:

$$\begin{cases} -2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 3, \\ -4\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 5, \end{cases} \iff \begin{cases} -2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 3, \\ -6\lambda_1 - 2\lambda_2 = 5, \end{cases}$$

откуда $\lambda_1 = -9/14 < 0$ — противоречие с условием неотрицательности c). Значит, в случае $\lambda_1 \neq 0$ критических точек нет.

Функция $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to +\infty$ при $|x| \to \infty$, значит, по следствию из теоремы Вейерштрасса решение задачи существует, а в силу единственности критической точки решением может быть только она. Итак, $\hat{x} = (1, 1, 1) \in \text{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = 3$.

Пример 2. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Пусть $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^n$ — симметричная матрица ($a_{ij} = a_{ji}$) и $Q(x) = \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \langle Ax, x\rangle$ — соответствующая ей квадратичная форма.

Теорема. *В пространстве $\mathbb{R}^n$ существует ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$, в котором квадратичная форма Q имеет представление*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, f_i\rangle^2.$$

В базисе $f_1, \ldots, f_n$ матрица формы Q диагональна. Направления векторов $f_1, \ldots, f_n$ называются *главными осями формы* Q, а переход к базису $f_1, \ldots, f_n$ называется *приведением формы к главным осям.*

Доказательство. Если $Q \equiv 0$, то $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, $f_1, \ldots, f_n$ — любая ортонормированная система.

Пусть $Q \not\equiv 0$, тогда Q принимает положительные или отрицательные значения. Для определенности считаем, что Q принимает отрицательные значения. Рассмотрим первую экстремальную задачу

$$\langle Ax, x\rangle \to \min; \quad \langle x, x\rangle \leq 1. \qquad (P_1)$$

Если Q принимает только неотрицательные значения, то надо рассматривать задачу на максимум.

Решение $\hat{x} =: f_1$ задачи (P_1) по теореме Вейерштрасса существует, так как шар $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x\rangle \le 1\}$ является компактом в $\mathbb{R}^n$, а функция $\langle Ax, x\rangle$ непрерывна. Функция Лагранжа задачи (P_1) $\mathscr{L} = \lambda_0\langle Ax, x\rangle + \lambda(\langle x, x\rangle - 1)$.

Необходимые условия минимума в точке $\hat{x} = f_1$:

a) стационарности: $\mathscr{L}_x(f_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 Af_1 + \lambda f_1 = 0$,

b) дополняющей нежесткости: $\lambda(\langle f_1, f_1\rangle - 1) = 0$;

c) неотрицательности: $\lambda_0 \ge 0,\ \lambda \ge 0$.

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda \ne 0$ и из пункта a) выводим, что $f_1 = 0$, но это противоречит условию б).

Поэтому $\lambda_0 \ne 0$, полагаем $\lambda_0 = 1$. Тогда из a) $Af_1 = -\lambda f_1$. Умножая последнее равенство скалярно на f_1, получим, что $\langle Af_1, f_1\rangle = -\lambda\langle f_1, f_1\rangle = S_{\text{absmin}} < 0$. Отсюда $\lambda > 0$ и по условию b) $\langle f_1, f_1\rangle = 1$. Таким образом, f_1 — собственный вектор матрицы A, $Af_1 = \lambda_1 f_1$ ($\lambda_1 = -\lambda$), $|f_1| = 1$, $S_{\text{absmin}} = \lambda_1$, λ_1 — минимальное собственное значение матрицы A.

Обозначим $L_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, f_1\rangle = 0\}$ — подпространство в $\mathbb{R}^n$.

Если $Q(x) = 0\ \forall\ x \in L_1$, то $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, $f_2, \ldots, f_n$ — любая ортонормированная система из L_1.

Пусть $Q \not\equiv 0$ на L_1. Тогда Q на L_1 принимает положительные или отрицательные значения. Для определенности теперь считаем, что Q принимает на L_1 положительные значения. Рассмотрим вторую задачу

$$\langle Ax, x\rangle \to \max; \quad \langle x, x\rangle \le 1,\ \langle x, f_1\rangle = 0. \tag{P_2}$$

Решение $\hat{x} =: f_2$ задачи (P_2) по теореме Вейерштрасса существует, так как сечение шара B плоскостью L_1 является также компактом. Функция Лагранжа задачи (P_2) $\mathscr{L} = \lambda_0\langle Ax, x\rangle + \lambda(\langle x, x\rangle - 1) + 2\mu\langle x, f_1\rangle$.

Необходимые условия максимума в точке $\hat{x} = f_2$:

a) стационарности: $\mathscr{L}_x(f_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 Af_2 + \lambda f_2 + \mu f_1 = 0$,

b) дополняющей нежесткости: $\lambda(\langle f_2, f_2\rangle - 1) = 0$;

c) неотрицательности: $\lambda_0 \le 0$ (задача на максимум!), $\lambda \ge 0$.

Если $\lambda_0 = 0$, то из пункта a) выводим, что $\lambda f_2 + \mu f_1 = 0$. В силу линейной независимости векторов f_1 и f_2 следует, что $\lambda = \mu = 0$ — все множители Лагранжа — нули, а этого быть не может.

Поэтому $\lambda_0 \neq 0$, полагаем $\lambda_0 = -1$. Тогда из a) $Af_2 = \lambda f_2 + \mu f_1$. Умножая последнее равенство скалярно на f_1 и учитывая ортогональность векторов f_1 и f_2, получим, что $\langle Af_2, f_1\rangle = \lambda\langle f_2, f_1\rangle + \mu\langle f_1, f_1\rangle \overset{f_2 \perp f_1}{=} \mu\langle f_1, f_1\rangle \overset{|f_1|=1}{=} \mu$. Отсюда $\mu = \langle Af_2, f_1\rangle = \langle f_2, Af_1\rangle = \langle f_2, \lambda_1 f_1\rangle = 0$. Умножая полученное равенство $Af_2 = \lambda f_2$ скалярно на f_2, получим, что $\langle Af_2, f_2\rangle = \lambda\langle f_2, f_2\rangle = S_{\text{absmax}} > 0$. Отсюда $\lambda > 0$ и по условию b) $\langle f_2, f_2\rangle = 1$. Таким образом, f_2 — собственный вектор матрицы A, $Af_2 = \lambda_2 f_2$ ($\lambda_2 = \lambda$), $|f_2| = 1$, векторы f_1 и f_2 ортогональны.

Далее поступаем подобным образом. Вводим подпространство $L_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, f_1\rangle = 0,\ \langle x, f_2\rangle = 0\}$. Если $Q(x) = 0\ \forall\ x \in L_2$, то $\lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$, $f_3, \ldots, f_n$ — любая ортонормированная система из L_2. Пусть $Q \not\equiv 0$ на L_2. Тогда Q на L_2 принимает положительные или отрицательные значения. Вновь рассматриваем задачу на минимум или максимум:

$$\langle Ax, x\rangle \to \text{extr}; \quad \langle x, x\rangle \leq 1,\ \langle x, f_1\rangle = \langle x, f_2\rangle = 0. \qquad (P_3)$$

Решая эту задачу, получаем единичный вектор f_3 такой,что $Af_3 = \lambda_3 f_3$, f_3 ортогонально f_1 и f_2.

Поступая аналогично, в итоге придем к ортонормированному базису $f_1, \ldots, f_n$ из собственных векторов матрицы A с собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ разлагается по ортонормированному базису $f_1, \ldots, f_n$ в следующем виде $x = \sum\limits_{i=1}^{n}\langle x, f_i\rangle f_i$. Тогда $Ax = \sum\limits_{i=1}^{n}\langle x, f_i\rangle Af_i = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\langle x, f_i\rangle f_i$ и, значит,

$$Q(x) = \langle Ax, x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\langle x, f_i\rangle f_i, \sum_{j=1}^{n}\langle x, f_j\rangle f_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\langle x, f_i\rangle^2.$$