1 Задача со старшими производными

1.1 Постановка задачи

Задачей со старшими производными в вариационном исчислении называется следующая экстремальная задача в пространстве $C^n([t_0,\, t_1])$:

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t))\, dt \to \text{extr}; \qquad (P)$$

$$x^{(k)}(t_j) = x_{kj},\ k = 0, 1, \dots, n-1,\ j = 0, 1. \qquad (1)$$

Здесь интегрант $L = L(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)})$ — функция $n+2$ переменных. Отрезок $[t_0,\, t_1]$ является фиксированным и конечным, $t_0 < t_1$. Экстремум в задаче рассматривается среди функций $x \in C^n([t_0,\, t_1])$, удовлетворяющих условиям на концах (1); такие функции называются *допустимыми*.

Определение. Говорим, что допустимая функция $\hat{x}$ доставляет *слабый локальный минимум* в задаче (P), и пишем $\hat{x} \in \operatorname{wlocmin} P$, если существует $\delta > 0$ такое, что $J(x(\cdot)) \geq J(\hat{x}(\cdot))$ для любой допустимой функции x, для которой $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^n([t_0,\, t_1])}$[1] $< \delta$.

1.2 Вывод уравнения Эйлера–Пуассона с помощью леммы Лагранжа

Теорема. *Пусть функция $\hat{x}$ доставляет слабый локальный экстремум в задаче (P) ($\hat{x} \in wlocextr\, P$), функции $L, L_x, L_{\dot{x}}, \dots, L_{x^{(n)}}$ — непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}\dots\hat{x}^{(n)}}$*[2]*, $(L, L_x, \dots, L_{x^{(n)}} \in C(\mathcal{O}(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}\dots\hat{x}^{(n)}})))$, $\hat{L}_{x^{(k)}} \in C^k([t_0,\, t_1])$,*

---

[1] $\|y\|_{C^n([t_0,\, t_1])} := \max\left\{\|y\|_{C([t_0,\, t_1])}, \|\dot{y}\|_{C([t_0,\, t_1])}, \dots, \|y^{(n)}\|_{C([t_0,\, t_1])}\right\}$.

[2] $\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}\dots\hat{x}^{(n)}} := \left\{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), \dots, \hat{x}^{(n)}(t)) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid t \in [t_0, t_1]\right\}$

$k = 1, \ldots, n$. *Тогда выполнено уравнение Эйлера–Пуассона*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \hat{L}_{x^{(k)}}(t) = 0 \quad \forall\, t \in [t_0,\, t_1].$$

При $n = 1$ уравнение Эйлера–Пуассона совпадает с уравнением Эйлера. При $n = 2$ уравнение Эйлера–Пуассона выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{L}_{\ddot{x}}(t) - \frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0.$$

Доказательство. Будем выводить уравнение Эйлера–Пуассона методом вариаций. Вычислим вариацию по Лагранжу функционала J. Возьмем произвольную, но фиксированную функцию $h \in C_0^n([t_0,\, t_1])$[3]. Поскольку $\hat{x} \in \mathrm{wlocextr}\, P$, то функция одного переменного

$$\varphi(\lambda) := J(\hat{x} + \lambda h) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, \hat{x} + \lambda h, \dot{\hat{x}} + \lambda \dot{h}, \ldots, \hat{x}^{(n)} + \lambda h^{(n)})\, dt$$

имеет экстремум при $\lambda = 0$. Но тогда по теореме Ферма $\varphi'(0) = 0$. Дифференцируя функцию φ и полагая $\lambda = 0$, получаем

$$\varphi'(0) = \delta J(\hat{x}, h) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{k=0}^{n} \hat{L}_{x^{(k)}}(t) h^{(k)}(t) \right) dt = 0 \quad \forall\, h \in C_0^n([t_0, t_1]). \tag{1}$$

Проинтегрируем по частям k раз каждое слагаемое в соотношении (1):

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \hat{L}_{x^{(k)}} h^{(k)} dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \hat{L}_{x^{(k)}} dh^{(k-1)} = \hat{L}_{x^{(k)}}(t) h^{(k-1)}(t) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1} h^{(k-1)} d\hat{L}_{x^{(k)}} =$$

---

[3] $C_0^n([t_0, t_1]) = \big\{ h \in C^n([t_0, t_1]) \mid h^{(k)}(t_0) = h^{(k)}(t_1) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, n - 1 \big\}$

(свободные члены интегрирования по частям равны нулю, поскольку $h \in C_0^n([t_0,\, t_1])$ и, значит, $h^{(k)}(t_0) = h^{(k)}(t_1) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$)

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(-\frac{d}{dt}\hat{L}_{x^{(k)}} \right) h^{(k-1)} dt = \cdots = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left((-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\hat{L}_{x^{(k)}} \right) h\, dt.$$

Тогда соотношение (1) перепишется в виде

$$\delta J(\hat{x}, h) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\hat{L}_{x^{(k)}} \right) h\, dt = 0 \quad \forall\ h \in C_0^n([t_0, t_1]).$$

Отсюда по основной лемме вариационного исчисления (лемме Лагранжа[4]) п.1.2 следует выполнение уравнения Эйлера–Пуассона. $\triangleright$

[4] в формулировке леммы Лагранжа вместо пространства $C_0^1([t_0,\, t_1])$ можно было взять пространство $C_0^n([t_0,\, t_1])$, а при доказательстве соответственно взять функцию $h(t) = \begin{cases} (t-\tau_0)^{n+1}(\tau_1 - t)^{n+1}, & t \in [\tau_0,\, \tau_1], \\ 0, & t \notin [\tau_0,\, \tau_1]. \end{cases}$

1.3 Пример

$$J(x(\cdot)) = \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \text{extr};\ x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = 1.$$

Решение. Необходимое условие — уравнение Эйлера–Пуассона

$$\frac{d^2}{dt^2}L_{\ddot{x}} - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \iff \frac{d^2}{dt^2}2\ddot{x} = 0 \iff x^{(4)} = 0.$$

Общее решение уравнения Эйлера–Пуассона: $x = C_1t^3 + C_2t^2 + C_3t + C_4$. Неизвестные константы C_1, C_2, C_3, C_4 находим из условий на концах

$x(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0,$

$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0,$

$$\begin{cases} x(1) = 0, \\ \dot{x}(1) = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 3C_1 + 2C_2 = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Значит, имеется единственная допустимая экстремаль $\hat{x} = t^3 - t^2$.

Проверим, доставляет ли найденная допустимая экстремаль минимум или максимум в задаче. Сравним значение функционала $J(\hat{x})$ со значением функционала $J(x)$ на произвольной допустимой функции x. Представим функцию x в виде суммы $x = \hat{x} + h$, где функция h такова, что их сумма $\hat{x} + h$ допустима. Для этого надо взять $h \in C^2([0,\,1])$, $x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = 0$, $\dot{x}(1) = 1$. Тогда в силу равенства

$$J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) = J(h) \quad \forall\ h \in C_0^2([0,\,1])$$

для квадратичного функционала J на экстремали $\hat{x}$ имеем

$$J(\hat{x} + h) - J(\hat{x}) = \int\limits_0^1 \ddot{h}^2\,dt \geq 0.$$

Таким образом, разность всегда неотрицательна, то есть $\hat{x} \in$

absmin ,

$$S_{\text{absmin}} = \int\limits_0^1 \ddot{\hat{x}}^2 dt = \int\limits_0^1 (6t-2)^2\, dt = \int\limits_0^1 (36t^2 - 24t + 4)\, dt =$$

$$= 12t^3 - 12t^2 + 4t \,\Big|_0^1 = 4.$$

Покажем, что $S_{\text{absmax}} = +\infty$. Действительно, возьмем последовательность допустимых функций $x_n(\cdot) = \hat{x}(\cdot) + nh(\cdot)$, $h \not\equiv 0$. Для того, чтобы последовательность функций была допустима необходимо, чтобы $h \in C_0^2([0,\, 1])$, например, возьмем $h(t) = t^2(t-1)^2$. Тогда

$$J(x_n(\cdot)) = \int\limits_0^1 \ddot{x}_n^2\, dt = \int\limits_0^1 \left(\ddot{\hat{x}}(t) + n\ddot{h}(t)\right)^2 dt \to +\infty \quad \text{при } n \to +\infty.$$

Ответ. Допустимая экстремаль $t^3 - t^2 \in \text{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = 4$; $S_{\text{absmax}} = +\infty$.