Глава 2

Линейное программирование

В линейном программировании изучаются задачи об экстремуме линейной функции нескольких переменных при ограничениях типа равенств и неравенств, задаваемых также линейными функциями.

Рождение линейного программирования принято отсчитывать от работы Л. В. Канторовича 1939 года об оптимизации раскроя листов фанеры для самолетов и распределения ограниченных ресурсов в более общих проблемах, где впервые было показано, что многие задачи экономики формализуются как задачи об экстремуме линейной функции при линейных ограничениях. Канторович для рассмотренного им класса задач ввел двойственные переменные, дал им содержательную экономическую интерпретацию и описал алгоритм решения двойственной задачи близкий по духу к симплекс-методу.

Через несколько лет (около 1947 года) интерес к подобным задачам возник у американских математиков. Этот интерес был вызван проблемами, связанными с экономикой и военно-промышленным комплексом. Из числа экономистов, пропагандировавших среди математиков данный класс задач, следует прежде всего назвать Т. Купманса. Он же ввел термин "линейное программирование" (linear programming). Впоследствии Канторовичу и Купмансу была присуждена Нобелевская премия по экономике за 1975 год. Слово "программирование" заимствовано из зарубежной литературы и в данном случае означает не что иное, как "планирование". Вообще под термином "программирование" в математике понимают алгоритмический метод решения задач определенного типа. При таком методе задача решается по заранее описанным правилам (командам) в заданной последовательности.

Симплекс-метод был разработан Д. Данцигом. Общая теория была построена коллективом математиков, среди которых следует отметить так же Куна, Таккера, Гурвица и Дж. фон Неймана.

В этой главе рассматриваются постановки задач линейного программирования, правило решения задач в канонической форме по симплекс-методу, приводятся с решениями примеры. Вводится понятие двойственности, проводится обоснование симплекс-метода, дается ряд методов нахождения первоначальной крайней точки. Рассматриваются наиболее известные типы задач линейного программирования — транспортные задачи и задачи о назначении.

1 Симплекс-метод

1.1 Постановки задач. Геометрическая интерпретация

Задачей линейного программирования в канонической форме называется задача нахождения максимума линейной функции от n переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

удовлетворяющей системе m линейных равенств

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^n x_n = b_1, \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \dots + a_2^n x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m^1 x_1 + a_m^2 x_2 + \dots + a_m^n x_n = b_m, \end{cases}$$

и ограничениями неотрицательности $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$. Поскольку уравнения системы можно умножать на -1, то считаем, что в задаче линейного программирования в канонической форме $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$.

В дальнейшем мы, как правило, будем использовать векторно-матричную запись:

$$\langle c, x \rangle \to \max; \; Ax = b, \; x \geq 0. \tag{P_k}$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ — неизвестная переменная, заданные вектора $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ и $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, $\langle c, x \rangle := \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$ — скалярное произведение векторов c и x, $A = \left\{a_i^j\right\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_m^1 & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$ — заданная матрица со столбцами $a^j = \begin{pmatrix} a_1^j \\ \dots \\ a_m^j \end{pmatrix}$, $j = 1, \dots, n$, размеров $m \times n$.

Функция f называется *целевой функцией*, вектор c — *вектором стоимости*, вектор b — *вектором ограничений*, матрица A — *матрицей условий*.

Обозначим S_P — численное значение задачи (P), $\operatorname{Arg} P$ — множество решений задачи (P), т. е. множество допустимых точек $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $\langle c, x \rangle = S_P$.

Задачей линейного программирования в общей форме назовем задачу

$$\langle c, x \rangle \to \min; \; Ax \leq b. \tag{P}$$

Иногда задачи линейного программирования рассматриваются приведенными к *нормальной форме*

$$\langle c, x\rangle \to \max;\ Ax \le b,\ x \ge 0. \tag{P_n}$$

Каноническая форма более удобна при описании алгоритмов решения, задачи в общей и нормальной формах часто используются при рассмотрении проблем существования решений и двойственности. Двойственные задачи для задач в нормальной форме приобретают наиболее симметричный вид.

Сведение различных форм задач друг к другу

Задачи в различных формах легко сводятся друг к другу путем введения дополнительных координат и изменением матрицы A. Все полученные формы одной задачи одновременно a) имеют пустое или непустое множество допустимых точек; b) имеют или не имеют конечное решение.

Например, если дана задача в нормальной форме

$$\langle c, x\rangle \to \max;\ Ax \le b,\ x \ge 0, \tag{P_n}$$

то ее можно свести к задаче в канонической форме

$$\langle \overline{c}, \overline{x}\rangle \to \max;\ \overline{A}\overline{x} = \overline{b},\ \overline{x} \ge 0. \tag{P_k}$$

путем введения дополнительных координат $\tilde{x} = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$:

$$\langle c, x\rangle \to \max;\ Ax + I\tilde{x} = b,\ x \ge 0,\ \tilde{x} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\langle (c, 0), (x, \tilde{x})\rangle \to \max;\ (A\, I)\begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = b,\ (x, \tilde{x}) \ge 0.$$

Здесь I — единичная матрица размеров $m \times m$. Осталось обозначить $\overline{c} = (c, 0)$, $\overline{x} = (x, \tilde{x})$, $\overline{A} = (A\, I)$, $\overline{b} = b$.

В качестве упражнений попробуйте самостоятельно свести другие формы задач линейного программирования друг к другу.

Упражнения

1. Свести задачу в канонической форме к задаче в нормальной форме.

2. Свести задачу в канонической форме к задаче в общей форме.

3. Свести задачу в общей форме к задаче в нормальной форме.

4. Свести задачу в общей форме к задаче в канонической форме.

5. Свести задачу в нормальной форме к задаче в общей форме.

Геометрическая интерпретация

Рассмотрим более подробно задачу линейного программирования в канонической форме. Через $D(P_k)$ будем обозначать множество допустимых точек в задаче (P_k) $\big(D(P_k) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}\big)$. Множество $D(P_k)$, если оно непусто, является выпуклым многогранником (конечным или бесконечным) в пространстве $\mathbb{R}^n$. Линии уровня функционала $\langle c, x\rangle$ являются гиперплоскостями. Нетрудно видеть, что экстремум линейной функции (если он существует) достигается в крайней (угловой) точке выпуклого многогранника.

Напомним, что точка d выпуклого множества D называется *крайней (угловой)*, если не существует точек $d_1, d_2 \in D$, $d_1 \neq d_2$, и числа $t \in (0,\ 1)$ таких, что $d = td_1 + (1-t)d_2$. У многогранников крайние точки — вершины. Имеет место следующая

Теорема Минковского. *Выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ является выпуклой оболочкой своих крайних точек.* [1]

Число крайних точек множества D, задаваемого в виде конечного числа линейных равенств и неравенств, является конечным. Таким образом, для решения задачи линейного программирования (если оно существует), достаточно перебрать значения функции $\langle c, x\rangle$ во всех крайних точках множества D. Но

[1] Бесконечномерный аналог этой теоремы: *выпуклый компакт в нормированном (и даже локально-выпуклом линейном топологическом) пространстве является выпуклой оболочкой своих крайних точек* был доказан Крейном и Мильманом. Его называют теоремой Крейна–Мильмана.

нахождение всех этих крайних точек и перебор значений функции $\langle c, x\rangle$ — операция довольно трудоемкая. Описываемый ниже *симплекс-метод* решения задачи линейного программирования позволяет, начиная с некоторой исходной крайней точки, переходить к другой по направлению наибольшего возрастания функции $\langle c, x\rangle$. Свое название симплекс-метод получил из-за вида множества допустимых элементов, которое в простейших задачах имеет вид симплексов (отрезка, треугольника и т. д.)

Задача (P_k) называется *невырожденной*, если любая крайняя точка множества $D(P_k)$ содержит ровно m положительных координат.

Пусть x — крайняя точка в невырожденной задаче с положительными координатами (для определенности первыми) $x_1, \dots, x_m$. Тогда вектор x можно представить в виде $x = (x_b, x_n)$, где $x_b = (x_1, \dots, x_m)$ — базисный вектор, $x_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, $x_n = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-m}$ — небазисный вектор. Аналогично матрицу A можно представить в виде $A = (A_b, A_n)$. Будет доказано в п. 3.2, что матрица A_b невырожденная, то есть ее определитель отличен от нуля.

1.2 Правило решения задач по симплекс-методу

Для решения невырожденной задачи линейного программирования следует:

1. Привести задачу к задаче в канонической форме (P_k).

2. Отыскать крайнюю точку $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$, $x_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, множества допустимых элементов[2]. Методы нахождения начальной крайней точки будут описаны ниже в §4.

3. Построить симплексную таблицу для начальной крайней точки x. Пояснения к построению таблицы:

---

[2]В вырожденной задаче крайняя точка может содержать менее m положительных компонент. В этом случае число базисных компонент дополняется до m, включением в число базисных некоторых нулевых компонент так, чтобы, соответствующие всем базисным компонентам, вектор-столбцы матрицы A были линейно независимы (см. п. 3.2).

В таблице $m+4$ строки и $n+4$ столбца.

В первом столбце, начиная с третьего по $(m+2)$-е место, находятся базисные векторы $a^1, \ldots, a^m$, соответствующие положительным координатам начальной крайней точки $x = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$.

Во втором столбце на аналогичных местах стоят значения c_j вектора c с теми же номерами, что и столбцы a^j.

В первой строке, начиная с четвертого столбца, стоят элементы $c_1, \ldots, c_n$.

Вторая строка, начиная с третьего столбца, — векторы $b, a^1, \ldots, a^n$. Под ними — разложения этих векторов по базису $a^1, \ldots, a^m$. Ясно, что $b = \sum\limits_{i=1}^{m} a^i x_i \Leftrightarrow Ax = b$. То есть разложением вектора b является вектор x_b ненулевых координат крайней точки x. Предположим, что вектора a^j, $j = 1, \ldots, n$, имеют следующее разложение по базису $a^1, \ldots, a^m$: $a^j = \sum\limits_{i=1}^{m} a^i x_{ij} \Leftrightarrow a^j = A_b x^j \Leftrightarrow A = A_b X$, где $X = \{x_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ — матрица разложений векторов $a^1, \ldots, a^n$ по базису $a^1, \ldots, a^m$, состоящая из столбцов $x^1, \ldots, x^n$. Тогда $X = A_b^{-1} A$, то есть неизвестные векторы-столбцы x^j отыскиваются с помощью обратной матрицы: $x^j = A_b^{-1} a^j$. Очевидно, что при $i = 1, \ldots, m$ разложения векторов a^i тривиальны: $a^i = a^i$, то есть в этом случае $x^j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e^j$ (e^j — вектор-столбец канонического базиса).

В предпоследней строке z в столбце под вектором b (x_b) запишем $z_0 = \langle c_b, x_b \rangle$. Тогда z_0 — значение функционала в начальной крайней точке x. Под векторами a^j, $j = 1, \ldots, n$, запишем $z_j = \langle c_b, x^j \rangle$, то есть $z = (z_1, \ldots, z_n) = c_b X$. Очевидно, что $z_j = c_j$ при $j = 1, \ldots, m$.

В последней строке Δ, начиная с четвертого столбца, записывается разность между элементами предпоследней строки и элементами первой строки: $\Delta = z - c \Leftrightarrow \Delta_i = z_i - c_i,\ i = 1, \ldots, n$.

	c		c_1	$\ldots$	c_m	c_{m+1}	$\ldots$	c_{j_0}	$\ldots$	c_n	t
базис		$b(x_b)$	a^1	$\ldots$	a^m	a^{m+1}	$\ldots$	a^{j_0}	$\ldots$	a^n	
a^1	c_1	x_1	1	$\ldots$	0	x_{1m+1}	$\ldots$	x_{1j_0}	$\ldots$	x_{1n}	t_1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a^{i_0}	c_{i_0}	x_{i_0}	0	$\ldots$	0	x_{i_0m+1}	$\ldots$	$\boxed{x_{i_0j_0}}$	$\ldots$	x_{i_0n}	t_{i_0}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a^m	c_m	x_m	0	$\ldots$	1	x_{mm+1}	$\ldots$	x_{mj_0}	$\ldots$	x_{mn}	t_m
z		$\langle c_b, x_b\rangle$	c_1	$\ldots$	c_m	$\langle c_b, x^{m+1}\rangle$	$\ldots$	$\langle c_b, x^{j_0}\rangle$	$\ldots$	$\langle c_b, x^n\rangle$	
Δ			0	$\ldots$	0	Δ_{m+1}	$\ldots$	Δ_{j_0}	$\ldots$	Δ_n	

4. Исследовать симплексную таблицу.

a) Если $\Delta \geq 0$, то крайняя точка x — решение задачи.

b) Если для некоторого j $\Delta_j < 0$ и $x^j \leq 0$, то значение задачи $S_{P_k} = +\infty$;

c) Пусть в строке Δ имеются отрицательные числа, а соответствующие столбцы x^j содержат положительные числа.

Предположим, что $\min\limits_j \Delta_j = \Delta_{j_0} < 0$. Ясно, что $m+1 \leq j_0 \leq n$. Столбец, соответствующий индексу j_0 называется *разрешающим столбцом.* Если $\min\limits_j \Delta_j$ достигается на нескольких значениях j, то в качестве разрешающего столбца выбираем столбец с любым таким индексом. Обозначим $t_i := \left\{ \dfrac{x_i}{x_{ij_0}} \;\middle|\; x_{ij_0} > 0 \right\} > 0$. Эти значения t_i ставим соответственно в последнем столбце симплексной таблицы. Пусть $t_{i_0} = \min_i t_i > 0$. Строка вектора a^{i_0} называется *разрешающей.* Если $\min\limits_i t_i$ достигается на нескольких значениях i, то в качестве разрешающей строки выбираем любую такую строку. Элемент $x_{i_0j_0}$ называется *разрешающим элементом* симплексной таблицы.

Далее необходимо из числа базисных векторов исключить вектор a^{i_0}, вместо него взять вектор a^{j_0}. Значение функционала на новой крайней точке x' с новыми базисными векторами $a^1, \ldots, a^{i_0-1}, a^{j_0},\ a^{i_0+1},\ \ldots, a^m$, возрастет на величину $-t_{i_0}\Delta_{j_0}$: $\langle c, x'\rangle = \langle c, x\rangle - t_{i_0}\Delta_{j_0}$.

5. Построить новую симплексную таблицу для нового базиса $a^1, \ldots, a^{i_0-1}, a^{j_0}, a^{i_0+1}, \ldots, a^m$, т.е. фактически разложить векторы $b, a^1, \ldots, a^n$, по новому базису. Укажем без обоснования (оно будет приведено в п. 3.3) способ построения новой симплексной таблицы по предыдущей. Элементы таблицы x'_{ij}, лежащие под векторами $b, a^1, \ldots, a^n$, и не лежащие в разрешающей строке старой симплексной таблицы, вычисляются по *правилу прямоугольника*:

$$x'_i = x_i - \frac{x_{i_0} x_{ij_0}}{x_{i_0j_0}},\ x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{i_0j} x_{ij_0}}{x_{i_0j_0}},\ i \neq i_0,$$

из числа x_{ij} вычесть произведение x_{i_0j} на x_{ij_0}, деленное на $x_{i_0j_0}$.[3] Ясно, что в разрешающем столбце новой симплексной таблицы $x'_{i_0j_0} = 1$, остальные элементы равны нулю ($x'_{ij_0} = 0,\ i \neq i_0,\ i = 1, \ldots, m$). Элементы разрешающей строки новой таблицы вычисляются путем деления элементов разрешающей строки старой таблицы на величину $x_{i_0j_0}$:

$$x'_{i_0} = \frac{x_{i_0}}{x_{i_0j_0}},\ x'_{i_0j} = \frac{x_{i_0j}}{x_{i_0j_0}},\ j = 1, \ldots, n.$$

Далее необходимо вновь исследовать симплексную таблицу, т.е. вернуться к п. 4 и так далее, пока не придем к решению задачи.

Отметим, что симплекс-метод позволяет решать точно так же и вырожденные задачи линейного программирования. Число положительных координат крайней точки в таких задачах может быть меньше m, но число базисных векторов всегда равняется рангу матрицы A. Величина t_{i_0} может оказаться равной нулю.

---

[3] Иногда правило нахождения новой симплексной таблицы указывается следующим образом: *элементы i-ой строки новой симплексной таблицы получаются путем вычитания из элементов i-ой строки старой симплексной таблицы i_0-ой строки, умноженной на величину* $\dfrac{x_{ij_0}}{x_{i_0j_0}}$.

Теоретически в вырожденных задачах возможно зацикливание, когда через несколько этапов приходим к уже рассмотренной ранее крайней точке и это возвращение может происходить бесконечное число раз. При этом значение целевой функции не меняется и, значит, $t_{i_0} = 0$. Перейти от вырожденной задачи к невырожденной можно путем сколь угодно малого изменения начальных данных задачи.

1.3 Примеры

Производственная задача

Одним из важнейших экономических прототипов математической модели данной задачи является *производственная задача*. Пусть на предприятии имеются производственные ресурсы (сырье) m типов в объемах $b_1, \dots, b_m$. Предприятие производит продукцию n видов. На производство единицы продукции j-ого вида $(j = 1, \dots, n)$ требуется использовать ресурс каждого i-ого типа в объеме a_i^j. Прибыль от реализации единицы продукции j-ого вида равна c_j. Следовательно, при изготовлении x_j единиц продукции каждого вида прибыль предприятия составит величину $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$. Надо найти план производства $(x_1, \dots, x_n)$ такой, чтобы прибыль предприятия была максимальной. Равенства $a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \dots + a_i^n x_n = b_i$ будут означать, что весь ресурс каждого i-ого типа израсходован полностью. Если ресурсы могут быть израсходованы неполностью, то план производства должен удовлетворять неравенствам $a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \dots + a_i^n x_n \le b_i$, $i = 1, \dots, m$. Можно так же рассматривать смешанную производственную задачу, в которой часть ресурсов должна быть израсходована полностью, а часть может быть израсходована частично.

Пример 1. Решить невырожденную задачу линейного программирования в канонической форме:

$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max;\ \ x_i \geq 0,\ \ i = 1, 2, 3, 4,$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 3,$$

с заданной начальной крайней точкой $x = (0, 0, 1, 3)$.

Решение. Базисные векторы $a^3 = (1, 0)$ и $a^4 = (0, 1)$. Составим первую симплексную таблицу

	c		2	1	1	-1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	
a^3	1	1	1	-1	1	0	
a^4	-1	3	2	1	0	1	3
$z = \langle c_b, \cdot\rangle$		$\langle -2\rangle$	-1	-2	1	-1	
$\Delta = z - c$			-3	-3	0	0	

Из таблицы видно, что в качестве разрешающего столбца можно взять столбцы a^1 и a^2. Возьмем для определенности столбец a^2. Тогда $t = 3$, разрешающая строка a^4. Заменяем в базисе вектор a^4 на вектор a^2 и для нового базиса строим вторую симплексную таблицу:

	c		2	1	1	-1
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4
a^3	1	4	3	0	1	1
a^2	1	3	2	1	0	1
$z = \langle c_b, \cdot\rangle$		$\langle 7\rangle$	5	1	1	2
$\Delta = z - c$			3	0	0	3

Вектор $\Delta \geq 0$, поэтому точка $\hat{x} = (0, 3, 4, 0)$ является решением задачи и $S_{\max} = 7$.

Если бы в качестве разрешающего столбца в первой симплексной таблице взяли столбец a^1, то пришли бы к той же точке (0,3,4,0), но за большее число шагов.

Пример 2. Решить задачу линейного программирования в канонической форме

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6\to\max;\;\; x_i\geq 0,\;\; i=1,\ldots,6,$$

$$\begin{aligned}x_1+x_2+2x_3+3x_4\qquad\;\; &+\;6x_6=9,\\ x_2+\;\;x_3+\;\;x_4\qquad\;\; &+\;\;\;x_6=3,\\ x_3+\;\;x_4-x_5\;\; &+2x_6=1,\\ x_4\qquad\;\; &+\;\;\;x_6=1,\end{aligned}$$

с заданной начальной крайней точкой $x=(1,2,0,0,1,1)$.

Решение. Базис $a^1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $a^2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $a^5=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$, $a^6=\begin{pmatrix}6\\1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Матрица $A_b=\begin{pmatrix}1&1&0&6\\0&1&0&1\\0&0&-1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ не является единичной, поэтому найдем для нее обратную матрицу. Для этого записываем рядом две матрицы: нашу матрицу A_b и единичную. Далее сводим матрицу A_b к единичной путем элементарных преобразований строк. Полученная в результате преобразований матрица на месте единичной матрицы и является обратной к нашей матрице A_b.

Напомним, что *элементарными преобразованиями матрицы* являются: а) перестановка двух строк, б) умножение строки на число отличное от нуля и в) прибавление к одной строке другой строки, умноженной на любое число.

$$\begin{pmatrix}1&1&0&6&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&0\\0&0&-1&2&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&5&1&-1&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&0\\0&0&1&-2&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-1&0&-5\\0&1&0&1&0&1&0&0\\0&0&1&-2&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-1&0&-5\\0&1&0&0&0&1&0&-1\\0&0&1&0&0&0&-1&2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

На первом этапе мы умножили третью строку на -1, из первой строки вычли вторую. На втором этапе из первой строки вычли четвертую, умноженную на 5. На третьем этапе из второй строки вычли четвертую, а к третьей строке прибавили удвоенную четвертую.

Таким образом, получили, что $A_b^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Далее находим разложения векторов a^3, a^4 по базису a^1, a^2, a^5, a^6:

$$x^3 = A_b^{-1} a^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^4 = A_b^{-1} a^4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Разложением вектора b является вектор $(1, 2, 1, 1)$ ненулевых координат крайней точки. Составим первую симплексную таблицу

	c		1	1	1	1	1	1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	
a^1	1	1	1	0	1	-3	0	0	
a^2	1	2	0	1	1	0	0	0	
a^5	1	1	0	0	-1	1	1	0	1
a^6	1	1	0	0	0	$\boxed{1}$	0	1	1
$z = \langle c_b, \cdot \rangle$		$\langle 5 \rangle$	1	1	1	-1	1	1	
$\Delta = z - c$			0	0	0	-2	0	0	

Разрешающий столбец a^4. В качестве разрешающей строки можно взять строки a^5 и a^6. Возьмем для определенности строку a^6. Тогда $t = 1$, разрешающая строка a^6. Заменяем в базисе вектор

a^6 на вектор a^4 и для нового базиса строим вторую симплексную таблицу:

	c		1	1	1	1	1	1
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
a^1	1	4	1	0	1	0	0	3
a^2	1	2	0	1	1	0	0	0
a^5	1	0	0	0	-1	0	1	-1
a^4	1	1	0	0	0	1	0	1
$z = \langle c_b, \cdot \rangle$		$\langle 7 \rangle$	1	1	1	1	1	3
$\Delta = z - c$			0	0	0	0	0	2

Вектор $\Delta \geq 0$, поэтому точка $\hat{x} = (4, 2, 0, 1, 0, 0)$ является решением задачи и $S_{\max} = 7$. Полученная крайняя точка содержит только три положительные координаты. Значит, решенная нами задача является вырожденной. Если бы мы в качестве разрешающей строки в первой симплексной таблицы выбрали бы строку a^5, то получили бы во второй симплексной таблице, что $t_{i_0} = 0$.