2 Конечномерные гладкие задачи с равенствами

В этом параграфе даются необходимые и достаточные условия экстремума в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств.

2.1 Постановка задачи

Пусть $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$, — функции n переменных, отображающие пространство $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Считаем, что все функции f_i обладают определенной гладкостью. *Гладкой конечномерной экстремальной задачей с ограничениями типа равенств* называется следующая задача:

$$f_0(x) \to \text{extr}; \quad f_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, m. \tag{P}$$

Таким образом, в задаче (P) ищутся экстремумы функции на множестве, задаваемом конечным числом ограничений типа равенств. Точки, удовлетворяющие всем ограничениям типа равенств, называются *допустимыми точками* в задаче.

2.2 Необходимые и достаточные условия экстремума

2.2.1 Принцип Лагранжа

Для решения задачи с ограничениями типа равенств составляется функция Лагранжа. Функционал, экстремум которого ищется, умножается на множитель λ_0, функции ограничений $f_i(x) = 0$ умножаются на множители соответственно λ_i, складываются и выписывается функция Лагранжа $\mathscr{L}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$. Необходимые условия экстремума в задаче с ограничениями выписываются через необходимые условия экстремума функции Лагранжа. Вектор называется вектором множителей Лагранжа.

Сформулируем необходимое условие экстремума I порядка в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств — принцип Лагранжа.

Теорема. *Пусть* $\hat{x} \in locextr\, P$ *— точка локального экстремума в задаче* (P), *а функции* f_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, *непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $\hat{x}$ (условие гладкости). *Тогда существует ненулевой вектор множителей Лагранжа* $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\lambda \neq 0$, *такой, что для функции Лагранжа задачи* (P) $\mathscr{L}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$ *выполняется условие стационарности*

$$\mathscr{L}'(\hat{x}) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \frac{\partial \mathscr{L}(\hat{x})}{\partial x_j} = 0,\ j = 1, \ldots, n \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) = 0 \right).$$

Это соотношение называется *условием стационарности.* Точки, удовлетворяющие условию стационарности, называются *стационарными.*

Доказательство проведем от противного. Предположим, что условие стационарности не выполняется. Это означает, что векторы $f_i'(\hat{x}) = \left(\dfrac{\partial f_i(\hat{x})}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f_i(\hat{x})}{\partial x_n} \right)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, линейно независимы. Поэтому ранг матрицы

$$A = \left(\frac{\partial f_i(\hat{x})}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=0,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

равен $m + 1$. Тогда по теореме о ранге матрицы (см. [15, с. 71]) существует матрица M порядка $(m+1) \times (m+1)$ с определителем, отличным от нуля. Допустим для определенности, что этой матрицей является матрица, составленная из первых столбцов матрицы A:

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_0(\hat{x})}{\partial x_{m+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\hat{x})}{\partial x_{m+1}} \end{pmatrix} = \det M \neq 0.$$

Не ограничивая общности, считаем, что $f_0(\hat{x}) = 0$. Действительно, если $f_0(\hat{x}) \neq 0$, то следует рассмотреть функцию $\widetilde{f_0}(x) = f_0(x) - f_0(\hat{x})$

и для нее будет выполняться условие $\widetilde{f}_0(\hat{x}) = f_0(\hat{x}) - f_0(\hat{x}) = 0$, а условия стационарности и точки экстремума для функций f_0 и $\widetilde{f}_0$ одинаковы.

Для вектора $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{m+1})$ положим $F(\bar{x}) = \big(F_0(\bar{x}), \ldots, F_m(\bar{x})\big) = \big(f_0(\bar{x}, \hat{x}_{m+2}, \ldots, \hat{x}_n), \ldots, f_m(\bar{x}, \hat{x}_{m+2}, \ldots, \hat{x}_n)\big)$. Тогда функция F отображает некоторую окрестность точки $\hat{\bar{x}} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ в $\mathbb{R}^{m+1}$, является (в силу условий гладкости теоремы) непрерывно дифференцируемым отображением в этой окрестности и $F(\hat{\bar{x}}) = \hat{y} = 0$ в силу допустимости точки $\hat{x}$. Кроме того, якобиан отображения F в точке $\hat{\bar{x}}$ отличен от нуля, т. е.

$$\det\left(\frac{\partial F_i(\hat{\bar{x}})}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=0,1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,m+1}} = \det\left(\frac{\partial f_i(\hat{x})}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=0,1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,m+1}} = \det M \neq 0\ .$$

По теореме об обратной функции в конечномерных пространствах (см. следующий пункт) существует обратное отображение F^{-1} некоторой окрестности точки $\hat{y} = 0$ в окрестность точки $\hat{\bar{x}}$ такое, что $F^{-1}(\hat{y} = 0) = \hat{\bar{x}}$ и $|F^{-1}(y) - F^{-1}(\hat{y})| \leq K|y - \hat{y}| \Leftrightarrow |F^{-1}(y) - \hat{\bar{x}}| \leq K|y|$ с некоторой константой $K > 0$. В частности, для достаточно малого по модулю ε определен вектор $\bar{x}(\varepsilon) := F^{-1}(\varepsilon, 0, \ldots, 0)$, для которого $|\bar{x}(\varepsilon) - \hat{\bar{x}}| \leq K|\varepsilon|$. Это означает, что $F(\bar{x}(\varepsilon)) = (\varepsilon, 0, \ldots, 0)$, что равносильно равенствам $f_0(\bar{x}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \ldots, \hat{x}_n) = \varepsilon$, $f_i(\bar{x}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \ldots, \hat{x}_n) = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Таким образом, для вектора $x(\varepsilon) = (x_1(\varepsilon), \ldots, x_{m+1}(\varepsilon), \hat{x}_{m+2}, \ldots, \hat{x}_n)$ выполняются условия

$$f_0(x(\varepsilon)) = \varepsilon, \quad f_i(x(\varepsilon)) = 0,\ i = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

и при этом

$$|x(\varepsilon) - \hat{x}| = |\bar{x}(\varepsilon) - \hat{\bar{x}}| \leq K|\varepsilon|. \tag{2}$$

Из соотношений (1)–(2) следует, что вектор $\hat{x}$ не доставляет в задаче экстремума, ибо вблизи его существуют допустимые векторы $x(\varepsilon)$, на которых $f_0(x(\varepsilon)) = \varepsilon \gtrless 0 = f_0(\hat{x})$, т. е. функционал f_0 принимает значения как большие так и меньшие чем $f_0(\hat{x})$ (напомним, что $f_0(\hat{x}) = 0$). Получили противоречие с тем, что $\hat{x} \in \operatorname{locextr} P$. Таким образом, наше предположение (противного) неверно и тем самым теорема доказана. $\triangleright$

2.2.2 Конечномерная теорема об обратной функции

Теорема (конечномерная теорема об обратной функции). [19, т. 1, с. 455] *Пусть* $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ *— непрерывно дифференцируемое отображение некоторой окрестности* $U \subset \mathbb{R}^n$ *точки* $\hat{x}$ *в* $\mathbb{R}^n$, $F(\hat{x}) = \hat{y}$ *и якобиан отображения* F *в точке* $\hat{x}$ *отличен от нуля* $\left(\det F'(\hat{x}) = \det\left(\dfrac{dF_i(\hat{x})}{dx_j}\right)_{i,j=1}^{n} \neq 0\right)$. *Тогда существует обратное отображение* F^{-1} *некоторой окрестности* V *точки* $\hat{y}$ *в окрестность точки* $\hat{x}$ *такое, что* $F^{-1}(\hat{y}) = \hat{x}$ *и*

$$F(F^{-1}(y)) = y, \quad |F^{-1}(y) - F^{-1}(\hat{y})| \leq K|y - \hat{y}| \quad \forall\, y \in V$$

с некоторой константой $K > 0$.

2.2.3 Необходимое условие экстремума II порядка

Сформулируем необходимое условие минимума II порядка в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств.

Теорема. *Пусть* $\hat{x} \in locmin\, P$ *— точка локального минимума в задаче* (P), *функции* $f_i \in D^2(\hat{x})$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *дважды дифференцируемы по Фреше в точке* $\hat{x}$ (условие гладкости), $dim\, lin$[1] $\{f_1'(\hat{x}), \ldots, f_m'(\hat{x})\} = m$ (условие регулярности). *Тогда существует множитель Лагранжа* $\lambda = (1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ *такой, что для функции Лагранжа* $\mathscr{L}(x) = f_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ *выполняются условия стационарности:*

$$\mathscr{L}'(\hat{x}) = 0 \iff f_0'(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) = 0$$

и неотрицательной определенности матрицы вторых производных:

$$\langle \mathscr{L}''(\hat{x})h, h\rangle \geq 0 \quad \forall\, h \in K := \{\langle f_i'(\hat{x}), h\rangle = 0,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Мы сформулировали необходимое условие минимума. Необходимое условие максимума формулируется аналогично, за исключением того, что множитель Лагранжа $\lambda = (-1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ и соответственно функция Лагранжа $\mathscr{L}(x) = -f_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$.

[1] lin означает “линейная оболочка”.

2.2.4 Достаточное условие экстремума II порядка

Сформулируем достаточное условие минимума II порядка в гладкой конечномерной задаче с ограничениями типа равенств.

Теорема. *Пусть функции* $f_i \in D^2(\hat{x})$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *дважды дифференцируемы по Фреше в точке* $\hat{x}$ (условие гладкости), $dim\, lin\, f_1'(\hat{x}),\ \ldots,\ f_m'(\hat{x})\} = m$ (условие регулярности), *существует множитель Лагранжа* $\lambda = (1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ *такой, что для функции Лагранжа* $\mathscr{L}(x) = f_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ *выполняются условия стационарности:*

$$\mathscr{L}'(\hat{x}) = 0 \iff f_0'(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) = 0$$

и положительной определенности матрицы вторых производных:

$$\langle \mathscr{L}''(\hat{x})h, h\rangle > 0 \quad \forall\ h \neq 0\ :\ \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle = 0,\ i = 1, \ldots, m.$$

Тогда $\hat{x} \in locmin\, P$ *— точка локального минимума в задаче* (P).

Мы сформулировали достаточное условие минимума. Достаточное условие максимума формулируется аналогично, за исключением того, что множитель Лагранжа $\lambda = (-1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ и соответственно функция Лагранжа $\mathscr{L}(x) = -f_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$.

2.3 Примеры

Пример 1.

$4x_1 + 3x_2 \to \text{extr}; \quad x_1^2 + x_2^2 = 1.$

Решение. Функция Лагранжа $\mathscr{L} = \lambda_0(4x_1 + 3x_2) + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$.

Необходимое условие локального экстремума:

$$\mathscr{L}_x = 0 \iff \begin{cases} \mathscr{L}_{x_1} = 0, \\ \mathscr{L}_{x_2} = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 4\lambda_0 + 2\lambda x_1 = 0, \\ 3\lambda_0 + 2\lambda x_2 = 0. \end{cases}$$

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda \neq 0$. Тогда из предыдущих уравнений вытекает, что $x_1 = x_2 = 0$, но эта точка не является допустимой. Полагаем

$\lambda_0 = -1$. Тогда $x_1 = \dfrac{4}{2\lambda}$, $x_2 = \dfrac{3}{2\lambda}$. Подставляя x_1, x_2 в ограничение $x_1^2 + x_2^2 = 1$, получаем, что

$$\frac{16}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 1 \iff 25 = 4\lambda^2 \iff \lambda = \pm\frac{5}{2}.$$

Поэтому имеем две стационарные точки $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$.

По теореме Вейерштрасса (в силу компактности единичной окружности) существуют решения задач на максимум и минимум. Рассматривая значения функционала в стационарных точках, получаем:

$\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right) \in \text{absmax}$, $S_{\text{absmax}} = 5$; $\left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right) \in \text{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = -5$.

Пример 2.

$\langle Ax, x\rangle \to \text{extr}$; $\quad \langle x, x\rangle = 1$ $\big(x \in \mathbb{R}^n,\ A = \big(a_{ij}\big)_{i,j=1}^n$ — симметричная матрица$\big)$.

Решение. Существование решения задач на минимум и на максимум следует по теореме Вейерштрасса, поскольку сфера $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|^2 = \langle x, x\rangle = 1\}$ компактна.

Функция Лагранжа $\mathscr{L} = \lambda_0\langle Ax, x\rangle + \lambda(\langle x, x\rangle - 1)$.

Необходимое условие локального экстремума:

$$\mathscr{L}_x = 0 \iff \lambda_0 Ax + \lambda x = 0.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda \neq 0$. Тогда из условия стационарности $\hat{x} = 0$, но эта точка не является допустимой. Полагаем $\lambda_0 = -1$. Тогда $Ax = \lambda x$. Таким образом, стационарные точки — собственные вектора матрицы A.

Домножив соотношение $A\hat{x} = \lambda\hat{x}$ на $\hat{x}$, получим, что $\langle A\hat{x}, \hat{x}\rangle = \lambda\langle\hat{x}, \hat{x}\rangle = \lambda$. Значит, решение задачи на минимум — собственный вектор матрицы A, соответствующий наименьшему собственному значению, решение задачи на максимум — собственный вектор матрицы A, соответствующий наибольшему собственному значению.

2.4 Задача Аполлония

Древнегреческим ученым Аполлонием (III–II век до н. э.) в книге “Конические сечения” решается задача о проведении из некоторой точки к эллипсу самого длинного и самого короткого отрезка. При этом он решает даже более общую задачу, определяя все проходящие через эту точку отрезки, перпендикулярные к эллипсу. Решим задачу Аполлония с помощью метода Лагранжа неопределенных множителей.

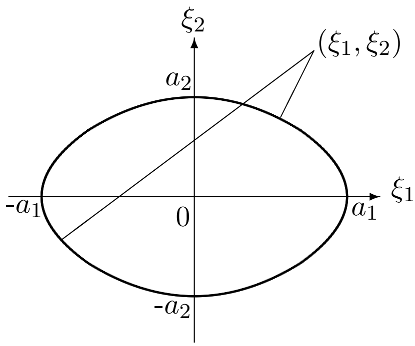

Рис. 2

Формализованно задача записывается следующим образом:

$$f_0(x_1, x_2) = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 \to \text{extr};$$

$$f_1(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - 1 = 0 \quad (a_1 > a_2 > 0)$$

(здесь рассматривается эквивалентная задача об экстремуме квадрата расстояния).

Функция Лагранжа

$$\mathscr{L} = \lambda_0\big((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2\big) + \lambda\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 - 1\right).$$

Необходимое условие локального экстремума — условие стационарности:

$$\mathscr{L}_{x_i} = 0 \iff \lambda_0(x_i - \xi_i) + \lambda\frac{x_i}{a_i^2} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то $\lambda \neq 0$, так как не все множители Лагранжа нули. Тогда $x_1 = x_2 = 0$, но эта точка не лежит на эллипсе.

Полагаем $\lambda_0 = 1$. Тогда из условия стационарности

$$x_i - \xi_i + \frac{\lambda x_i}{a_i^2} = 0 \iff x_i + \frac{\lambda x_i}{a_i^2} = \xi_i \iff \frac{x_i(a_i^2 + \lambda)}{a_i^2} = \xi_i$$

$$\Longleftrightarrow\ x_i = \frac{\xi_i a_i^2}{a_i^2+\lambda},\ i = 1, 2.$$

Подставляя эти значения x_i в уравнение эллипса, получаем

$$\varphi(\lambda) := \frac{\xi_1^2 a_1^2}{(a_1^2+\lambda)^2} + \frac{\xi_2^2 a_2^2}{(a_2^2+\lambda)^2} = 1\ . \tag{1}$$

Относительно λ это алгебраическое уравнение четвертой степени. Поэтому число действительных корней уравнения не более четырех, и, значит, число стационарных точек задачи не более четырех. Каждому корню λ соответствует своя стационарная точка x. График функции $\varphi(\lambda)$ схематически изображен на рис. 3. Если $\varphi(0) = \dfrac{\xi_1^2}{a_1^2} + \dfrac{\xi_2^2}{a_2^2} > 1$, то точка (ξ_1, ξ_2) лежит вне эллипса. Этот случай и изображен на рисунках 3 и 4.

Эллипс — ограниченное и замкнутое (т. е. компактное) множество. По теореме Вейерштрасса решение задач на минимум и максимум существует. Для полного решения задачи надо решить уравнение (1), получить λ_i, найти соответствующие точки $x(\lambda_i)$, подставить эти точки в f_0 и найти наименьшее и наибольшее из полученных значений функционала.

Условия стационарности $x_i - \xi_i + \lambda\dfrac{x_i}{a_i^2} = 0 \Leftrightarrow \xi_i - x_i = \lambda\dfrac{x_i}{a_i^2}$, $i = 1, 2$, имеют очевидный геометрический смысл: вектор $\xi - x$ пропорционален вектору-градиенту функции f_1 в точке x, т. е. лежит на нормали к эллипсу. Этот факт был впервые установлен Аполлонием.

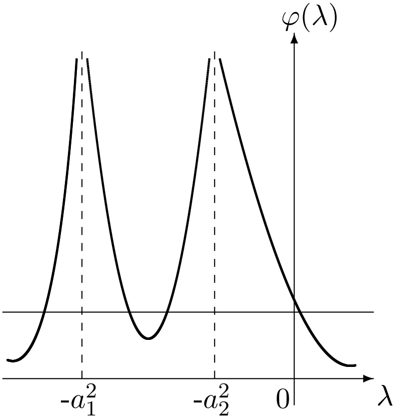

Рис. 3

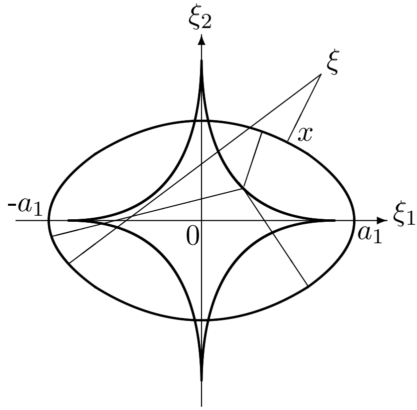

Рис. 4

Выведем из полученных нами соотношений уравнение кривой, "разделяющей" те точки ξ, из которых можно провести две нормали, от точек, из которых можно провести четыре нормали. Очевидно, что это разделение происходит для $\lambda \in (-a_1^2, -a_2^2)$, удовлетворяющих соотношению (1), для которых

$$\varphi'(\lambda) = 0 \iff -\frac{2\xi_1^2 a_1^2}{(a_1^2+\lambda)^3} - \frac{2\xi_2^2 a_2^2}{(a_2^2+\lambda)^3} = 0 \iff$$

$$(a_2^2+\lambda)^3(\xi_1 a_1)^2 = -(a_1^2+\lambda)^3(\xi_2 a_2)^2 \iff$$

$$(a_2^2+\lambda)(\xi_1 a_1)^{2/3} = -(a_1^2+\lambda)(\xi_2 a_2)^{2/3}. \tag{2}$$

Обозначим $a_1^2+\lambda = A(\xi_1 a_1)^{2/3}$, тогда из соотношения (2) следует, что $a_2^2+\lambda = -A(\xi_2 a_2)^{2/3}$. Из последних двух уравнений, вычитая из первого второе, найдем, что $A = \dfrac{a_1^2 - a_2^2}{(\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3}}$. Подставляя вначале в уравнение (1) $a_1^2+\lambda$, $a_2^2+\lambda$, а затем и A, получаем уравнение разделяющей кривой:

$$\frac{\xi_1^2 a_1^2}{A^2(\xi_1 a_1)^{4/3}} + \frac{\xi_2^2 a_2^2}{A^2(\xi_2 a_2)^{4/3}} = 1 \iff (\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3} = A^2 \iff$$

$$(\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3} = \frac{(a_1^2 - a_2^2)^2}{\left((\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3}\right)^2} \iff$$

$$\left((\xi_1 a_1)^{2/3}+(\xi_2 a_2)^{2/3}\right)^3 = (a_1^2-a_2^2)^2 \iff (\xi_1 a_1)^{2/3}+(\xi_2 a_2)^{2/3} = (a_1^2-a_2^2)^{2/3}.$$

Это уравнение астроиды. Вне астроиды каждая точка имеет две нормали к эллипсу, внутри нее — четыре, на самой астроиде — три (за исключением вершин, где имеются две нормали (рис. 4)).

Докажем, что касательная к астроиде перпендикулярна к эллипсу в точке ее пересечения с эллипсом. Обозначим точку на астроиде через ξ. Пусть x — точка на эллипсе такая, что вектор $x-\xi$ перпендикулярен к эллипсу. Для доказательства утверждения достаточно показать, что нормаль к астроиде — вектор $x-\xi$ является касательным, т. е. вектор $(x-\xi) \perp n$, где n — нормаль к астроиде в точке ξ.

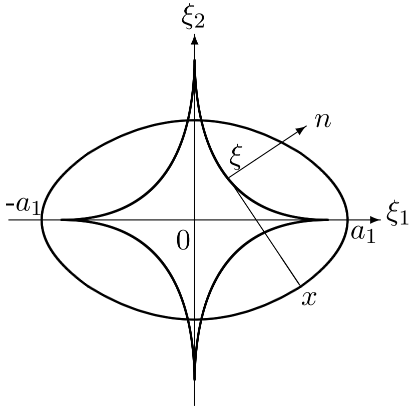

Рис. 5

По доказанному выше $x_i = \dfrac{\xi_i a_i^2}{a_i^2+\lambda}$, и, значит, $x-\xi = \left(\dfrac{\xi_1 a_1^2}{a_1^2+\lambda} - \xi_1, \dfrac{\xi_2 a_2^2}{a_2^2+\lambda} - \xi_2\right) = \left(-\dfrac{\lambda\xi_1}{a_1^2+\lambda}, -\dfrac{\lambda\xi_2}{a_2^2+\lambda}\right)$. Нормалью к астроиде $(\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3} = (a_1^2 - a_2^2)^{2/3}$ в точке ξ является вектор пропорциональный градиенту функции $g(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 a_1)^{2/3} + (\xi_2 a_2)^{2/3}$, т. е. вектор $n = (\xi_1^{-1/3} a_1^{2/3}, \xi_2^{-1/3} a_2^{2/3})$. Возьмем скалярное произведение векторов $x-\xi$ и n:

$$\langle x-\xi, n\rangle = -\frac{\lambda\xi_1\xi_1^{-\frac{1}{3}}a_1^{\frac{2}{3}}}{a_1^2+\lambda} - \frac{\lambda\xi_2\xi_2^{-\frac{1}{3}}a_2^{\frac{2}{3}}}{a_2^2+\lambda} = -\frac{\lambda(\xi_1 a_1)^{2/3}}{a_1^2+\lambda} - \frac{\lambda(\xi_2 a_2)^{2/3}}{a_2^2+\lambda} =$$

(подставим значения $a_i^2+\lambda$, выраженные через A и $(\xi_i a_i)^{2/3}$)

$$= -\frac{\lambda(\xi_1 a_1)^{2/3}}{A(\xi_1 a_1)^{2/3}} - \frac{\lambda(\xi_2 a_2)^{2/3}}{-A(\xi_2 a_2)^{2/3}} = -\frac{\lambda}{A} + \frac{\lambda}{A} = 0.$$

Скалярное произведение векторов равно нулю, следовательно, вектора $x-\xi$ и n перпендикулярны.