X — линейное нормированное пространство,
$f\colon X \to \mathbb{R}$ — функционал, гладкий.
Гладкая задача без ограничений: $f(x) \to \operatorname{extr}$.

Теорема (аналог т. Ферма в нормированных пространствах)

Пусть $\hat{x} \in \operatorname{locextr} f$, $f \in D(\hat{x})$ (имеет вариацию по Лагранжу в точке $\hat{x}$). Тогда $f'(\hat{x}) = 0 \quad (\delta f(\hat{x}, h) = 0 \ \forall\ h \in X)$.

$\triangleleft$ Возьмем произвольный элемент $h \in X$, зафиксируем его.
Рассмотрим функцию одной переменной $\varphi(\lambda) = f(\hat{x} + \lambda h)$.
$\hat{x} \in \operatorname{locextr} f \Rightarrow 0 \in \operatorname{locextr} \varphi$.
По т. Ферма для функций $\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow \delta f(\hat{x}, h) = 0$.
В силу произвольности h $\ \delta f(\hat{x}, \cdot) = 0$.
Если $f \in D(\hat{x}) \Rightarrow \exists\ f'(\hat{x})[\cdot] = \delta f(\hat{x}, \cdot) = 0$ (в силу уже доказанного) $\Rightarrow f'(\hat{x}) = 0$. $\triangleright$

Теорема (необходимые и достаточные условия II порядка)

Необходимые условия экстремума: если $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$ и $f \in D^2(\hat{x})$, то $f'(\hat{x}) = 0$, $f''(\hat{x})[h,h] \geq 0 \ \forall\ h \in X$.
Достаточные условия экстремума: если $f'(\hat{x}) = 0$, $\exists\ \alpha > 0 : f''(\hat{x})[h,h] \geq \alpha \|h\|^2 \ \forall\ h \in X$, то $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$.

$\lhd$ По формуле Тейлора

$$f(\hat{x}+h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})[h] + \tfrac{1}{2} f''(\hat{x})[h,h] + r(h), \quad r(h) = o(\|h\|^2).$$

Необходимость. Пусть $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$. Тогда по аналогу т. Ферма $f'(\hat{x}) = 0$, следовательно, по формуле Тейлора

$$f(\hat{x}+\lambda h) - f(\hat{x}) = \tfrac{\lambda^2}{2} f''(\hat{x})[h,h] + r(\lambda h), \quad r(\lambda h) = o(|\lambda|^2)$$

при малых λ и фиксированном h. Поскольку $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$, то $f(\hat{x}+\lambda h) - f(\hat{x}) \geq 0$. Поэтому $\tfrac{\lambda^2}{2} f''(\hat{x})[h,h] + r(\lambda h) \geq 0$. Разделим обе части последнего неравенства на λ^2 и устремим λ к нулю. Поскольку $\frac{r(\lambda h)}{\lambda^2} \to 0$, то $f''(\hat{x})[h,h] \geq 0$.

Теорема (необходимые и достаточные условия II порядка)

Необходимые условия экстремума: если $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$ и $f \in D^2(\hat{x})$, то $f'(\hat{x}) = 0$, $f''(\hat{x})[h,h] \geq 0 \ \forall\ h \in X$.
Достаточные условия экстремума: если $f'(\hat{x}) = 0$, $\exists\ \alpha > 0 : f''(\hat{x})[h,h] \geq \alpha \|h\|^2 \ \forall\ h \in X$, то $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$.

Достаточность. Так как $f'(\hat{x}) = 0$, то по формуле Тейлора

$$f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) = \frac{1}{2} f''(\hat{x})[h,h] + r(h) \overset{f''(\hat{x})[h,h] \geq \alpha \|h\|^2}{\geq} \frac{\alpha}{2} ||h||^2 + r(h) \geq 0$$

при достаточно малых h, так как $r(h) = o(\|h\|^2)$.
Следовательно, $\hat{x} \in \operatorname{locmin} f$. $\triangleright$
Для локального максимума неравенства имеют противоположный вид: $f''(\hat{x})[h,h] \leq 0$ и $f''(\hat{x})[h,h] \leq -\alpha \|h\|^2$ $(\alpha > 0)$ соответственно.

Пример 1. В бесконечномерных пространствах условие положительной определенности отображения не гарантирует строгой положительности отображения

$f\colon l_2 \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, $\|x\|_{l_2} = \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n^2}{n}$.

$f'(x)[h] = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n h_n}{n}$; $f''(0)[h,h] = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{h_n^2}{n} > 0 \; \forall\, h \neq 0 \Rightarrow f'' > 0$ (положительно определена). Но вместе с тем f'' не является строго положительной. Действительно, неравенство $f''(0)[h,h] \geq \alpha\|h\|^2 \; \forall\; h$ не может выполняться ни для какой константы $\alpha > 0$, поскольку на $\{h^n\} = e_n$, $n = 1, 2, \dots$ (e_n — n-й базисный вектор пространства l_2),

$f''(0)[h_n, h_n] = \dfrac{2}{n} = \dfrac{2}{n}\|h_n\|^2 \ngeq \alpha\|h_n\|^2$.

Пример 2. В бесконечномерных пространствах условие $f'(\hat{x}) = 0$ и $f''(\hat{x})[h, h] > 0 \ \forall \ h \neq 0$ не гарантируют локального минимума отображения.

$$f\colon l_2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x_n^2}{n^3} - x_n^4 \right) \to \min .$$

$$f'(x)[h] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x_n h_n}{n^3} - 4x_n^3 h_n \right)$$

$\Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow \hat{x} = 0$ — стационарная точка.

$$f''(x)[h, h] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2h_n^2}{n^3} - 12x_n^2 h_n^2 \right) \Rightarrow f''(0)[h, h] = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^3} > 0$$

$\forall \ h \neq 0 \Rightarrow f''(0)$ положительно определенный оператор (но не строго положительный). На последовательности $x^n = \frac{e_n}{n}$ ($x^n \to \hat{x} = 0$ при $n \to +\infty$), $f(x^n) = \dfrac{1}{n^5} - \dfrac{1}{n^4} < 0 = f(0)$

$\Rightarrow \hat{x} = 0 \notin \operatorname{locmin} f$.