$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Гладкость — определенная дифференцируемость. Запись $f \in D^k(\hat{x})$ означает, что f дифференцируема k раз в точке $\hat{x}$. Гладкая конечномерная задача без ограничений:

$$f(x) \to \mathrm{extr}.$$

Определение

Точка $\hat{x}$ является точкой локального минимума функции f, если существует окрестность $U_\varepsilon = \{x \mid |x - \hat{x}| < \varepsilon\}$ точки $\hat{x}$ такая, что $f(x) \geq f(\hat{x})\ \forall\ x \in U_\varepsilon$.

При этом мы пишем $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$. Аналогично определяется локальный максимум функции – $\operatorname{locmax} f$. Если речь идет о минимуме или максимуме, то пишем $\hat{x} \in \operatorname{locextr} f$.

Теорема (Ферма)

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Если $\hat{x} \in \operatorname{locextr} f$ и $f \in D(\hat{x})$, то $f'(\hat{x}) = 0$.

Это соотношение мы называем условием стационарности или необходимым условием экстремума I порядка.
Точки, удовлетворяющие условию стационарности, называются стационарными.
Геометрически теорема Ферма утверждает, что в точке экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику горизонтальна.

Теорема (Ферма)

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Если $\hat{x} \in \operatorname{locextr} f$ и $f \in D(\hat{x})$, то $f'(\hat{x}) = 0$.

$\lhd$ По определению дифференцируемости f

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})h + r(h), \quad r(h) = o(h) = o(1)h$$

при малых h. Значит, $f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) = (f'(\hat{x}) + o(1))h$. Если $f'(\hat{x}) \neq 0$, то при h достаточно близких к нулю, величина $f'(\hat{x}) + o(1)$ имеет знак $f'(\hat{x})$, поскольку $o(1) \to 0$ при $h \to 0$. Само же h может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, разность $f(\hat{x} + h) - f(\hat{x})$ может быть как меньше, так и больше нуля. Это противоречит тому, что $f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) \geq 0$ при $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$ и $f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) \leq 0$ при $\hat{x} \in \operatorname{locmax} f$. $\rhd$

Теорема (необходимые и достаточные условия экстремума)

Необходимые условия экстремума: если $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$ и $f \in D^2(\hat{x})$, то $f'(\hat{x}) = 0$, $f''(\hat{x}) \geq 0$.
Достаточные условия экстремума: если $f'(\hat{x}) = 0$, $f''(\hat{x}) > 0$, то $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$.

$\lhd$ По формуле Тейлора

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})h + \frac{1}{2}f''(\hat{x})h^2 + r(h), \quad r(h) = o(h^2).$$

Необходимость. Пусть $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$. Тогда по теореме Ферма $f'(\hat{x}) = 0$, следовательно, по формуле Тейлора

$$f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) = \frac{1}{2}f''(\hat{x})h^2 + r(h).$$

Поскольку $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$, то $f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) \geq 0$ при достаточно малых h. Поэтому

$$\frac{1}{2}f''(\hat{x})h^2 + r(h) \geq 0.$$

Разделим обе части последнего неравенства на h^2 и устремим h к нулю. Поскольку $\dfrac{r(h)}{h^2} \to 0$, то получим $f''(\hat{x}) \geq 0$.

Теорема (необходимые и достаточные условия экстремума)

Необходимые условия экстремума: если $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$ и $f \in D^2(\hat{x})$, то $f'(\hat{x}) = 0$, $f''(\hat{x}) \geq 0$.

Достаточные условия экстремума: если $f'(\hat{x}) = 0$, $f''(\hat{x}) > 0$, то $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$.

$\lhd$ По формуле Тейлора

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})h + \tfrac{1}{2} f''(\hat{x})h^2 + r(h), \quad r(h) = o(h^2).$$

Достаточность. Пусть $f'(\hat{x}) = 0$, $f''(\hat{x}) > 0$.
Поскольку $r(h) = o(h^2)$, то $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 :$
$-\varepsilon h^2 < r(h) < \varepsilon h^2$ при $|h| < \delta$. Тогда

$$f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) = \tfrac{1}{2} f''(\hat{x})h^2 + r(h) \geq \left(\tfrac{f''(\hat{x})}{2} - \varepsilon\right) h^2 \geq 0$$

при $\varepsilon \leq \frac{f''(\hat{x})}{2}$. Следовательно, $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$. $\rhd$

Для локального максимума неравенства имеют противоположный вид: $f''(\hat{x}) \leq 0$ и $f''(\hat{x}) < 0$ соответственно.

Теорема (условия экстремума n-ого порядка)

Необходимые условия экстремума: если $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$ и $f \in D^n(\hat{x})$, то либо $f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(n)}(\hat{x}) = 0$, либо

$$f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(2m-1)}(\hat{x}) = 0, \quad f^{(2m)}(\hat{x}) > 0 \qquad (1)$$

при некотором $m: \ 2 \le 2m \le n$.

Достаточные условия экстремума: если (1), то $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$.

Для локального максимума неравенство имеет противоположный вид: $f^{(2m)}(\hat{x}) < 0$.

◁ По ф. Тейлора $f(\hat{x}+h)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(\hat{x})}{k!}h^k+r(h)$, $r(h)=o(h^n)$.
Необходимость при $n=1$ следует из т. Ферма.
Пусть далее $n>1$. Тогда либо $f'(\hat{x})=\ldots=f^{(n)}(\hat{x})=0$ (в этом случае выполняется утверждение теоремы), либо $f'(\hat{x})=\ldots=f^{(l-1)}(\hat{x})=0$, $f^{(l)}(\hat{x})\neq 0$, $l\leq n$. Во втором случае

$$f(\hat{x}+h)-f(\hat{x})=\sum_{k=l}^{n}\frac{f^{(k)}(\hat{x})}{k!}h^k+r(h)=\frac{f^{(l)}(\hat{x})}{l!}h^l+r_1(h),$$

$r_1(h)=o(h^l)$. Поскольку $\hat{x}\in\operatorname{locmin} f$, то $f(\hat{x}+h)-f(\hat{x})\geq 0$ при достаточно малых h. Поэтому

$$\frac{f^{(l)}(\hat{x})}{l!}h^l+r_1(h)\geq 0.$$

Так как $f^{(l)}(\hat{x})\neq 0$, то отсюда следует, что l — четно и $f^{(l)}(\hat{x})>0$. Действительно, если бы l было нечетно, то слагаемое $\frac{f^{(l)}(\hat{x})}{l!}h^l$, а вместе с ним и сумма $\frac{f^{(l)}(\hat{x})}{l!}h^l+r_1(h)$ принимали бы знаки как больше, так и меньше нуля при разных знаках h. А это противоречит условию $\hat{x}\in\operatorname{locmin} f$. ▷

Теорема (условия экстремума n-ого порядка)

$f \in D^n(\hat{x})$. Необходимые условия экстремума: если $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$, то либо $f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(n)}(\hat{x}) = 0$, либо

$$f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(2m-1)}(\hat{x}) = 0, \quad f^{(2m)}(\hat{x}) > 0 \qquad (1)$$

при некотором $m: \ 2 \le 2m \le n$.

Достаточные условия экстремума: если (1), то $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$.

$\lhd$ По ф. Тейлора $f(\hat{x}+h) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(\hat{x})}{k!} h^k + r(h)$, $r(h) = o(h^n)$.

Достаточность. Пусть $f'(\hat{x}) = \ldots = f^{(2m-1)}(\hat{x}) = 0$, $f^{2m}(\hat{x}) > 0$. Тогда по формуле Тейлора

$$f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) = \frac{f^{(2m)}(\hat{x})}{(2m)!} h^{2m} + r_2(h), \quad r_2(h) = o(h^{2m}).$$

Поскольку $f^{(2m)}(\hat{x}) > 0$, то $\frac{f^{(2m)}(\hat{x})}{(2m)!} h^{2m} + r_2(h) > 0$ при достаточно малых h, а, значит, и $f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) \ge 0$, т. е. $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$. $\rhd$

1.2.2 Функции нескольких переменных

Теорема (аналог теоремы Ферма)

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Если $\hat{x} \in \operatorname{locextr} f$ и $f \in D(\hat{x})$, то

$$f'(\hat{x}) = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_n} = 0\right).$$

$\lhd$ Рассмотрим функцию одной переменной
$\varphi(x_i) = f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{i-1}, x_i, \hat{x}_{i+1}, \ldots, \hat{x}_n)$.
Поскольку $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) \in \operatorname{locextr} f$, то $\hat{x}_i \in \operatorname{locextr} \varphi$.
Кроме того $\varphi \in D(\hat{x}_i)$. По необходимому условию экстремума для функций одной переменной — теореме Ферма

$$\varphi'(\hat{x}_i) = 0 \iff \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_i} = 0. \ \rhd$$

Напомним, что для функции нескольких переменных второй производной является симметричная матрица вторых производных $f''(\hat{x}) = \left(\dfrac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} = A.$

Матрица A неотрицательно определена ($A \geq 0$), если

$$\langle Ah, h\rangle \geq 0 \ \forall\ h \in \mathbb{R}^n \quad \left(\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j \geq 0 \ \forall\ h = (h_1, \ldots, h_n)\right).$$

Матрица A положительно определена ($A > 0$), если

$$\langle Ah, h\rangle > 0 \quad \forall\ h \in \mathbb{R}^n,\ \ h \neq 0.$$

Матрица A строго положительно определена, если $\exists\ \alpha > 0:$

$$\langle Ah, h\rangle \geq \alpha |h|^2 \quad \forall\ h \in \mathbb{R}^n.$$

Аналогично определяются неположительная, отрицательная и строго отрицательная матрицы.

Отметим, что в конечномерном пространстве условие положительной определенности симметричной матрицы A эквивалентно условию строгой положительности матрицы A.

$$\langle Ah, h\rangle > 0 \ \forall\, h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0 \Leftrightarrow \exists\, \alpha > 0 : \langle Ah, h\rangle \geq \alpha |h|^2 \ \forall\, h \in \mathbb{R}^n.$$

В бесконечномерных пространствах это не так (см. Гл. 1, п. 6.3, Пример 2), то есть условие положительной определенности не является условием строгой положительности.

Теорема (необходимые и достаточные условия экстремума)

Необходимые условия экстремума: если $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$ и $f \in D^2(\hat{x})$, то $f'(\hat{x}) = 0$, $\langle f''(\hat{x})h, h\rangle \geq 0 \ \forall\ h \in \mathbb{R}^n$.
Достаточные условия экстремума: если $f'(\hat{x}) = 0$, $\langle f''(\hat{x})h, h\rangle > 0 \ \forall\ h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0$, то $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$.

$\lhd$ По формуле Тейлора

$$f(\hat{x}+h) = f(\hat{x}) + \langle f'(\hat{x}), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f''(\hat{x})h, h\rangle + r(h), \quad r(h) = o(|h|^2).$$

Необходимость. Пусть $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$. Тогда по аналогу теоремы Ферма $f'(\hat{x}) = 0$, следовательно, по ф. Тейлора

$$f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x}) = \frac{\lambda^2}{2}\langle f''(\hat{x})h, h\rangle + r(\lambda h), \quad r(\lambda h) = o(|\lambda|^2),$$

при малых λ и фиксированном h. Поскольку $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$, то $f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x}) \geq 0$ при достаточно малых λ. Поэтому

$$\frac{\lambda^2}{2}\langle f''(\hat{x})h, h\rangle + r(\lambda h) \geq 0.$$

Разделим обе части последнего неравенства на λ^2 и устремим λ к нулю. Поскольку $\frac{r(\lambda h)}{\lambda^2} \to 0$, то $\langle f''(\hat{x})h, h\rangle \geq 0$.

Теорема (необходимые и достаточные условия экстремума)

Необходимые условия экстремума: если $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$ и $f \in D^2(\hat{x})$, то $f'(\hat{x}) = 0$, $\langle f''(\hat{x})h, h\rangle \geq 0 \ \forall\ h \in \mathbb{R}^n$.
Достаточные условия экстремума: если $f'(\hat{x}) = 0$, $\langle f''(\hat{x})h, h\rangle > 0 \ \forall\ h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0$, то $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$.

$\lhd$ По формуле Тейлора

$$f(\hat{x}+h) = f(\hat{x}) + \langle f'(\hat{x}), h\rangle + \tfrac{1}{2}\langle f''(\hat{x})h, h\rangle + r(h), \quad r(h) = o(|h|^2).$$

Достаточность. Поскольку в конечномерном пространстве условие положительности эквивалентно условию строгой положительности, то $\langle f''(\hat{x})h, h\rangle \geq \alpha|h|^2$ $(\alpha > 0)$. Тогда из формулы Тейлора с учетом условия $f'(\hat{x}) = 0$ имеем:

$$f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) = \tfrac{1}{2}\langle f''(\hat{x})h, h\rangle + r(h) \geq \tfrac{\alpha}{2}|h|^2 + r(h) \geq 0$$

при достаточно малых h, так как $r(h) = o(|h|^2)$.
Следовательно, $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$. $\rhd$

Квадратично-линейная задача

Рассмотрим задачу без ограничений с квадратично-линейным функционалом:

$$f(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c \to \mathrm{extr}.$$

Здесь A — симметричная матрица, вектор $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

Теорема

Пусть $\hat{x}$ — стационарная точка в задаче ($\Leftrightarrow f'(\hat{x}) = 0$).
Если $A > 0 \Rightarrow \hat{x} \in \mathrm{absmin}\, f$.
Если не выполнено условие $A \geq 0$, то $S_{\mathrm{absmin}} = -\infty$.

◁ Отметим, что для квадратично-линейных функционалов по формуле Тейлора имеет место равенство

$$f(\hat{x}+h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})[h] + \frac{1}{2} f''(\hat{x})[h,h]. \qquad (*)$$

Если $\hat{x}$ — стационарная точка, то $f'(\hat{x})[h] = 0 \ \forall\ h \in \mathbb{R}^n$.
Поскольку $f'(x)[h] = 2\langle Ax, h\rangle + \langle b, h\rangle$, то
$\frac{1}{2} f''(\hat{x})[h,h] = \langle Ah, h\rangle$ и из формулы Тейлора $(*)$ имеем:

$$f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) = \langle Ah, h\rangle \quad \forall\ h \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, если $A > 0$ $(\Leftrightarrow \langle Ah, h\rangle > 0 \ \forall\ h \neq 0)$, то $f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) > 0 \ \forall\ h \neq 0$. А это означает, что $\hat{x} \in \operatorname{absmin} f$.

Если $A \not\geq 0$, то $\exists\ h \neq 0 : \langle Ah, h\rangle < 0$. Тогда $f(\hat{x}+\lambda h) = f(\hat{x}) + \langle A\lambda h, \lambda h\rangle = f(\hat{x}) + \lambda^2 \langle Ah, h\rangle \to -\infty$ при $\lambda \to \infty \Rightarrow S_{\text{absmin}} = -\infty$. ▷

Аналогичная теорема верна и для задачи на максимум.

1.2.3 Теорема Вейерштрасса и следствие из нее

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. При исследовании вопроса о достижении функцией n переменных экстремума часто используется следующая теорема.

Теорема (Вейерштрасс)

Непрерывная функция на непустом ограниченном замкнутом подмножестве конечномерного пространства (компакте) достигает своих абсолютных максимума и минимума.

Выделим простое следствие из этой теоремы, которое часто будем использовать.

Следствие

Если функция f непрерывна на $\mathbb{R}^n$ и $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$, то она достигает своего абсолютного минимума на любом замкнутом подмножестве из $\mathbb{R}^n$ (не обязательно конечном).

1.2.4 Критерий Сильвестра

Знакоопределенность матрицы устанавливается с помощью критерия Сильвестра.

Последовательными главными минорами матрицы A называются определители $A_{1\dots k} := \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ . & \dots & . \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$, $k = 1, \dots, n$.

Главным минором $A_{i_1 \dots i_k}$ матрицы A называется определитель матрицы размера $k \times k$, составленной из строк и столбцов с номерами $i_1, \dots, i_k$, $1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n$:

$$A_{i_1 \dots i_k} := \det\begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ . & \dots & . \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix}, \; k = 1, \dots, n.$$

Теорема (критерий Сильвестра)

Пусть A — симметричная матрица. Тогда
1. Матрица A положительно определена ($A > 0$) тогда и только тогда, когда все ее последовательные главные миноры положительны, т. е. $A_{1\dots k} > 0$, $k = 1, \dots, n$.
2. Матрица A отрицательно определена ($A < 0$) тогда и только тогда, когда все ее последовательные главные миноры чередуют знак, начиная с отрицательного, т. е. $(-1)^k A_{1\dots k} > 0$, $k = 1, \dots, n$.
3. Матрица A неотрицательно определена ($A \geq 0$) тогда и только тогда, когда все ее главные миноры неотрицательны, т. е. $A_{i_1\dots i_k} \geq 0$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$, $k = 1, \dots, n$.
4. Матрица A неположительно определена ($A \leq 0$) тогда и только тогда, когда все ее главные миноры чередуют знак, начиная с неположительного, т. е. $(-1)^k A_{i_1\dots i_k} \geq 0$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$, $k = 1, \dots, n$.

1.4 Примеры

Пример 1. $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 \to \mathrm{extr}$.
Необходимое условие экстремума I порядка:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1, 0).$$

Проверка условий экстремума II порядка:

$$A = \left(\frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = 2 > 0, \; A_{12} = 3 > 0.$$

По критерию Сильвестра $A > 0 \Rightarrow \hat{x} \in \mathrm{absmin}$ (поскольку функционал линейно-квадратичный), $S_{\mathrm{absmin}} = f(1, 0) = -1$.

Покажем, что $S_{\mathrm{absmax}} = +\infty$. Действительно, для $x_n = (n, 0)$ $f(x_n) = n^2 - 2n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Ответ. $(1, 0) \in \mathrm{absmin}$, $S_{\mathrm{absmin}} = -1$; $S_{\mathrm{absmax}} = +\infty$.

Пример 2. $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 \to \text{extr}.$

Необходимое условие локального экстремума I порядка:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0, \\ 4x_2^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим $4x_1^3 - 4x_2^3 = 0 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
Подставляя $x_2 = x_1$ в первое уравнение системы, находим: $4x_1^3 - 2x_1 - 2x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1^3 = x_1 \Leftrightarrow x_1 = -1;\ 0;\ 1$, соответственно, $x_2 = -1;\ 0;\ 1$. Получили три стационарные точки $\hat{x}^1 = (1, 1)$, $\hat{x}^2 = (-1, -1)$, $\hat{x}^3 = (0, 0)$.
Проверка условий локального экстремума II порядка:

$$A = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12x_2^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 \to \mathrm{extr}$.
Стационарные точки $\hat{x}^1 = (1,1)$, $\hat{x}^2 = (-1,-1)$, $\hat{x}^3 = (0,0)$.

$$A = \left(\frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12x_2^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

$$A = A\big|_{(1,1)} = A\big|_{(-1,-1)} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, \; B = A\big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$A_1 = 10 > 0$, $A_{12} = 100 - 4 = 96 > 0 \Rightarrow$ по критерию Сильвестра $A > 0 \Rightarrow (-1,-1), (1,1) \in \mathrm{locmin}$. Поскольку

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x_1, x_2) = \lim_{|x|\to\infty} \left(x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2\right) = +\infty,$$

то по сл. из т. Вейерштрасса absmin достигается;
$f(-1,-1) = f(1,1) = -2 < 0 = f(0,0)$
$\Rightarrow (-1,-1), (1,1) \in \mathrm{absmin}$, $S_{\mathrm{absmin}} = -2$.

Пример 2. $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 \to$ extr.

Для матрицы $B = A\big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$B_1 = -2 < 0$, $B_{12} = 0 \Rightarrow$ по критерию Сильвестра B не является ни положительно, ни отрицательно определенной.

B является неположительно определенной матрицей $(B \leq 0)$ и не является неотрицательно определенной матрицей $(B \ngeq 0) \Rightarrow$ не выполняется необходимое условие локального минимума $\Rightarrow \hat{x}^3 = (0, 0) \notin$ locmin.

Проверим, доставляет ли точка локальный максимум.

Поскольку $f(h, -h) = 2h^4 > 0 = f(\hat{x}^3)$ при малых $h \neq 0$, то $\hat{x}^3 \notin$ locmax $\Rightarrow \hat{x}^3 \notin$ locextr.

Ответ. $(0, 0) \notin$ locextr, $(-1, -1), (1, 1) \in$ absmin, $S_{\text{absmin}} = -2$; $S_{\text{absmax}} = +\infty$.

Пример 4. Абсолютные минимумы и максимумы достигаются в бесконечном числе точек:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x.$$

Пример 5. Функция ограничена, абсолютный максимум достигается, минимум — нет:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 6. Функция ограничена, но абсолютные максимум и минимум не достигаются:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Пример 7. Функция ограничена, имеет стационарные точки, но абсолютные максимум и минимум не достигаются:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (\operatorname{arctg} x)^3.$$

Пример 8. Функция ограничена, имеет локальные максимумы и минимумы, но абсолютные максимум и минимум не достигаются:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{arctg} x \cdot \sin x.$$

Пример 9. Ограничение функции, заданной на плоскости, на любую прямую, проходящую через начало координат, имеет в нуле локальный минимум, но вместе с тем начало координат не является точкой локального минимума:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - 3x_2^2).$$

Действительно, на любой прямой вида $x_1 = \alpha x_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, функция $f(x_1, x_2) = f(\alpha x_2, x_2) = (\alpha x_2 - x_2^2)(\alpha x_2 - 3x_2^2) = x_2^2(\alpha - x_2)(\alpha - 3x_2) = x_2^2(\alpha^2 - 4\alpha x_2 + 3x_2^2) \geq 0 = f(0)$ при малых $x_2 \Rightarrow$ на любой прямой вида $x_1 = \alpha x_2$ функция f имеет локальный минимум в нуле. Аналогично на прямой $x_2 = 0$ функция $f(x_1, 0) = x_1^2$ имеет минимум в нуле.

Но на параболе $x_1 = 2x_2^2$ функция $f(2x_2^2, x_2) = -x_2^4 < 0$ в любой окрестности нуля $\Rightarrow \hat{x} = 0 \notin \operatorname{locmin} f$.