МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Галеев Э. М.

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ

(типы задач и методы их решений)

Часть 5

Геометрия

- Планиметрия
- Стереометрия

Москва 2012

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Галеев Э. М.

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ

(типы задач и методы их решений)

Часть 5

Геометрия

- **Планиметрия**
- **Стереометрия**

Издание десятое, дополненное

Москва 2012

ББК 22.1 я 729
УДК 373.3

begincenterУчебно-методическое пособие

Галеев Э.М.

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ (типы задач и методы их решений). Часть 5. Геометрия. Планиметрия. Стереометрия. Изд. 10-е, доп. Издательство “Попечительский совет механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова”. 2012. - 88 с.

В пособии предлагаются задачи по геометрии в основном со вступительных экзаменов в МГУ. Содержатся также задачи по геометрии из ЕГЭ, начиная с 2002 года. Особое внимание уделено задачам по подготовке к ЕГЭ 2012 года. Приведены основные формулы и теоремы, используемые при решении задач. К задачам даны ответы.

Предназначено для абитуриентов МГУ, выпускников школ при подготовке к ЕГЭ, для слушателей подготовительных отделений и курсов, учащихся математических классов.

Рецензент: д.ф.-м.н., Богатый С. А.

$\mathbf{Г}\dfrac{\mathbf{1702070000-08}}{\mathbf{3Ш7(03)-02}}$ **Без объявл.**

ISBN 5-87597-024-3

Оглавление

Предисловие

Пособие состоит из двух параграфов: планиметрия и стереометрия. Параграф “Планиметрия” делится на пункты: основные и дополнительные теоремы, задачи на вычисления, на нахождение максимумов и минимумов геометрических величин, использование векторов и метода координат. Задачи на вычисления разделяются на задачи на прямоугольные, равнобедренные треугольники, окружности, параллелограммы, трапеции и многоугольники.

В начале книги приводятся основные формулы.

Задачи распределены на две части. Одна часть предназначена для решения на занятии под руководством преподавателя. Другая часть — для самостоятельного решения, закрепления материала, пройденного на занятии с преподавателем. Предполагается, что читатель знаком со школьной программой и собирается углубить уже имеющиеся у него знания и научиться правильным подходам и схемам решений геометрических задач.

В основном задачи взяты со вступительных экзаменов в МГУ и ЕГЭ. Указан факультет, год, номер задачи и общее количество задач. Для выездных экзаменов указывается город, в котором эта задача давалась. Часть задач взята из различных пособий по элементарной математике или составлена автором.

Пособие предназначено для абитуриентов МГУ, выпускников школ при подготовке к ЕГЭ, учащихся математических классов и школ.

Галеев Э. М.

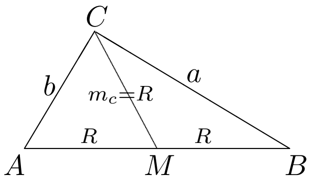
Основные формулы планиметрии

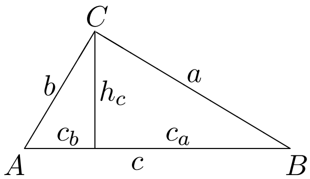
Обозначения: a, b, c — длины сторон треугольника;
α, β, γ — величины противолежащих углов;
h_a, m_a, l_a — длины высоты, медианы и биссектрисы к стороне a;
r, R — радиусы вписанной и описанной окружностей;
S — площадь; p — полупериметр.

• **Формулы для прямоугольного треугольника**

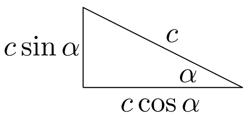
$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{(теорема Пифагора)}, \quad S = \frac{1}{2}ab, \quad r = \frac{a+b-c}{2},$$

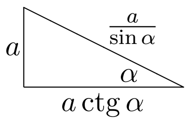
$$c = 2R, \quad h_c = \sqrt{c_a c_b}, \quad a^2 = c \cdot c_a, \quad b^2 = c \cdot c_b,$$

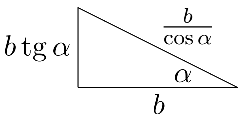




где a, b — катеты, c — гипотенуза, c_a, c_b — отрезки гипотенузы, на которые высота h_c делит гипотенузу.





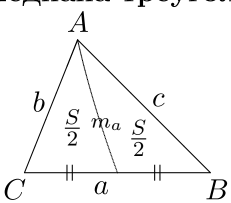


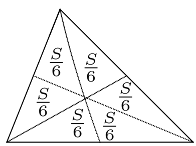
• **Формулы для произвольного треугольника**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \text{(теорема косинусов)}, \quad r = \frac{S}{p},$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \quad \text{(теорема синусов)}, \quad R = \tfrac{abc}{4S}.$$

• **Медиана треугольника**





$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}.$$

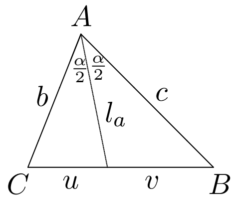
Точка пересечения медиан делит медиану в отношении два к одному, считая от вершины.Три медианы делят треугольник на 6 треугольников, равных по площади.

- **Высота треугольника**

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}.$$

- **Биссектриса треугольника**

$$\frac{u}{v} = \frac{b}{c}, \qquad l_a = \sqrt{bc - uv},$$



u, v — отрезки, прилежащие к сторонам b, c, соответственно, на которые биссектриса l_a делит противоположную сторону

- **Площадь треугольника**

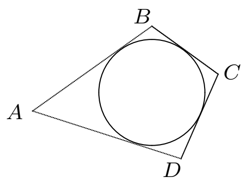
$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R} = pr,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{(формула Герона)},$$

$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ для равностороннего треугольника со стороной a.

- **Четырехугольник**

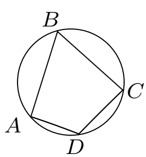
$S = \dfrac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$, где d_1, d_2 — диагонали, φ — угол между ними,



1) В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны:

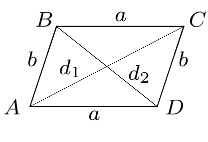
$$AB + CD = BC + AD.$$

2) $S = pr$.



Около выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна $180°$:

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°.$$



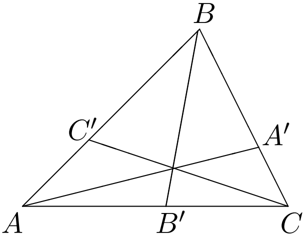
В параллелограмме сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей:

$$2a^2 + 2b^2 = d_1^2 + d_2^2.$$

- **Некоторые соотношения:**

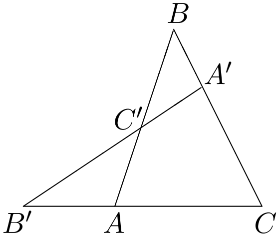
(теорема Чевы)

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$$



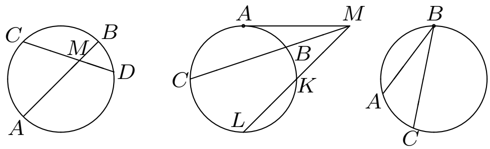
(теорема Менелая)

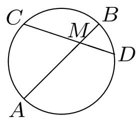
$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$$

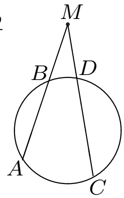


- **Окружности**

$AM^2{=}MC{\cdot}MB{=}MK{\cdot}ML$ $\qquad$ $\angle AMC{=}\frac{\smile AC+\smile BD}{2}$







$AM{\cdot}MB{=}CM{\cdot}MD$ $\qquad$ $\angle ABC{=}\frac{\smile AC}{2}$ $\qquad$ $\angle AMC{=}\frac{\smile AC-\smile BD}{2}$

длина окружности: $l=2\pi R$, **площадь круга** $S=\pi R^2$.

Формулы векторной геометрии

- **Скалярное произведение векторов**

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cos\varphi,$$

где $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$, φ — угол между векторами.

- **Длина вектора**

$$|\vec{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

- **Расстояние между точками**

$$\rho(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2},$$

где $X=(x_1,x_2,x_3)$, $Y=(y_1,y_2,y_3)$.

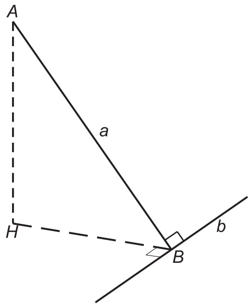
Некоторые формулы стереометрии

• Прямые и плоскости

Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая a, не лежащая в плоскости β, параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости β, то прямая a будет параллельна плоскости β.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая a, не лежащая в плоскости β, перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости β, то прямая a будет перпендикулярна плоскости β.

Теорема о трех перпендикулярах.



Прямая теорема. Прямая, перпендикулярная проекции наклонной прямой, будет перпендикулярна и самой наклонной.

Обратная теорема. Прямая, перпендикулярная наклонной прямой, будет перпендикулярна и проекции этой наклонной.

Пусть $\triangle ABC$ является проекцией $\triangle A'B'C'$. Тогда косинус угла между плоскостями $\cos\varphi = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}$.

• Пирамида, конус, цилиндр, сфера, шар

$V = \frac{1}{3}S_{\text{основания}} \cdot h = \frac{1}{3}S_{полн} \cdot r$ — объем пирамиды с высотой h, $S_{полн}$ — площадь полной поверхности, r — радиус вписанного в пирамиду шара.

$V = \frac{1}{3}S_{\text{основания}} \cdot h = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ — объем конуса с высотой h,

$S_{\text{бок}} = \pi R l$ — площадь боковой поверхности конуса с радиусом основания R и образующей l,

$V = \pi R^2 h$ — объем цилиндра с высотой h,

$S = 4\pi R^2$ — площадь сферы радиуса R,

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ — объем шара радиуса R.

22 Планиметрия

22.1 Теоремы планиметрии

22.1.1 Основные теоремы планиметрии

22.1. Доказать, что три биссектрисы в треугольнике пересекаются в одной точке.

22.2. Доказать, что три серединных перпендикуляра[1] в треугольнике пересекаются в одной точке.

22.3. Доказать, что три высоты в треугольнике пересекаются в одной точке.

22.4. Доказать, что три медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и точка пересечения делит медиану в отношении два к одному, считая от вершины.

22.5. Три медианы делят треугольник на 6 треугольников. Доказать, что площади всех полученных шести треугольников равны.

22.6. Найти отношение площадей треугольника и треугольника, составленного из его медиан.

22.7. Доказать, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные длинам сторон треугольника.

22.8. Сформулировать и доказать утверждение, аналогичное задачи №22.7, для биссектрисы внешнего угла треугольника.

22.9. Две окружности с центрами O', O'' касаются внешним образом в точке A. Через точку A проведена общая касательная. Она пересекается с другой общей касательной в точке C. Доказать, что $\angle O'CO'' = \frac{\pi}{2}$.

22.10. Две окружности с центрами O', O'' касаются внешним образом в точке A, а в точках B и C окружности касаются с другой общей касательной. Доказать, что $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$.

[1]Напомним, что *серединным перпендикуляром* к стороне треугольника называется перпендикуляр к этой стороне, проходящий через ее середину.

Домашнее задание

22.11. Доказать, что вписанный в окружность угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рассмотреть случаи: а) центр окружности лежит на стороне угла; b) центр окружности лежит между сторон угла; с) центр окружности лежит вне угла).

22.12. Через точку, лежащую внутри круга, проведены две хорды. Доказать, что угол между хордами измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами.

22.13. Через точку, лежащую вне круга, проведены к окружности две секущие. Доказать, что угол между секущими измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами.

22.14. Доказать, что угол между касательной к окружности и хордой, проведенной в точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной между его сторонами.

22.15. Через точку, лежащую внутри круга, проведены две хорды. Доказать, что произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

22.16. Через точку, лежащую вне круга, проведены касательная и секущая. Доказать, что квадрат касательной равен произведению всей секущей на ее внешнюю часть.

22.17. (*теорема Пифагора*) В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

22.18. Доказать, что высота, опущенная из вершины прямого угла в прямоугольном треугольнике есть среднее геометрическое между отрезками, на которые она делит гипотенузу: $h_c = \sqrt{c_a c_b}$.

22.19. (*теорема синусов*) Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

22.20. (*обобщенная теорема синусов*)

Отношение длины стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно удвоенному радиусу описанной окружности.

22.21. (*теорема косинусов*)
Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

22.22. Доказать, что радиус вписанной в треугольник[2] окружности выражается через площадь треугольника S и его полупериметр p по формуле $r = \frac{S}{p}$.

22.23. Доказать, что около выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов равна 180°.

22.24. Доказать, что в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны.

22.1.2 Дополнительные теоремы планиметрии

22.25. Доказать, что длина медианы в треугольнике выражается по формуле: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

22.26. Доказать, что длина высоты в треугольнике выражается по формуле:
$$h_a = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}.$$

22.27. В треугольнике известны длины двух сторон b, c и угол α между ними. Доказать, что биссектриса угла α выражается по формуле: $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$.

22.28.* Доказать, что квадрат биссектрисы в треугольнике равен произведению сторон, между которыми она заключена, минус произведение отрезков, на которые она делит противоположную сторону: $l_a^2 = bc - uv$.

22.29. Доказать, что серединный перпендикуляр к стороне треугольника и биссектриса противолежащего угла пересекаются в точке, лежащей на описанной вокруг треугольника окружности.

[2]Теорема верна и для выпуклого многоугольника.

22.30. Доказать, что точка пересечения серединного перпендикуляра к стороне треугольника и биссектрисы противолежащего угла равноудалена от концов этой стороны и центра вписанной в треугольник окружности.

22.31. Доказать, что расстояние между центрами окружностей вписанной и вневписанной[3] в треугольник делится пополам окружностью, описанной около треугольника.

22.32. Доказать, что радиус вневписанной к треугольнику окружности, касающейся стороны a, выражается через площадь треугольника S и его полупериметр p по формуле $r_a = \frac{S}{p-a}$.

22.33. Доказать, что расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до стороны, противоположной выбранной вершине.

22.34. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA', BB', CC'. Обозначим точку пересечения высот через H. Доказать, что $AH \cdot HA' = BH \cdot HB' = CH \cdot HC'$.

22.35. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA', BB', CC'. Доказать, что высоты треугольника ABC являются биссектрисами треугольника $A'B'C'$.

22.36. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA', BB', CC'. Доказать, что треугольники $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ подобны треугольнику ABC с коэффициентами подобия $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$, соответственно.

22.37. Доказать, что для углов остроугольного треугольника ABC выполнено неравенство $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1$; прямоугольного $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$ и тупоугольного $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C > 1$.

22.38.* (*теорема Птолемея*)

Доказать, что во вписанном четырёхугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

---

[3] *Вневписанной окружностью* называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других.

Домашнее задание

22.39. Доказать, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c, равен $r = \frac{a+b-c}{2}$.

22.40. Доказать, что если в треугольнике выполнено неравенство $a^2 + b^2 > c^2$, то угол C острый; если $a^2 + b^2 = c^2$, то угол C прямой; если $a^2 + b^2 < c^2$, то угол C тупой.

22.41. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$.

22.42. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей, причем площади треугольников AEB и CED равны. Доказать, что тогда $AD \| BC$.

22.43. Доказать, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей.

22.44. (*теорема Вариньона*) Доказать, что четырехугольник, вершины которого являются серединами сторон выпуклого четырехугольника, является параллелограммом.

22.45. Доказать, что в параллелограмме сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей.

22.46. (*формула Герона*)Доказать, что площадь треугольника выражается по формуле:
$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{4} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

22.47. В треугольнике длины медиан равны m_a, m_b и m_c. Доказать, что длина стороны a выражается по формуле: $a = \dfrac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$.

22.48. Доказать, что длина биссектрисы угла в треугольнике выражается по формуле: $l_a = \dfrac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$.

22.49. В треугольнике длины сторон a, b, c и радиус описанной окружности R. Доказать, что площадь треугольника выражается по формуле: $S = \dfrac{abc}{4R}$.

22.50. Пусть r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных к треугольнику окружностей, касающихся соответственно сторон a, b, c; r — радиус вписанной окружности. Доказать, что $\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}=\dfrac{1}{r}$, $S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$.

22.51. (Теорема Чевы.)[4] Пусть точки A', B', C' лежат на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC. Отрезки AA', BB', CC' пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\dfrac{AC'}{C'B} \cdot \dfrac{BA'}{A'C} \cdot \dfrac{CB'}{B'A} = 1$.

22.52.*(*теорема Менелая*) На стороне AB треугольника ABC взята точка C_1, на стороне BC — точка A_1, на продолжении стороны AC — точка B_1. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\dfrac{AC_1}{C_1B} \cdot \dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} = 1$.

22.2 Задачи на вычисление

22.2.1 Прямоугольные треугольники

22.53. (МГУ, геологический, 1999, 4(8))

Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Угол между AM и высотой AH равен 40°. Найдите углы треугольника ABC.

22.54. (ЕГЭ, 2002, В8)

Около окружности с центром O описан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Луч AO пересекает катет BC в точке L. Найдите длину отрезка CL, если точка касания с окружностью делит катет BC на отрезки $CH = 4$ и $BH = 12$.

---

[4]Из теоремы Чевы легко выводятся следствия: 1) три медианы в треугольнике пересекаются в одной точке; 2) три биссектрисы в треугольнике пересекаются в одной точке; 3) три отрезка, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности и противолежащих сторон, пересекаются в одной точке.

22.55. (ЕГЭ, 2002, B8)

В треугольнике ABC $\angle B = 90^\circ$, медиана BM равна $10\sqrt{3}$. Окружность, вписанная в треугольник ABM, касается гипотенузы AC в точке T. Найдите катет BC, если $AT : TC = 1 : 3$.

22.56. (ЕГЭ, 2002, B8 – *демоверсия*)

Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиусы вписанной в него и описанной около него окружностей равны соответственно 2 м и 5 м.

22.57. (МГУ, геологический, 2005, 3(8))

В треугольнике ABC угол C прямой, тангенс угла A равен $\frac{1}{4}$, медиана BD равна $\sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника ABD и радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABD.

22.58. (МГУ, "Ломоносов-2011", заочный тур, 6(10))

Высота прямоугольного треугольника, опущенная на его гипотенузу, делит биссектрису острого угла в отношении $5 : 2$, считая от вершины. Найти величину этого угла.

22.59. (МГУ, географический, 1994, 4(5))

Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение высоты CH треугольника ABC пересекает прямую DF в точке K. Найти длину отрезка HK, если длины катетов равны 2 и 3.

22.60. (МГУ, химический, физико-химический, ФНМ, биолог., ФФМ, ФБиБ, географический, психологический, 2007, 3(8))

В прямоугольном треугольнике DEF на гипотенузу опущены медиана DM и высота DQ. Известно, что $MD = \frac{\sqrt{17}}{2}$ и $\sin \angle DMQ = \frac{8}{17}$. Найти катеты треугольника DEF.

22.61. (МГУ, химический, 1995, 4(5))

В прямоугольном треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на катетах BC и AC так, что $CD = CE = 1$. Точка O является точкой пересечения отрезков AD и BE. Площадь треугольника BOD больше площади треугольника AOE на $\frac{1}{2}$. Кроме того, известно, что $AD = \sqrt{10}$. Найти длину гипотенузы AB.

Домашнее задание

22.62. (ЕГЭ, 2002, B8)

Окружность с центром O вписана в прямоугольный треугольник ABC. Она касается гипотенузы AB в точке M, причем $AM = 12$ и $BM = 8$. Найдите площадь треугольника AOB.

22.63. (ЕГЭ, 2002, B8)

В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC, равной 20, проведена медиана BM. Окружность, вписанная в треугольник ABM, касается медианы BM в точке P. Найдите катет BC, если $BP : PM = 3 : 2$.

22.64. Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность, радиус которой равен 4. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности, если известно, что $OO_1 = 2$, где O и O_1 — центры вписанной и описанной окружностей.

22.65. (МГУ, социологический, 2008, 3(7))

Один из острых углов прямоугольного треугольника равен $80°$. Найти угол между высотой и медианой, проведенными к гипотенузе.

22.66. В прямоугольном треугольнике угол между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины прямого угла равен $10°$. Найти острые углы треугольника.

22.67. Одна из сторон треугольника равна a и вдвое больше своей медианы. А угол этой медианы с другой стороной равен $30°$. Найти площадь треугольника.

22.68. (МГУ, ВМиК, 2007, устный)

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B проведена высота BD. Известно, что периметры треугольников ADB и BDC равны соответственно P_1 и P_2. Найдите периметр треугольника ABC.

22.69. В прямоугольном треугольнике ABC угол A прямой, величина угла B равна 30°, а радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найти расстояние от вершины C до точки касания вписанной окружности и катета AB.

22.70. Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, равна h, разность между проекциями катетов на гипотенузу также равна h. Найти гипотенузу треугольника.

22.71. Найти острые углы в прямоугольном треугольнике, в котором отношение гипотенузы к высоте, опущенной из вершины прямого угла, равно $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

22.72. Вычислить длины сторон прямоугольного треугольника, если известно, что его периметр равен 12, а радиус вписанного в него круга равен 1.

22.73. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Радиус описанной около прямоугольника $ABCD$ окружности равен R, а радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен r. Найдите периметр прямоугольника.

22.74. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Треугольник ABC биссектрисой BD (точка D лежит на отрезке AC) делится на два треугольника: равнобедренный треугольник ABD и прямоугольный треугольник BCD. Известно, что длина BD равна 1. Найдите площадь треугольника ABC.

22.75. Основание треугольника равно 10, а медианы двух других сторон равны 9 и 12 соответственно. Найти площадь треугольника.

22.76. (МГУ, филологический, 1990, 3(5))

В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена медиана CM и высота CH. Найти отношение $AH : AM$, если $CM : CH = 5 : 4$ и точка H находится между точками A и M.

22.77. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, периметр которого равен $2p$, а высота, опущенная на гипотенузу, равна h.

22.78. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника, площади которых равны соответственно 6 и 54. Найти гипотенузу треугольника.

22.79. Длины медиан прямоугольного треугольника, проведенных к катетам, относятся как $m : n$. Найти углы треугольника.

22.80. (МГУ, факультет Гос. управления, 2006, 3(7))
В прямой угол равнобедренного треугольника с гипотенузой $6\sqrt{2}$ вписан круг радиуса 2. Найдите площадь той части круга, которая лежит вне этого треугольника.

22.81. (МГУ, химический, 1974, 3(5))
В прямоугольном треугольнике ABC с катетами 3 и 4 вершина C прямого угла соединена с серединой D гипотенузы AB. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD.

22.82. В треугольнике ABC задана точка M на стороне AC, соединенная с вершиной B отрезком MB. Известно, что $AM = 6$, $MC = 2$, $\angle ABM = 60°$, $\angle MBC = 30°$. Найти площадь треугольника ABC.

22.83. Определить острые углы прямоугольного треугольника, если отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно $\sqrt{3} + 1$.

22.84. (МГУ, ВМиК, 1973, 3(5))
В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена биссектриса CL и медиана CM. Найти площадь треугольника ABC, если $LM = a$, $CM = b$.

22.85. (МГУ, почвоведения, 2002, 6(7))
Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, а один из острых углов равен α. В треугольник помещены две окружности одинакового радиуса, каждая из которых касается одного из катетов, гипотенузы и другой окружности. Найти радиусы окружностей.

22.86. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин его острых углов равны $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$. Найти катеты.

22.2.2 Равнобедренные треугольники

22.87. (ЕГЭ, 2002, B8)
В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания со вписанной окружностью в отношении $8 : 5$, считая от вершины, лежащей против основания. Найдите основание треугольника, если радиус вписанной окружности равен 10.

22.88. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно b, $BA = BC = a$. Отрезки AK и CM — биссектрисы этого треугольника. Найти MK.

22.89. В равнобедренном треугольнике основание равно 30. Высота, опущенная на основание, равна 20. На какие части площадь треугольника делится высотой, опущенной на боковую сторону?

22.90. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2008”, 5(10))
Найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 6, если синус одного его угла равен косинусу другого.

22.91. (МГУ, почвоведения, глобальных процессов, 2007, 8(8))
Периметр равнобедренного треугольника ABC равен 18. Через середину D основания AB проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке K и делящая площадь треугольника ABC в отношении $5 : 2$, при этом угол ADK равен 135°. Найти площадь треугольника ABC.

22.92. Вычислить $\sin 18°$, исходя из геометрических соображений.

Домашнее задание

22.93. Основание равнобедренного треугольника равно $\sqrt{10}$, медиана боковой стороны равна 3. Найти длины его боковых сторон.

22.94. (ЕГЭ, 2002, B8)
Окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, касается стороны BC в точке K, причем $CK : BK = 5 : 8$. Найдите площадь треугольника, если его периметр равен 72.

22.95. Боковая сторона равнобедренного треугольника ABC равна 15, а его площадь равна 67,5. К основанию AC и стороне BC проведены высоты BE и AH, пересекающиеся в точке O. Найдите площадь треугольника BOH.

22.96. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высоты BE и CH пересекаются в точке K, причем $BH = 6$, $KH = 3$. Найдите площадь треугольника CBK.

22.97. Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 90, а боковая сторона равна $10\sqrt{3}$. К основанию AB и стороне BC проведены высоты CP и AH, пересекающиеся в точке K. Найдите площадь треугольника CKH.

22.98. Медианы равнобедренного треугольника равны соответственно 5, 5 и 6. Найти площадь треугольника.

22.99. Найти площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника, если основание этого треугольника 24, боковая сторона 13.

22.100. (МГУ, физический, 1994, 4(8))
В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и боковую сторону, равны соответственно m и n. Найти стороны треугольника.

22.101. (МГУ, филологический, 2003, 3(5))
В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медианы AM и CN пересекаются в точке D под прямым углом. Найти все углы треугольника ABC и площадь четырехугольника $NBMD$, если основание $AC = 1$.

22.102. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. В каком отношении делит площадь данного треугольника прямая, делящая его основание в отношении $2 : 1$ и составляющая острый угол β с меньшей частью основания?

22.103. (МГУ, химический, 2001, 2(7))
В равнобедренном треугольнике с основанием AC проведена биссектриса угла C, которая пересекает боковую сторону AB в точке D. Точка E лежит на основании AC так, что $DE \perp DC$. Найти длину AD, если $CE = 2$.

22.104. (МГУ, биолого-почвенный, 1971, 5(5))
Правильный треугольник ABC со стороной, равной 3, вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причем длина хорды AD равна $\sqrt{3}$. Найти длины хорд BD и CD.

22.2.3 Треугольники

Медианы

22.105. (ЕГЭ, 2003, B10 – *демоверсия*)
Площадь треугольника ABC равна $20\sqrt{3}$. Найдите AC, если сторона AB равна 8 и она больше половины стороны AC, а медиана BM равна 5.

22.106. (ЕГЭ, 2005, B11 – *демоверсия*)
В треугольнике ABC проведена медиана AM. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 10$, $\angle MAC = 45°$.

22.107. (МГУ, экономический, 1985, 3(5))
В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и Q так, что $AP < AQ$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $PQ = 3$. Найти AC.

22.108. (МГУ, "Ломоносов-2011", заочный тур, 8(10))
Даны три точки, расстояния между которыми равны 4, 6 и 7. Сколько существует попарно не равных друг другу треугольников, для которых каждая из этих точек — либо вершина, либо середина стороны?

22.109. (МГУ, ВМиК, 1995, 3(6))
В треугольнике ABC медианы AM и CL перпендикулярны, $BC = a$, $AC = b$. Найти площадь треугольника ABM.

Домашнее задание

22.110. (МГУ, социологический, 2002, 3(6))
Определить угол A треугольника между сторонами 2 и 4, если медиана, выходящая из вершины A, равна $\sqrt{7}$.

22.111. В треугольнике ABC $AB = 8$, $BC = 4$, $AC = 6$. Найти: площадь треугольника, радиус вписанной и радиус описанной окружности, высоту, медиану и биссектрису, проведенные из вершины B.

22.112. (МГУ, филологический, 1999, 3(5))
В треугольнике ABC медиана AK пересекает медиану BD в точке L. Найти площадь треугольника ABC, если площадь четырехугольника $KCDL$ равна 5.

22.113. В треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна медиане BN. Найти площадь треугольника ABC, если длина AM равна m, а длина BN равна n.

22.114. (МГУ, социологический, 2002, 3(6))
Определить угол A треугольника между сторонами 2 и 4, если медиана, выходящая из вершины A, равна $\sqrt{3}$.

22.115. Найти площадь треугольника ABC, если $AB = 3$, $BC = 7$ и длина медианы BM равна 4.

22.116. (МГУ, геологический, май 1994, 7(8))

У треугольника известны длины двух сторон $a = 2$, $b = 3$ и площадь $S = 3\sqrt{15}/4$. Медиана, проведенная к его третьей стороне, меньше ее половины. Найти радиус описанной около этого треугольника окружности.

22.117. (МГУ, 2011, 5(8))

Медианы AL и BM треугольника ABC пересекаются в точке K. Найти длину отрезка CK, если $AB = \sqrt{3}$ и известно, что вокруг четырехугольника $KLCM$ можно описать окружность.

22.118. (МГУ, ИСАА, 2007, 5(7))

В треугольнике ABC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Известно, что $AB = 3$, $AC = \sqrt{5}$, длина медианы, проведенной из вершины A к стороне BC, равна $\sqrt{6}$, и длины отрезков AP, PQ, QC равны между собой. Найдите длину отрезка PQ.

22.119. (МГУ, экономический, 1983, 4(6))
В треугольнике ABC медианы AE и BD, проведенные к сторонам BC и AC, пересекаются под прямым углом. Длина стороны BC равна a. Найти длины других сторон треугольника ABC, если $AE^2 + BD^2 = d^2$.

22.120. (МГУ, геологический, 1997, 4(8))

В треугольнике ABC угол B прямой, $AB = 5$, $BC = 4$. Точка D лежит на стороне AC, M — точка пересечения медиан треугольника ABD, а N — точка пересечения медиан треугольника DBC. Найти площадь треугольника BMN.

Биссектрисы

22.121. (МГУ, ИСАА, 2006, 4(7))

В треугольнике ABC проведены медиана AE и биссектриса CD, пересекающиеся в точке M. Через точку M проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника PBQ, если длина стороны AC равна $3\sqrt{3}$, длина стороны BC равна $4\sqrt{3}$, величина угла ACB равна $\frac{\pi}{3}$.

22.122. (МГУ, филологический, 2005, 6(7))
Биссектриса CD угла ACB при основании BC равнобедренного треугольника ABC делит сторону AB так, что $AD = BC$. Найти длину биссектрисы CD и площадь треугольника ABC, если $BC = 2$.

22.123. (МГУ, мех-мат, 1969, 2(4))
В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE, пересекающиеся в точке O. Известно, что отрезок OE имеет длину 1, а вершина C лежит на окружности, проходящей через точки E, D, O. Найти стороны и углы треугольника EDO.

22.124. (МГУ, геологический, МШЭ, 2008, 5(8))
В треугольнике ABC длина биссектрисы AD равна 6, отношение длин отрезков BD и DC равно $3 : 4$, периметр треугольника ABC равен 21. Чему равен косинус угла BAC?

22.125. (МГУ, географический, 1999, май, 4(6))
В треугольнике ABC биссектриса AD угла A и биссектриса BL угла B пересекаются в точке F. Величина угла BCA равна 60°. 1) Найти величину угла AFB. 2) Вычислить длину стороны AB, если угол CDL равен 75° и площадь треугольника ABC равна $9\sqrt{3}$.

22.126. (МГУ, ВМиК, Олимпиада "Абитуриент-2007", 4(6))
В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC, $\angle C = 90^\circ$, проведены медиана BN и биссектриса AM, которые пересекаются в точке K. Известно, что $KM = 2$. Найти AM.

22.127. (МГУ, мех-мат, март 2003, 3(6))
На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята такая точка D, что $AD = 10$ и $\angle BDC = \angle BAL = 60^\circ$. Найти площадь треугольника ABC. Какова наименьшая площадь треугольника BDC при данных условиях?

Домашнее задание

22.128. (ЕГЭ, 2002, B8)

В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Луч AO пересекает сторону BC в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 13$, $AC = 15$, $BK = 6{,}5$.

22.129. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 3 и 6. Найти длину биссектрисы прямого угла.

22.130. Биссектриса прямого угла в прямоугольном треугольнике отсекает на гипотенузе отрезки 2 и 3. Найти длину этой биссектрисы.

22.131. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Известно, что $BD = 4$, $CD = 6$. Найти площадь треугольника ADC.

22.132. (МГУ, ИСАА, 1992, 4(6))

Дан треугольник со сторонами 4, 8, 9. Найти длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.

22.133. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD, при этом величины углов ADC и CDB относятся как $7 : 5$. Найти длину AD, если известно, что $BC = 1$, а угол BAC равен $\frac{\pi}{6}$.

22.134. Дан треугольник ABC, в котором $AB = 6$, $BC = 7$, $AC = 5$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D. Найти площадь треугольника ADC.

22.135. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

В треугольнике ABC угол A в два раза больше угла B, $AB = 4$, $BC = 5$. Найдите сторону AC.

22.136. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BD угла ABC и AE угла BAC. Найти отношение площадей треугольников ABC и CDE, если известно, что $BC = 4$, $AC = 3$, $AB = 6$.

22.137. (МГУ, филологический, 2000, 2(6))

Через центр окружности, вписанной в треугольник ABC, провели прямую MN параллельно основанию AB (M лежит на BC, N лежит на AC). Найти периметр четырехугольника $ABMN$, если известно, что $AB = 5$, $MN = 3$.

22.138. В треугольнике ABC сторона AC равна b, сторона AB равна c, а биссектриса внутреннего угла A пересекается со стороной BC в точке D такой, что $DA = DB$. Найти длину стороны BC.

22.139. (МГУ, ВМиК, 1994, 4(6))

В треугольнике ABC длина стороны AB равна 21, длина биссектрисы BD равна $8\sqrt{7}$, а длина отрезка DC равна 8. Найти периметр треугольника ABC.

22.140. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2006, 5(8))

В треугольнике ABC со сторонами $AB = 6$ и $BC = 4$ проведена биссектриса BL, точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, $BO : OL = 3 : 1$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABL.

22.141. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 40$ и $BC = 35$. Кроме того, угол BAC равен $60°$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABD, где BD — биссектриса угла ABC.

22.142. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BL и AE, которые пересекаются в точке O. Известно, что $AB = BL$, периметр треугольника равен 28, $BO = 2OL$. Найти AB.

22.143. (МГУ, почвоведения, 1997, 5(6))

В треугольнике ABC угол C равен $60°$, а биссектриса угла C равна $5\sqrt{3}$. Длины сторон AC и BC относятся как $5 : 2$ соответственно. Найти тангенс угла A и сторону BC.

22.144. (МГУ, почвоведения, 1996, 5(6))
В треугольнике ABC $AB = 3$, $AC = 3\sqrt{7}$, $\angle ABC = 60^\circ$. Биссектриса угла ABC продолжена до пересечения в точке D с окружностью, описанной вокруг треугольника. Найдите длину BD.

22.145. В треугольнике ABC биссектриса угла A продолжена до пересечения в точке D с описанной около треугольника окружностью. Найти длину стороны BC, если $AB = 75$, $AC = 48$, $AD = 100$.

22.146. В треугольнике известны длина одной стороны a и два прилежащих к ней угла B и C. Найти длину биссектрис: а) угла B; б) угла A.

22.147. В треугольнике ABC даны угол C, равный γ, и отношение стороны BC к стороне AC, равное 3. Из вершины C проведены два луча, делящие угол C на три равные части. Найти отношение отрезков этих лучей, заключенных внутри треугольника ABC.

22.148. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)
В треугольнике ABC проведены BK — медиана, BE — биссектриса, AD — высота. Найдите длину AC, если известно, что прямые BK и BE делят отрезок AD на три равные части и $AB = 4$.

Высоты

22.149. (МГУ, мех-мат, 1978, 3(5))
В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AA' и CC' на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника $BA'C'$ равна 2, а длина отрезка $A'C'$ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

22.150. (МГУ, экономический, 1993, 6(6))
Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 8, 15 и 17. Найти площадь треугольника.

Домашнее задание

22.151. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол ACB.

22.152. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O — центр описанной окружности. Известно, что $BC = 2$, $MN = 1$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

22.153. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O — центр вписанной окружности. Известно, что $BC = 2$, $MN = 1$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

22.154. Точки A_1, B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны $90°$, $60°$ и $30°$. Найдите углы треугольника ABC.

22.155. (МГУ, хим, географ, биолог, психолог, ФББ, ФФМ, ФНМ, физико-химический, 2008, 4(7))

Около треугольника ABC с высотами BB' и CC' описана окружность радиуса 6. Найдите радиусы окружностей, описанных около треугольников $BB'C$ и $AB'C'$, если $\cos A = -\frac{1}{3}$.

22.156. (МГУ, ВМиК, 1981, 3(6))

В треугольнике ABC величина угла A равна $\frac{\pi}{3}$, длина высоты, опущенной из вершины C на сторону AB равна $\sqrt{3}$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 5. Найти длины сторон треугольника ABC.

22.157. В треугольнике ABC проведены высоты $AA_1 = 2$, $CC_1 = 4$, BL — биссектриса треугольника, $AL = \frac{5}{3}$. Найти длину LC и площадь треугольника ABC.

22.158. (МГУ, химический, 1997, 5(6))

Середины высот треугольника ABC лежат на одной прямой. Наибольшая сторона треугольника $AB = 10$. Какое максимальное значение может принимать площадь треугольника ABC?

Площади

22.159. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2010”, 2(10))
На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка E, а на боковых сторонах AB и BC точки D и F соответственно так, что $DE \| BC$ и $EF \| AB$. Какую часть площади треугольника ABC занимает площадь треугольника DEF, если $BF : EF = 2 : 3$?

22.160. Найти площадь треугольника со сторонами: а) 5, 9, 12; б) 1, 2, 5; в) $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{13}$.

22.161. (МГУ, ВМиК, Олимпиада “Абитуриент-2005”, 4(6))
На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке L. Площади треугольников AML, CNL и ALC равны соответственно 1, 6 и 4. Найдите площадь треугольника MBN.

22.162. (МГУ, мех-мат, тест, 2003, 6(10))
На стороне AC треугольника ABC взята такая точка K, что $AK : KC = 1 : 2$, а на отрезках BK, BC и KC — такие точки L, M и N соответственно, что $LM \| AB$, $LN \| BC$ и $MN \| BK$. Найти отношение площадей треугольников LMN и ABC.

22.163. (МГУ, биологический, 1985, 4(5))
На гипотенузе LM прямоугольного треугольника LKM лежит точка N. На прямой LM взята точка P так, что точка M находится между точками N и P, а угол NKP прямой. Найти площадь треугольника NKM, если известно, что площади треугольников LKM и NKP равны a и b соответственно, а величина угла LKP равна φ.

22.164. (МГУ, экономический (отд. менеджмента), 2008, 5(6))
На биссектрисе CL треугольника ABC как на диаметре построена окружность с центром в точке O, пересекающая сторону BC в точке P, а сторону AC — в точке Q, причем $\dfrac{PB}{QA} = \dfrac{BL}{AL}$. Найти площадь той части треугольника ABC, которая лежит вне данной окружности, если известно, что $\angle CBL = \angle QLA + \angle ACL$, $CP = 3$.

22.165. (МГУ, ВМиК, 2008, 4(6))

На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки E и D соответственно так, что $\angle BAD = 4 \cdot \angle DAC$, $\angle BCE = 4 \cdot \angle ECA$. Известно, что $AB \cdot CE = BC \cdot AD$, $AB = 2$, радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. Найти площадь треугольника ABC.

Домашнее задание

22.166. (МГУ, геологический, 2007, устный)

В треугольнике длина каждой из сторон не превосходит 2. Докажите, что площадь треугольника не превосходит $\sqrt{3}$.

22.167. (МГУ, социологический, филологический, 2007, 6(8))

Периметр треугольника ABC равен 36, а площадь равна 60. Найти стороны AB и AC, если $BC = 10$.

22.168. В треугольнике ABC длина стороны AC равна 5, сумма длин двух других сторон равна 7, косинус угла BAC равен $4/5$. Найти площадь треугольника ABC.

22.169. В треугольнике ABC угол C равен 30°, BH — высота, BM — медиана. Найти площадь треугольника ABC, если $AH = 1$, $AM = 2$.

22.170. (МГУ, биологический, 2000, 3(5))

Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 6$, $AC = 4$, $BC = 8$. Точка D лежит на стороне AB, а точка E — на стороне AC, причём $AD = 2$, $AE = 3$. Найти площадь треугольника ADE.

22.171. (МГУ, физический, 1997, 4(8))

Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает сторону BC в точке M, а сторону AC — в точке N. Площадь треугольника MCN в два раза больше площади трапеции $ABMN$. Найдите $CM : MB$.

22.172. (МГУ, почвоведения, 2001, 4(6))
В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны, основание AC равно 2, а угол при основании равен $30°$. Из вершины A проведены биссектриса AE и медиана AD. Найти площадь треугольника ADE.

22.173. (МГУ, геологический, 1978, 4(5))
В треугольнике ABC длина стороны AC равна 3, угол $BAC = \frac{\pi}{6}$ и радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 2. Доказать, что площадь треугольника ABC меньше 3.

22.174. (МГУ, геологический, 1978, 4(5))
В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $AK : BK = 1 : 2$, а на стороне BC взята точка L так, что $CL : BL = 2 : 1$. Пусть Q — точка пересечения прямых AL и CK. Найти площадь треугольника ABC, если дано, что площадь треугольника BQC равна 1.

22.175. (МГУ, географический, май 2002, 3(6))
В треугольнике ABC точки E и F являются серединами сторон AB и BC соответственно. Точка G лежит на отрезке EF так, что $EG : AE = 1 : 2$ и $FG = BE$. Найти:
а) отношение площадей треугольников ABG и AGC;
б) $\angle GCA$, если $\angle AGC = 90°$.

22.176. (МГУ, экономический, 2008, 4(7))
На биссектрисе BL треугольника ABC как на диаметре построена окружность с центром в точке O, пересекающая сторону AB в точке D, а сторону BC — в точке E, причем $AD \cdot LC = EC \cdot AL$. Найти площадь той части треугольника ABC, которая лежит вне данной окружности, если известно, что $\angle BAL = 2\angle BEO$, $DE = \sqrt{3}$.

22.177. (МГУ, ВМиК, отделения бакалавров, 2008, 4(6))
На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки E и D так, что $\angle BAD = 2 \cdot \angle DAC$, $\angle BCE = 2 \cdot \angle ECA$.

Известно, что $AB \cdot CE = BC \cdot AD$, $AB = \sqrt{2}$, радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\sqrt{3}-1$. Найти площадь треугольника ABC.

Углы

22.178. В треугольнике известны длины двух сторон a и b и угол между ними C. Найти тангенс угла A.

22.179. Длины двух сторон треугольника равны 1 и 2, а синус угла между ними равен $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Найти длину третьей стороны и величины двух других углов.

22.180. В треугольнике ABC заданы стороны $BC = a$, $AC = b$ $(a > b)$. Радиус описанной вокруг треугольника окружности равен R. Найти длину стороны AB.

22.181. Продолжение биссектрисы угла A треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке E. Вписанная окружность касается стороны AC в точке F. Найти площадь треугольника, если $CE = 4\sqrt{13}$, $AF = 6$, а радиус описанной окружности равен 13.

22.182. (МГУ, географический, 1996, 4(5))
Углы треугольника ABC удовлетворяют равенству $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$. Найти площадь этого треугольника, если известны радиусы вписанной $r = \sqrt{3}$ и описанной $R = 3\sqrt{2}$ окружностей.

22.183.* (МГУ, экономический, 1984, 4(6))
В треугольнике ABC заданы длины двух сторон: $BC = 4$, $AB = 2\sqrt{19}$. Кроме того, известно, что центр окружности, проведенной через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C. Найти AC.

Домашнее задание

22.184. Длины сторон треугольника равны 5, 12 и 13. Найти углы треугольника.

22.185. Существует ли треугольник с углами $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$?

22.186. Длины двух сторон треугольника равны 1 и 2, а угол между ними равен $\frac{\pi}{3}$. Найти длину третьей стороны и величины двух других углов.

22.187. (МГУ, мех-мат, тест, 2003, 2(10))

Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает биссектрису внешнего угла C этого треугольника в точке D. Найти угол ABC, если $\angle ADC = 15^\circ$.

22.188. (МГУ, физический, 1989, 2(6))

В треугольнике известна длина c одной из сторон и величины α и β прилегающих к ней углов. Найти площадь треугольника.

22.189. (МГУ, ИСАА, 2000, 2(7))

Тупой угол со сторонами 3 и 6 вписан в окружность радиуса $\sqrt{21}$. Определить величину дуги, на которую он опирается.

22.190. Синусы двух острых углов треугольника равны $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{13}$. Радиус описанной окружности равен 32,5. Найти стороны и площадь треугольника.

22.191. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C, углом B равным 30° и катетом $CA = 1$ проведена медиана CD. Кроме того из точки D под углом 15° к гипотенузе проведена прямая, пересекающая отрезок BC в точке F. Найти площадь треугольника CDF.

22.192. В треугольнике ABC $AB = 4$, $AC = 5$, радиус окружности, описанной около треугольника, равен $\sqrt{7}$. Найти площадь треугольника ABC.

22.193. В остроугольном треугольнике ABC $(AB = BC)$ AM — медиана, AK — высота, $CM = 5$, $MK = 2{,}2$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

22.194. (МГУ, географический, май 2003, 2(6))

В треугольнике ABC проведены медиана BM и биссектриса BK. Известно, что $\angle ABM = \dfrac{\pi}{4}$, $\angle CBM = \dfrac{\pi}{6}$, $AK = 6$. Найти KM.

22.195. (МГУ, филологический, 1998, 2(6))

Длина стороны BC треугольника ABC равна 12. Около треугольника описана окружность радиуса 10. Найти длины сторон AB и AC треугольника, если известно, что радиус OA окружности делит сторону BC на два равных отрезка.

22.196. (МГУ, филологический, 2002, 2(6))

Окружность радиуса 3 проходит через середины трёх сторон треугольника ABC, в котором величины углов A и B равны 60° и 45° соответственно. Найти площадь треугольника.

22.197. (МГУ, биологический, 1998, 5(6))

В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, соединяющая стороны AB и BC. Окружность, проведенная через точки M и N и C, касается стороны AB, а ее радиус равен $\sqrt{2}$. Длина стороны AC равна 2. Найти синус угла $\angle ACB$.

22.198. (МГУ, мех-мат, май 2003, 3(6))

В треугольнике ABC с углом $\angle B = 50^\circ$ и стороной $BC = 3$ на высоте BH взята такая точка D, что $\angle ADC = 130^\circ$ и $AD = \sqrt{3}$. Найти угол между прямыми AD и BC, а также $\angle CBH$.

22.199. (МГУ, географический, май 2000, 4(6))

В треугольнике ABC на сторонах AB и BC отмечены точки M и N соответственно, причем $BM = BN$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная BC, а через точку N — прямая, перпендикулярная AB. Эти прямые пересекаются в точке O. Продолжение отрезка BO пересекает сторону AC в точке P и делит её на отрезки $AP = 5$ и $PC = 4$. Найдите длину отрезка BP, если известно, что длина отрезка BC равна 6.

22.2.4 Окружности

22.200. (ЕГЭ, 2010–2012, С4 – *демоверсия*)
На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

22.201. (МГУ, физический, 1993, 6(8))
Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B. На этой окружности внутри треугольника AOB взята точка C. Расстояния от точки C до прямых OA и OB равны соответственно a и b. Найти расстояние от точки C до хорды AB.

22.202. (МГУ, филологический, 1991, 5(6))
В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найти расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 4$, а $BC = 3$.

22.203. (МГУ, физический, 1978, 6(6))
Дана окружность с диаметром AB. Вторая окружность с центром в точке A пересекает первую в точках C и D, а диаметр AB в точке E. На дуге CE, не содержащей точки D, взята точка M, отличная от точек C и E. Луч BM пересекает первую окружность в точке N. Известно, что $CN=a$, $DN=b$. Найти MN.

22.204. (МГУ, химический, май 2002, 4(6))
В треугольнике ABC биссектрисы углов при вершинах A и C пересекаются в точке D. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности, если радиус окружности с центром в точке O, описанной около треугольника ADC, равен $R = 6$ и $\angle ACO = 30^\circ$.

22.205. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2006, 3(10))
На стороне AB угла $\angle ABC = 30^\circ$ взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найти радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

22.206. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2007”, 5(10))
На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D, что окружность проходящая через точки A, C и D, касается прямой BC. Найти AD, если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

22.207. (МГУ, психологический, 2006, 4(6))
Прямая, проходящая через точку A, пересекает окружность в точках B и C (точка B лежит между точками A и C). Другая прямая, проходящая через точку A, пересекает окружность в точках D и E (точка D лежит между точками A и E). Продолжения отрезка BD за точку D и отрезка CE за точку E пересекаются в точке F, $EF = 1$, $AC = 2AE$. Найти FD.

22.208. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2006”, 4(10))
Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E. Известно, что $BD = 9$, $BE = 12$. Найти радиусы окружностей.

22.209. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2008, 5(10))
Окружность касается сторон угла ABC в точках A и C. Прямая, проходящая через точку B, пересекает окружность в точках D и E, причем $AE \| BC$. Прямые AD и BC пересекаются в точке F. Найти BF, если $AB = 1$.

22.210. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2007, 6(10))
Окружность касается другой окружности в точке A, а её хорды BC — в точке D. Найти радиус второй окружности, если $BC = 6$ и угол $BAD = 30°$.

22.211. (МГУ, мех-мат, май 1999, 4(6))
Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, лежащих по разные стороны от прямой AB. Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E. Найти AE, если $AB = 10$, $AC = 16$, $AD = 15$.

22.212. (МГУ, мех-мат, 2000, 4(6))

Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C. Касательная к первой окружности, проходящая через точку B, пересекает вторую окружность в точках D и E (D лежит между B и E). Известно, что $AB = 5$ и $AC = 4$. Найти длину отрезка CE и расстояние от точки A до центра окружности, касающейся отрезка AD и продолжений отрезков ED и EA за точки D и A соответственно.

22.213. (МГУ, мех-мат, 2003, 4(6))

Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямой BC, а через вершины B и C — другая окружность, касающаяся прямой AB. Продолжение общей хорды BD этих окружностей пересекает отрезок AC в точке E, а продолжение хорды AD одной окружности пересекает другую окружность в точке F. Найти отношение $AE : EC$, если $AB = 5$ и $B = 9$. Сравнить площади треугольников ABC и ABF.

22.214. (МГУ, мех-мат, 2005, 4(6))

На основании BC трапеции $ABCD$ взята точка E, лежащая на одной окружности с точками A, C и D. Другая окружность, проходящая через точки A, B и C, касается прямой CD. Найти BC, если $AB = 12$ и $BE : EC = 4 : 5$. Найти все возможные значения отношения радиуса первой окружности к радиусу второй при данных условиях.

22.215. (МГУ, ВМиК, май 1994, 4(6))

В остроугольном треугольнике ABC на высоте AD взята точка M, а на высоте BP — точка N так, что углы BMC и ANC — прямые. Найти биссектрису CL треугольника CMN, если $\angle MCN = 30^\circ$, а расстояние между точками M и N равно $4 + 2\sqrt{3}$.

Домашнее задание

22.216. (ЕГЭ, 2010, C4)

В треугольнике ABC $AB = 13$, $BC = 9$, $CA = 11$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 1 : 9$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

22.217. Прямая касается окружностей радиусов R и r в точках A и B. Известно, что расстояние между центрами равно a, причем $r < R$ и $r + R < a$. Найдите AB.

22.218. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 6. Известно, что $AB = 6$ и $BC = 4$. Найдите AC.

22.219. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B = 90^\circ$, $\angle AO_2B = 60^\circ$, $O_1O_2 = 1$. Найдите радиусы окружностей.

22.220. Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен 60°. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол AMC.

22.221. (МГУ, геологический, 2007, устный)
Из точки A, расположенной вне окружности, проведены к данной окружности касательная $AK = 4$ и секущая AC, внешняя часть которой равна $AB = 3$. Найдите длину отрезка BC.

22.222. (МГУ, ВМиК, 2007, устный)
В трапеции $ABCD$ ($BC \| AD$) боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Окружность, построенная на AB как на диаметре, пересекает CD в двух точках, делящих ее в отношении $2 : 1 : 3$, считая от вершины C. Найдите острый угол трапеции.

22.223. (Черноморский ф-л МГУ (г. Севастополь), 2007, 4(10))
В окружности единичного радиуса с центром в точке O диаметры AB и CD перпендикулярны. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков OA, OC и исходной окружности.

22.224. (МГУ, экономический, 1980, 2(5))
В прямоугольный треугольник вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания на отрезки длиной 5 и 12. Найти площадь треугольника.

22.225. (МГУ, геологический, 1986, 2(6))
Длины сторон AB, BC и AC треугольника ABC в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найти отношение высоты треугольника ABC, опущенной из вершины A на сторону BC, к радиусу вписанной окружности.

22.226. (МГУ, биологический, 1981, 3(5))
Центр O окружности радиуса 3 лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC. Катеты треугольника касаются окружности. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что длина отрезка OC равна 5.

22.227. (МГУ, ф-т Государственного управления, 2008, 3(7))
В треугольнике ABC точка O — центр вписанной окружности. Величина угла ACB равна 120°. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $AO = \sqrt{6}$, $BO = 3$.

22.228. (МГУ, ВМиК, 2007, 3(6))
В треугольнике ABC точка D является основанием высоты, опущенной из точки A на сторону BC. Окружность диаметра $2\sqrt{3}$ проходит через точки B и D и касается внешним образом окружности, описанной около треугольника ACD. Известно, что $AC = 4\sqrt{3}$, а величина угла ABC равна 30°. Найдите длину BC.

22.229. (МГУ, экономический, отд. менеджмента, 2005, 5(6))
Вписанная в треугольник ABC окружность радиуса 1 касается сторон AB, BC и AC в точках K, M и N. Известно, что углы $\angle MKN$ и $\angle ABC$ оба равны 45°. Найдите длины сторон треугольника ABC.

22.230. Две окружности касаются внешним образом в точке A. Найти радиусы окружностей, если хорды, соединяющие точку A с точками касания одной из общих внешних касательных, равны 6 и 8.

22.231. Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 и касательная, длина которой составляет $\frac{2}{3}$ внутреннего отрезка секущей. Найти длину касательной.

22.232. (МГУ, экономический (менеджмент), 1996, 5(6))
Через точку A, находящуюся вне окружности на расстоянии 7 от ее центра, проведена прямая, пересекающая окружность в точках B и C. Найти радиус окружности, если известно, что $AB = 3$, $BC = 5$.

22.233. Каждая из боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC разделена на три равные части, и через четыре точки деления на этих сторонах проведена окружность, высекающая на основании AC хорду DE. Найти отношение площадей треугольников ABC и BDE, если $AB = BC = 3$ и $AC = 4$.

22.234. (МГУ, почвоведения, 2006, 6(7))
В треугольнике ABC известны стороны $AB = 9$, $BC = 8$, $AC = 7$, а AD — биссектриса угла BAC. Окружность проходит через точку A, касается стороны BC в точке D и пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Найти EF.

22.235. (МГУ, Московская школа экономики, 2006, 6(7))
Треугольник ABC, длины сторон которого образуют арифметическую прогрессию, вписан в окружность радиуса $\frac{14}{\sqrt{3}}$. Найдите периметр треугольника, если он меньше 40 и $AC = 14$.

22.236. Две окружности, отношение радиусов которых равно $2 : 3$, касаются друг друга внутренним образом. Через центр меньшей окружности проведена прямая, перпендикулярная линии центров, и из точек пересечения этой прямой с большей окружностью проведены касательные к меньшей окружности. Найти углы между этими касательными.

22.237. (МГУ, геологический, май 2001, 5(8))
Окружность, проходящая через вершину A треугольника ABC, касается стороны BC в точке M и пересекает стороны AC и AB соответственно в точках L и K, отличных от вершины A. Найдите отношение $AC : AB$, если известно, что длина отрезка LC в два раза больше длины отрезка KB, а отношение $CM : BM = 3 : 2$.

22.238. (МГУ, биолого-почвенный, 1971, 4(5))
В прямоугольном треугольнике ABC даны $AB = 3$, $BC = 4$ — катеты, через середины AB и AC проведена окружность, касающаяся BC. Найти длину отрезка гипотенузы AC, который лежит внутри этой окружности.

22.239. (МГУ, Олимпиада "Ломоносов-2005", 5(10))
На окружности взята точка A, а на ее диаметре BC — точки D и E, а на его продолжении за точку B — точка F. Найти BC, если $\angle BAD = \angle ACD$, $\angle BAF = \angle CAE$, $BD = 2$, $BE = 5$ и $BF = 4$.

22.240. (МГУ, мех-мат, 2008, 4(6))
Окружность радиуса 6 проходит через вершину B треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Центр O окружности лежит на стороне AC, $AO = 12$, $CO = 10$, $\angle OBC = \angle BCO + \angle EOA$. В каком отношении прямая BO делит отрезок EF? Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

22.241. (МГУ, ИСАА, 1995, 4(6))
Сторона AB треугольника ABC равна 3, $BC = 2AC$, E — точка пересечения биссектрисы CD данного треугольника с описанной около него окружностью, $DE = 1$. Найти сторону AC.

22.242. (МГУ, ИСАА, 2001, 5(7))
В треугольнике ABC даны длины сторон $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{5}$ и $AC = 3$. Сравните величину угла BOC и $112{,}5^\circ$, если O — центр вписанной в треугольник ABC окружности.

22.243. В треугольнике ABC со сторонами $BC = 7$, $AC = 5$, $AB = 3$ проведена биссектриса AD. Вокруг треугольника ABD описана окружность, а в треугольник ACD вписана окружность. Найти произведение радиусов.

22.244. Опеределить длину хорды, если известны радиус r и расстояние d от одного конца хорды до касательной, проведенной через другой ее конец.

22.245. (МГУ, геологический, 1991, 5(6))
Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает сторону AB в точке E и сторону BC в точке F. Угол AEC в 5 раз больше угла BAF, а угол ABC равен $72°$. Найти радиус окружности, если $AC = 6$.

22.246. В треугольнике ABC $AB = \sqrt{14}$, $BC = 2$. Окружность проходит через точку B, через середину D отрезка BC, через точку E на отрезке AB и касается стороны AC. Найти отношение, в котором эта окружность делит отрезок AB, если DE — диаметр этой окружности.

22.247. Сторона AB треугольника ABC является хордой некоторой окружности. Стороны AB и BC лежат внутри окружности, продолжение стороны AC пересекает окружность в точке D, а продолжение стороны BC — в точке E, причем $AB = AC = CD = 2$, $EC = \sqrt{2}$. Чему равен радиус окружности?

22.248. (МГУ, биологический, 2002, 3(5))
Длины сторон треугольника ABC равны 4, 6 и 8. Вписанная в этот треугольник окружность касается его сторон в точках D, E и F. Найти площадь треугольника DEF.

22.249. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 7(8))
Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 21$, $BM = 9$, а угол ABC равен $60°$.

22.250. В равнобедренный треугольник с основанием 12 вписана окружность, и к ней проведены три касательные, отсекающие от данного треугольника три малых треугольника. Сумма периметров малых треугольников равна 48. Найти боковую сторону данного треугольника.

22.251. В треугольник с периметром, равным 20, вписана окружность. Отрезок касательной, проведенной к окружности параллельно основанию, заключенный между сторонами треугольника, равен 2,4. Найти основание треугольника.

22.252. (МГУ, биологический, май 2002, 3(5))

Окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A. Найти радиус окружности, если $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ и площадь треугольника ABC равна S.

22.253. (МГУ, физический, 1990, 4(6))

На стороне BC треугольника CD взята точка A так, что $BA = AC$, $\angle CDB = \alpha$, $\angle BCD = \beta$, $BD = b$. Пусть CE — высота треугольника BCD. Окружность проходит через точку A и касается стороны BD в точке E. Найти радиус этой окружности.

22.254. (МГУ, геологический, 1971, 4(5))

Две окружности радиуса r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности радиуса R в точках A и B соответственно. Определить радиус r, если $AB = 12$, $R = 8$.

22.255. (МГУ, биологический, 1978, 3(5))

Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности. Величина угла OAK равна $\frac{\pi}{3}$. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.

22.256. На отрезке AC дана точка B, причем $AB = 14$, $BC = 28$. На отрезках AB, BC и AC как на диаметрах построены полуокружности в одной полуплоскости относительно границы AC. Найти радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей.

22.257. (МГУ, экономический, отд. экономики, 2005, 5(7))

Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон в точках K, N и M. Известно, что в треугольнике KNM угол $\angle M$ равен 75°, произведение всех сторон равно $9 + 6\sqrt{3}$, а вершина K делит отрезок AC пополам. Найдите длины сторон $\triangle ABC$.

22.258. (МГУ, экономический (отд. экономики), 2006, 5(7))
В прямоугольном треугольнике ADC гипотенуза DC является хордой окружности радиуса 1, которая пересекает катеты AD и AC в точках E и B соответственно. Найдите DB, если $\angle DBE = 30^\circ$, $S_{DEC} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$.

22.259. (МГУ, химический, 1998, 5(6))
Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются в точке E, причем $CE = DE$. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке K. Отрезки AK и CE пересекаются в точке M. Найти площадь треугольника CKM, если $AB = 10$, $AE = 1$.

22.260. (МГУ, психологический, 1992, 3(5))
Точки K, L, M, N, P расположены последовательно на окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника KLM, если $LM \| KN$, $KM \| NP$, $MN \| LP$, угол LOM равен 45°, где O — точка пересечения хорд LN и MP.

22.2.5 Параллелограммы

22.261. (ЕГЭ, 2006, B11)
В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке T и прямую AD в точке M. Найдите периметр треугольника ABM, если $BC = 15$, $BT = 18$, $TM = 12$.

22.262. (ЕГЭ, 2007, B11 – *демоверсия*) **“Тест”**
Дан ромб $ABCD$ с острым углом B. Площадь ромба равна 320, а синус угла B равен 0,8. Высота CH пересекает диагональ BD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

22.263. (ЕГЭ, 2009, B11)
Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 21, диагональ BD равна $3\sqrt{2}$, $\angle ABD = 45^\circ$. Найдите сторону BC.

22.264. (МГУ, факультет Гос. управления, 2009, 3(7))
Площадь круга, вписанного в ромб, в два раза меньше площади ромба. Найти величину острого угла ромба.

22.265. (МГУ, филологический, 1982, 3(5))
В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 6, а высота, проведенная к основанию AD, равна 3. Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M так, что $MC = 4$. Пусть N — точка пересечения биссектрисы AM и диагонали BD. Найти площадь треугольника BNM.

22.266. (МГУ, ВМиК (отд. специалистов), 2006, 4(6))
В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 10, 8 и 6. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Домашнее задание

22.267. (ЕГЭ, 2006, B11)
В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K и прямую BC в точке P. Найдите периметр треугольника CDP, если $AK = 12$, $BK = 9$, $PK = 15$.

22.268. (ЕГЭ, 2008, B11)
Точка L лежит на стороне AB параллелограмма $ABCD$ так, что $AL : LB = 3 : 4$. Прямая CL пересекает луч DA в точке K, а площадь треугольника AKL равна 36. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

22.269. Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке K, причем $AM = 10$, $BK = 6$. Найдите площадь четырехугольника $ABMK$.

22.270. (ЕГЭ, 2009, B11)
Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $4\sqrt{3}$, диагональ BD равна $2\sqrt{3}$, $\angle ADB = 30°$. Найдите сторону CD.

22.271. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $AD = 10$, $BD = 8$, а отрезок, соединяющий вершину B с серединой стороны AD, равен $\sqrt{15}$.

22.272. Внутри параллелограмма $ABCD$ с острым углом A и стороной $AD = 7{,}7$ расположена окружность, радиус которой равен 2,4, так, что она касается сторон AD, AB и BC. Точка касания делит AB в отношении $16 : 9$, считая от вершины A. Найдите периметр параллелограмма.

22.273. (ЕГЭ, 2010, C4)
В параллелограмме $ABCD$ $AB = 24$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 3 : 5$. Найдите BC.

22.274. (МГУ, биологический, 1973, 4(5))
Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найти площадь четырехугольника $OMCD$.

22.275. (МГУ, химический, ФНМ, 2006, 4(6))
Биссектрисы внутренних углов параллелограмма $ABCD$ образуют четырёхугольник $EFGH$, каждая вершина которого получена как пересечение двух биссектрис. Найти сумму квадратов всех сторон в четырёхугольнике $EFGH$, если $AB = BC + \frac{3}{2}$.

22.276. (МГУ, физический, 2000, 4(8))
В параллелограмме $KLMN$ биссектриса $\angle MNK$ пересекает сторону KL в точке Q такой, что $LQ/QK = 1/3$, $\angle LNQ = \alpha$. Найти $\angle LKN$.

22.277. (МГУ, биологический, 1980, 4(5))
Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 26. Величина угла ABC равна $120°$. Радиус окружности, вписанной в треугольник BCD, равен $\sqrt{3}$. Найти длины сторон параллелограмма, если известно, что $AD > AB$.

22.278. (МГУ, мех-мат, 2001, 3(6))
Через вершины A, B, C параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 5$ проведена окружность, пересекающая прямую BD в точке E, причем $BE = 9$. Найти диагональ BD.

22.2.6 Трапеции

При решении задач с трапециями часто используются дополнительные построения: проведение из вершины трапеции прямой параллельной диагонали или боковой стороне до пересечения с основанием, достроение трапеции до треугольника путем продолжения боковых сторон.

22.279. (ЕГЭ, 2009, B11 – *1-я демоверсия*)

В трапеции $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла A. Биссектриса угла B пересекает большее основание AD в точке E. Найдите высоту трапеции, если $AC = 8\sqrt{5}$, $BE = 4\sqrt{5}$.

22.280. (ЕГЭ, 2009, B11 – *2-я демоверсия*)

Средняя линия прямоугольной трапеции равна 9, а радиус вписанной в нее окружности равен 4. Найдите большее основание трапеции.

22.281. (МГУ, почвоведения, 1977, 4(5))

Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна a, а длина боковой стороны BC равна b. Найти площадь трапеции.

22.282. Найти площадь трапеции, у которой большее основание равно a, а меньшее основание равно b и острые углы между боковыми сторонами и большим основанием равны α и β.

22.283. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 6(7))

В равнобочной трапеции основания относятся как $3 : 2$, диагональ делит острый угол пополам. Найдите площадь трапеции, если длина диагонали равна 4.

22.284. (МГУ, мех-мат, 1973, 2(5))

В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований равен 2. Найти площадь трапеции.

22.285. (МГУ, социологический, апрель 2005, 4(6))

В равнобочной трапеции $ABCD$ $AD \| BC$, биссектриса угла BAD проходит через точку M, которая является серединой стороны CD. Известно, что $AB = 5$, $AM = 4$. Найти основания трапеции.

22.286. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2011, 6(10))

В прямоугольной трапеции бóльшая диагональ длины 11 делит острый угол трапеции в отношении $2 : 1$, а расстояние от вершины тупого угла до этой диагонали равно 4. Какие значения может принимать площадь трапеции?

Домашнее задание

22.287. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ, равная 10, образует с основанием угол, косинус которого равен $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

22.288. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ равна $2\sqrt{13}$, а средняя линия равна 4.

22.289. Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

22.290. (МГУ, почвоведения, май 2001, 6(6))

В равнобедренной трапеции средняя линия равна m, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

22.291. (МГУ, биологический, 2005, 3(6))

Диагонали трапеции равны 12 и 6, а сумма длин оснований равна 14. Найти площадь трапеции.

22.292. В прямоугольной трапеции меньшая диагональ равна 15 и перпендикулярна большей боковой стороне. Меньшая боковая сторона 12. Найти большее основание трапеции.

22.293. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2005”, 3(10))

Найти площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC = 5$, если расстояние от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

22.294. (МГУ, филологический, 2001, 3(5))

В трапеции $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $CD = 2AB$. На сторонах AD и BC выбраны соответственно точки P и Q так, что $DP : PA = 2$, $BQ : QC = 3 : 4$. Найти отношение площадей четырехугольников $ABQP$ и $CDPQ$.

22.295. (МГУ, географический, 2005, 2(6))

Произведение средней линии трапеции и отрезка, соединяющего середины ее диагоналей, равно 25. Найти площадь трапеции, если ее высота втрое больше разности оснований.

22.296. (МГУ, географический, 1998, 3(6))

Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $(AD > BC)$ равна 48, а площадь треугольника AOB, где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 9. Найти отношение оснований трапеции $AD : BC$.

22.297. (МГУ, экономический, 1995, 3(6))

В трапеции $KLMN$ боковые стороны $KL = 36$, $MN = 34$, верхнее основание $LM = 10$ и $\angle KLM = \arccos(-\frac{1}{3})$. Найти диагональ LN.

22.298. (МГУ, филологический, 1986, 4(5))

В трапеции $ABCD$ сторона AB параллельна CD. Диагонали BD и AC трапеции пересекаются в точке O, причем треугольник BOC является равносторонним. Найти длину стороны BC, если $AB = 5$, $CD = 3$.

22.299. Найти площадь трапеции, если её основания равны 5 и 2, а боковые стороны равны 3 и 1.

22.300. (МГУ, почвоведения, 1979, 4(5))
Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найти площадь треугольника BCE, если длины оснований трапеции $AB = 30$, $DC = 24$, боковой стороны $AD = 3$ и угол $DAB = 60°$.

22.301. В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16, сумма диагоналей AC и BD равна 36, угол CAD равен $60°$. Отношение площадей треугольников AOD и BOC, где O — точка пересечения диагоналей, равно 4. Найти площадь трапеции.

22.302. (МГУ, мех-мат, 1980, 3(5))
В трапеции длина средней линии равна 4, а углы при одном из оснований имеют величины $40°$ и $50°$. Найти длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований равна 1.

22.303. (МГУ, экономический, 1999, 4(7))
В трапеции $ABCD$ ($AB \| CD$) диагонали $AC = a$, $BD = \frac{7}{5}a$. Найдите площадь трапеции, если $\angle CAB = 2\angle DBA$.

22.304. (МГУ, геологический, 1996, 7(8))
В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям и имеет длину 6. Длина основания AD равна 8, а длина отрезка DO, где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 6. Найти площадь треугольника COD.

22.305. (МГУ, почвоведения, 1993, 4(5))
Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках E и F. Длина отрезка EF равна 2. Найдите длины оснований, если их отношение равно 4.

22.306. (МГУ, биолого-почвенный, отд. биологии, 1970, 4(5))
Дана трапеция $ABCD$, причем $BC = a$ и $AD = b$. Параллельно ее основаниям BC и AD проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке P, диагональ AC в точке L, диагональ BD в точке R и сторону CD в точке Q. Известно, что $PL = LR$. Найти PQ.

22.307. AD и BC — основания трапеции $ABCD$, P — точка пересечения биссектрис углов DAB и ABC, Q — точка пересечения биссектрис углов BCD и CDA. Найти длину средней линии трапеции, если $AB = 4$, $CD = 10$, $PQ = 1$.

22.308. (МГУ, почвоведения, май 2000, 5(5))
Высота трапеции $ABCD$ равна 5, а основания BC и AD соответственно равны 3 и 5. Точка E находится на стороне BC, причем $BE = 2$, F — середина стороны CD, а M — точка пересечения отрезков AE и BF. Найти площадь четырёхугольника $AMFD$.

22.309. (МГУ, мех-мат, 2007, устный)
В трапецию $ABCD$ вписан параллелограмм $KLMN$ так, что вершины L и N лежат на основаниях BC и AD, а вершины K и M — на сторонах AB и CD соответственно, причём $AK : BK = 2 : 3$ и $BL : CL = 7 : 5$. Найти отношение площадей треугольников BKL и CLM.

22.310. (МГУ, мех-мат, 2007, устный)
В трапецию $ABCD$ вписан параллелограмм $KLMN$ так, что вершины L и N лежат на основаниях BC и AD, а вершины K и M — на сторонах AB и CD соответственно, причём $AK : BK = 1 : 4$ и $AN : BL : CL = 4 : 2 : 3$. Какую часть площади трапеции занимает параллелограмм?

Трапеции описанные и вписанные в окружности

22.311. (ЕГЭ, 2004, B9 – *демоверсия*) **“Тест”**
В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен $60°$, а площадь равна $24\sqrt{3}$, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.

22.312. (ЕГЭ, 2006, B11 – *демоверсия*)
Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание AD равно 15, синус угла BAC равен $\dfrac{1}{3}$, синус угла ABD равен $\dfrac{5}{9}$.

22.313. В равнобедренную трапецию с верхним основанием равным единице вписана окружность радиуса единица. Найти площадь трапеции.

22.314. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2005, 4(8))
Найдите площадь трапеции $ABCD$ ($BC \| AD$), вписанной в окружность с центром в точке O, если ее высота равна 2, а угол COD равен 60°.

22.315. (МГУ, геологический, 1970, 5(5))
В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 39$, $BC = 26$ и боковые стороны $AB = 5$ и $CD = 12$. Найти радиус окружности, которая проходит через точки A и B и касается стороны CD или ее продолжения.

Домашнее задание

22.316. (ЕГЭ, 2006, B11)
Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если средняя линия трапеции равна $\sqrt{10}$, а косинус угла при основании трапеции равен $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

22.317. (ЕГЭ, 2006, B11)
Равнобедренная трапеция описана около окружности радиуса $\sqrt{7}$. Найдите косинус угла при большем основании трапеции, если ее средняя линия равна 8.

22.318. (ЕГЭ, 2008, B11)
Равнобедренная трапеция описана около окружности. Точка касания с окружностью делит боковую сторону трапеции в отношении $2:3$, а радиус окружности равен $12\sqrt{6}$. Найдите меньшее основание трапеции.

22.319. В круг радиуса 1 вписана трапеция, основания которой видны из центра круга под углами 60° и 90°. Найти площадь трапеции.

22.320. (МГУ, ИСАА, 1991, 2(6))
В равнобочную трапецию с боковой стороной, равной 9, вписана окружность радиуса 4. Найти площадь трапеции.

22.321. Прямоугольная трапеция описана около окружности. Найти радиус окружности, если длины оснований трапеции равны a и b.

22.322. (МГУ, геологический, 1972, 4(5))
Около трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC описана окружность радиуса 6. Центр описанной окружности лежит на основании AD. Основание BC равно 4. Найти площадь трапеции.

22.323. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 128. Острый угол трапеции равен 30°. Найти стороны трапеции.

22.324. (МГУ, биолого-почв., отд. почвоведения, 1970, 3(5))
Около круга описана трапеция с углами при основании α и β. Найти отношение площади трапеции к площади круга.

22.325. (МГУ, психологический, 2003, 4(5))
В окружность радиуса $\sqrt{7}$ вписана трапеция с меньшим основанием 4. Через точку на этой окружности, касательная в которой параллельна одной из боковых сторон трапеции, проведена параллельная основаниям трапеции хорда окружности длины 5. Найти длину диагонали трапеции и площадь трапеции.

22.2.7 Многоугольники

22.326. (ЕГЭ, 2008, B11 – *демоверсия*) **“Тест”**
Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна $32\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MPK, если M, P и K — середины сторон AB, CD, EF соответственно.

22.327. (МГУ, факультет Гос. управления, 2007, 3(7))
Диагональ разбивает выпуклый четырехугольник на два равных треугольника со сторонами длин 5, 12 и 13. Найдите радиус наименьшего круга, в который можно поместить такой четырехугольник.

22.328. (МГУ, Черноморский филиал, 2005, 7(10))

Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площади треугольников ADO и BCO, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна 15, а площади треугольников ABO и CDO равны 2 и 6 соответственно.

22.329. (МГУ, экономический, 1985, 6(6))

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь всего четырехугольника не превосходит 4, $AD = 3$. Найти сторону BC.

22.330. (МГУ, химический, май 2001, 5(6))

В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все внутренние углы при вершинах равны. Известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ и $EF = 1$. Найти длины сторон DE и AF.

22.331.* (МГУ, химический, май 2003, 6(6))

В пятиугольник $ABCDE$ вписана окружность. P — точка касания этой окружности со стороной BC. Найти длину отрезка BP, если известно, что длины всех сторон пятиугольника являются целыми числами, $AB = 1$ и $CD = 3$.

22.332. (МГУ, мех-мат, май 1998, 3(6))

В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и CE являются биссектрисами углов при вершинах B и C соответственно, $\angle A = 35^\circ$, $\angle D = 145^\circ$, а площадь треугольника BCE равна 11. Найти площадь пятиугольника $ABCDE$.

22.333.* (МГУ, экономический, 1984, 5(6))

В трапеции $ABCD$ угол BAD равен $\frac{\pi}{3}$, а верхнее основание BC равно 5. Найти длину боковой стороны CD, если площадь трапеции равна $\frac{1}{2}(AD \cdot BC + AB \cdot CD)$.

Домашнее задание

22.334. (ЕГЭ, 2007, B11)

Найдите периметр правильного шестиугольника $ABCDEF$, если $AE = 10\sqrt{3}$.

22.335. (ЕГЭ, 2007, B11) **“Тест”**

В правильном шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ сторона равна $8\sqrt{3}$. Отрезок BC соединяет середины сторон A_3A_4 и A_5A_6. Найдите длину отрезка, соединяющего середину стороны A_1A_2 с серединой отрезка BC.

22.336. (МГУ, геологический, 2007, 4(8))

Площадь четырехугольника $ABCD$ равна 9, радиус вписанной в него окружности равен 1, а длины сторон AB и BC равны 3 и 5 соответственно. Чему равны длины сторон AD и CD?

22.337. В четырехугольник, три последовательные стороны которого равны соответственно 2, 3 и 4, вписана окружность радиусом 1,2. Найти площадь четырехугольника.

22.338. (МГУ, химический, 1994, 4(5))

В квадрат площадью 18 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Стороны прямоугольника относятся как 1 : 2. Найти площадь прямоугольника.

22.339. Площадь четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, равна S. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

22.340. (МГУ, географический, 2003, 4(5))

Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, перпендикулярны. Известно, что $AC = 4$, $\angle CAB + \angle DBA = 75°$. Найти площадь четырёхугольника $ABCD$ и сравнить её с числом $2\sqrt{15}$.

22.341. (МГУ, почвоведения, май 1995, 6(6))
В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются под углом 60°, а их длины относятся как $1 : 3$. Чему равна меньшая диагональ четырехугольника $ABCD$, если большая равна $\sqrt{39}$.

22.342. На стороне CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята точка E так, что отрезок AE делит четырехугольник $ABCD$ на ромб и равнобедренный треугольник, отношение площадей которых $\frac{13}{3}$. Найти величину $\angle BAD$.

22.343. (Олимпиада “Покори Воробьевы горы”, 2005, 4(10))
В четырехугольнике $ABCD$ точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно, причем $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $AN = CM$. Найти AD.

22.344. (МГУ, ИСАА, 2005, 6(7))
В выпуклом четырехугольнике с вершинами в точках A, B, C, D заданы длины отрезков $AD = 2$, $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 2(\sqrt{3} - 1)$. Величины углов DAB и ABC равны $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$ соответственно. Вычислите все углы четырёхугольника.

22.345. (МГУ, психологический, 2005, 4(6))
В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали BD и AC равны стороне AB. Найти угол BCD и сторону AB, если угол CDA прямой, $BC = 4$, $AD = 5$.

22.346. (МГУ, ВМиК, 2007, устный)
В квадрате $ABCD$ точка K — середина стороны AB, а точка L лежит на диагонали AC, причем $AL = 3LC$. Найдите $\angle KLD$.

22.347. (МГУ, ВМиК, 2005, 4(6))
На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle AMD = \angle ADB$ и $\angle ACM = \angle ABC$. Утроенный квадрат отношения расстояния от точки A до прямой CD к расстоянию от точки C до прямой AD равен 2, $CD = 20$. Найдите радиус вписанной в треугольник ACD окружности.

22.348. (МГУ, ИСАА, 2008, 6(8))

Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что длины сторон AB, BC, CD, DE равны $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{57}}{2}$, $\frac{\sqrt{19}}{2}$, $\sqrt{3}$ соответственно. Диагональ CA параллельна стороне DE, величина угла между диагоналями CA и CE равна $\frac{\pi}{6}$. Найти площадь пятиугольника $ABCDE$.

22.349.* (МГУ, экономический, 1984, 5(6))

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ вершины A и C противоположны, длина стороны AB равна 3. Угол ABC равен $\frac{\pi}{4}$, угол BCD равен $\frac{2\pi}{3}$. Найти длину стороны AD, если известно, что площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD)$.

Многоугольники вписанные в окружность

22.350. (МГУ, социологический, 2003, 3(6))

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Радиус окружности равен 2, сторона AB равна 3. Диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны. Найти CD.

22.351. (МГУ, мех-мат, март 1999, 4(6))

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, $AB = AD$, CA — биссектриса угла C, $\angle BAD = 140°$, $\angle BEA = 110°$. Найти угол CDB.

22.352. (МГУ, мех-мат, 2002, 4(6))

Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точка X лежит на его стороне AD, причем $BX \| CD$ и $CX \| BA$. Найти BC, если $AX = \frac{3}{2}$ и $DX = 6$.

Домашнее задание

22.353. (МГУ, Московская школа экономики, 2007, 7(8))

Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке E. Найдите периметр и площадь треугольника ABC, если $BC = CD = 6$, $AB = 7$ и $CE = 3$.

22.354. (МГУ, биологический, ФББ, ФФМ, 2006, 3(6)) Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB=4$, $BC=3$, $CD=2$, $AD=1$ вписан в круг. Найти радиус этого круга.

22.355. (МГУ, социологический, 2001, 4(6)) Диагональ AC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ является диаметром описанной около него окружности. Найти отношение S_{ABC} и S_{ACD}, если известно, что диагональ BD делит AC в отношении $2:1$ (считая от точки A), а $\angle BAC = 30°$.

22.356. (МГУ, геологический, 1998, 6(8)) Четырехугольник $PQRS$ вписан в окружность. Диагонали PR и QS перпендикулярны и пересекаются в точке M. Известно, что $PS = 13$, $QM = 10$, $QR = 26$. Найти площадь четырехугольника $PQRS$.

22.357. (МГУ, психологический, 1999, 5(6)) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Длины противоположных сторон AB и CD равны соответственно 9 и 4, $AC = 7$, $BD = 8$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

22.358. (МГУ, социологический, 2000, 5(6)) В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность радиуса 2. Угол DAB — прямой. Сторона AB равна 5, сторона BC равна 6. Найти площадь четырёхугольника $ABCD$.

22.359. (МГУ, химический, май 2000, 4(6)) Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Найти её длину, если $BC = CE$, площадь треугольника ADE равна площади треугольника CDE, площадь треугольника ABC равна площади треугольника BCD, а $3AC + 2BD = 5\sqrt{5}$.

22.360. (МГУ, географический, 1989, 5(5)) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Известно, что $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90°$ и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника ABD и точкой пересечения биссектрис треугольника AD равно $\sqrt{2}$. Найти длину стороны BC.

22.3 Задачи на максимум и минимум

22.361. (*задача Евклида*) В треугольнике ABC на стороне BC берется M. Через точку M проводятся прямые MK и MN параллельно сторонам AC и AB соответственно до пересечения со сторонами треугольника в точках K и N. Выбрать точку M так, чтобы площадь параллелограмма $AKMN$ была максимальной.

22.362. Дан угол A и точка M, лежащая внутри угла. Провести через точку M отрезок BC (точки B и C лежат на сторонах угла), так чтобы площадь треугольника ABC была минимальной.

22.363. Пусть α, β, γ — углы треугольника. Доказать, что $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Домашнее задание

22.364. В данный треугольник вписать параллелограмм наибольшей площади с данным острым углом так, чтобы две вершины параллелограмма лежали на основании, а две другие — на боковых сторонах.

22.365. Дан угол A и точка M, лежащая внутри угла. Провести через точку M отрезок BC (точки B и C лежат на сторонах угла), так чтобы периметр треугольника ABC был минимальным.

22.366. Пусть a, b, c — стороны треугольника, причем $a + b + c = 1$. Доказать, что $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}$.

22.367. На сколько частей делят плоскость n прямых общего положения (прямые находятся в общем положении, если среди них нет параллельных и никакие три из этих прямых не пересекаются в одной точке)?

22.368. (МГУ, мех-мат, 2001, устный)
Какую максимальную площадь может иметь четырехугольник, стороны которого последовательно равны $1 - 7a$, $7 - 6a$, $5 - 3a$, $14a + 5$? Найти все значения a, при которых она достигается.

22.369. (МГУ, ВМиК, 2007, устный)
Докажите, что в $\triangle ABC$ со сторонами a, b, c и углом A, противолежащим стороне a, справедливо неравенство $\sin\dfrac{A}{2} \le \dfrac{a}{b+c}$.

22.370. Доказать, что из всех четырехугольников с одними и теми же сторонами четырехугольник, около которого можно описать окружность, имеет наибольшую площадь.

22.4 Использование метода координат и векторов

22.371. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2004, 4(8))
Найдите периметр треугольника ABC, если известны координаты его вершин $A(-3,\,5)$, $B(3,-3)$ и точки $M(6,1)$, являющейся серединой стороны BC.

22.372. (МГУ, Высшая школа бизнеса, 2005, 4(8))
В основании четырехугольной пирамиды с вершиной S находится прямоугольник $ABCD$. Известно, что $SA = 7$, $SB = 2$, $SC = 6$. Найти SD.

22.373. (Олимпиада "Покори Воробьевы горы", 2011, 9(10))
В тетраэдре все плоские углы при одной вершине — прямые. Некоторая точка пространства удалена от указанной вершины тетраэдра на расстояние 3, а от остальных его вершин — на расстояния $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$. Найдите расстояния от центра описанной около тетраэдра сферы до каждой из его граней.

22.374. (МГУ, химический, физико-химический, ФНМ, биолог., ФФМ, ФБиБ, географический, психологический, 2007, 5(8))
Прямая l_1 проходит через точки $(-3,2)$ и $(1,1)$ координатной плоскости. Прямая l_2 проходит через точку $(-5,4)$ и перпендикулярна прямой l_1. Найти координаты точки пересечения l_1 и l_2.

22.375. (МГУ, мех-мат, устный)
Найти наименьшее значение выражения
$$s = |x| + |y| + \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}.$$

22.376. Пусть α, β, γ — углы треугольника ABC. Доказать, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$, а равенство достигается только для равностороннего треугольника.

Домашнее задание

22.377. Пусть $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ — вектора единичной длины, исходящие из одной точки O. Доказать, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$ тогда и только тогда, когда углы между всеми векторами равны по 120°.

22.378. (МГУ, почвоведения, 2005, 6(6))
На плоскости даны точки с координатами $A=(1,2)$, $B=(2,1)$, $C=(3,-3)$, $D=(0,0)$. Они являются вершинами выпуклого четырехугольника $ABCD$. В каком отношении точка пересечения его диагоналей делит диагональ AC?

22.379. Пусть α, β, γ — углы треугольника ABC. Доказать, что $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma \geq -\frac{3}{2}$, а равенство достигается только для равностороннего треугольника.

22.380. (МГУ, мех-мат, устный)
Найти наибольшее значение выражения
$$s=|y|\sqrt{1-x^2}+\sqrt{16-y^2}\cdot|x|.$$

22.381. (МГУ, факультет Гос. управления, 2005, 3(7))
В четырехугольнике $ABCD$ найдите точку E так, чтобы отношение площадей треугольников EAB и ECD было равно $1:2$, а треугольников EAD и EBC — $3:4$, если известны координаты всех его вершин: $A(-2,-4)$, $B(-2,3)$, $C(4,6)$, $D(4,-1)$.

22.382. (МГУ, геологический, МШЭ, 2008, 8(8))
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $(AA_1||BB_1||CC_1||DD_1)$ точка R лежит на диагонали AC, а точка Q — на диагонали DC_1, при этом RQ — общий перпендикуляр к прямым AC и DC_1. Чему равна величина угла RDQ?

22.383. (МГУ, ИСАА, 2006, 7(7))
Точки K, L, M, N с координатами $(-2;3)$, $(1;4)$, $(3;2)$, $(-1;-1)$ лежат на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ соответственно. Найдите его площадь.

23 Стереометрия

23.1 Вписанные и описанные шары

23.1. Дана пирамида, в которой все боковые ребра равны. Доказать, что вершина проектируется в центр описанного около основания круга.

23.2. Дана треугольная пирамида, в которой все боковые грани наклонены под одинаковым углом к плоскости основания. Доказать, что вершина проектируется в центр вписанного около основания или вневписанного круга.

23.3. Найти радиус шара, описанного около тетраэдра со стороной равной единице.

23.4. Найти радиус шара, вписанного в тетраэдр со стороной равной единице.

23.5. Дана треугольная пирамида. Доказать, что $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2} + \dfrac{1}{h_3} + \dfrac{1}{h_4}$, где r — радиус шара, вписанного в пирамиду, h_1, h_2, h_3, h_4 — длины перпендикуляров, опущенных из вершины пирамиды на противоположные грани.

23.6. (ЕГЭ, 2005, С4 – *демоверсия*)
Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, где AA_1, BB_1 и CC_1 — боковые ребра. Сфера, центр которой лежит на ребре AA_1, пересекает ребро A_1C_1 в точке M и касается плоскости основания ABC и плоскости CBB_1. Известно, что $AB = 12$, $A_1M : MC_1 = 3 : 1$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

23.7. Усеченный конус вписан в шар. Радиус меньшего основания конуса равен 6, большего — 10, а объём — $\dfrac{3136\pi}{3}$. Найдите объём шарового слоя, в который вписан данный усеченный конус.

23.8. (ЕГЭ, 2008, С4 – *демоверсия*; 2005, С4)
Отрезок PN — диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите синус угла между прямой NT и плоскостью PMN, если T — середина ребра ML.

23.9. (МГУ, “Ломоносов-2011”, заочный тур, 10(10))
Сфера касается всех ребер пирамиды $SABC$, причем боковых ребер SA, SB и SC — в точках A', B' и C'. Найти объем пирамиды $SA'B'C'$, если $AB = BC = SB = 5$ и $AC = 4$.

Домашнее задание

23.10. Дана пирамида, в которой все боковые ребра наклонены под одинаковым углом к плоскости основания. Доказать, что вершина проектируется в центр описанного около основания круга.

23.11. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор с центральным углом $288°$ и площадью 320π. Через вершину конуса перпендикулярно к одной из образующих проведена плоскость, делящая конус на две части. Найдите объем шара, вписанного в ту из образовавшихся частей, которая не содержит высоты конуса, так, что центр шара равноудален от точек пересечения секущей плоскости и окружности основания конуса.

23.12. (МГУ, геологический, 1977, 5(5))
Найти радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна b, а угол между боковыми ребрами равен α.

23.13. Ребро куба равно a. Найти радиус сферы, проходящей через вершины нижнего основания куба и касающейся ребер верхнего его основания.

23.14. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2006, 6(8))
Найдите минимально возможный объём прямого кругового конуса, описанного вокруг шара единичного радиуса.

23.15. (МГУ, мех-мат, 2002, 2(6))

Три сферы, радиусы которых соответственно равны $\sqrt{6}$, 1 и 1, попарно касаются друг друга. Через прямую, содержащую центры A и B второй и третьей сфер, проведена плоскость γ так, что центр O первой сферы удален от этой плоскости на расстояние 1. Найти угол между проекциями прямых OA и OB на плоскость γ и сравнить его с $\arccos\frac{4}{5}$.

23.16. (МГУ, физический, 1989, 4(6))

В правильной треугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найти отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к стороне основания пирамиды.

23.17. (МГУ, социологический, 2002, 5(6))

В шар радиуса R вписана четырехугольная пирамида с квадратным основанием. Одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а наибольшее боковое ребро образует с ней угол α. Найти боковую поверхность пирамиды и вычислить её значение при $\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{8}{17}}$, $R = \sqrt{17}$.

23.18. (МГУ, ВМиК, Олимпиада “Абитуриент-2005”, 5(6))

Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Известно, что длина перпендикуляра, опущенного из основания H высоты пирамиды SH на грань SDC, равна $\sqrt{6}$, а угол наклона бокового ребра SB к плоскости основания равен $\frac{\pi}{3}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$.

23.19. (МГУ, психологический, 2000, 5(5))

В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник со сторонами $AB = AC = 5$ и $BC = 6$. Ребро SA перпендикулярно основанию пирамиды. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды, если известно, что отношение радиуса вписанной в пирамиду сферы к ребру SA равно $\dfrac{2}{7}$.

23.20. (МГУ, географический, май 1999, 6(6))

Дана треугольная пирамида, длины ребер которой равны 2, 6, 6, 8, 8, 10. Найти радиус описанной вокруг пирамиды сферы и объем пирамиды.

23.21.* (МГУ, биологический, 1981, 5(5))

В треугольной пирамиде длины двух непересекающихся ребер равны 12 и 4, а остальные ребра имеют длину 7. В пирамиду вписана сфера. Найти расстояние от центра сферы до ребра длины 12.

23.22. Доказать, что наименьший объем имеет описанный около шара конус, высота которого вдвое больше диаметра шара.

23.23. (МГУ, 2011, 7(8))

Дана коробка в форме куба со стороной 8. Шар радиусом 2 касается его основания и двух соседних граней. Второй шар радиусом 3 касается двух других граней и первого шара. Найти высоту, на которой находится центр второго шара над плоскостью основания.

23.2 Объемы

23.24. (ЕГЭ, 2010, B9 – *демоверсия*)

Объем первого цилиндра равен 12 м^3. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания – в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

23.25. (ЕГЭ, 2002, B9)

Основание пирамиды — квадрат, сторона которого равна 3. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом, тангенс которого равен $\dfrac{4}{3}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

23.26. (ЕГЭ, 2003, B9 – *демоверсия*)

Дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которой лежит квадрат, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом в $60°$. Отрезок D_1A перпендикулярен плоскости основания. Найдите длину этого отрезка, если площадь боковой поверхности призмы равна $6(\sqrt{3}+2)$.

23.27. (ЕГЭ, 2004, B8 – *демоверсия*) **“Тест”**

Двугранные углы при основании правильной четырехугольной пирамиды равны $45°$, а площадь боковой поверхности равна $36\sqrt{2}$. Найдите объем пирамиды.

23.28. (ЕГЭ, 2003, C3 – *демоверсия*)

Основание пирамиды $MABCD$ — ромб $ABCD$, в котором $\angle A = 60°$. Все двугранные углы при ребрах основания пирамиды равны. Плоскость α, параллельная плоскости основания пирамиды, пересекает высоту MO пирамиды в точке P так, что $MP : PO = 2 : 3$. В образовавшуюся усеченную пирамиду вписан цилиндр, ось которого лежит на высоте пирамиды, а верхнее основание вписано в сечение пирамиды плоскостью α. Найдите объем пирамиды, если объем цилиндра равен $9\pi\sqrt{3}$.

23.29. (ЕГЭ, 2003, C3)

Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $16\pi\sqrt{3}$. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $2\sqrt{3}$. Найдите объем призмы.

23.30. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2007”, 8(10))

Грани двугранного угла пересекают боковую поверхность цилиндра радиусом 5 образуя с его осью углы в $70°$ и $80°$, а ребро двугранного угла перпендикулярно этой оси и удалено от нее на расстояние 11. Найти объем части цилиндра расположенной внутри двугранного угла.

23.31. В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ проведены главная диагональ AC' и диагональ грани $B'D'$. Найти угол и расстояние между этими диагоналями.

23.32. (МГУ, ВМиК, 2002, устный)

В единичном кубе $ABCDA'B'C'D'$ проведены диагонали граней $B'D'$ и DC'. Найти угол и расстояние между этими диагоналями.

23.33. Доказать, что объем произвольного тетраэдра $DABC$ равен $V = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin\varphi$, где d — расстояние между прямыми AB и CD, а φ — угол между ними.

23.34. (МГУ, геологический, 2005, 8(8))

В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы ABC и SAB прямые, двугранный угол между плоскостями ABS и ABC равен $\operatorname{arcctg} \frac{2\sqrt{10}}{3}$. Найдите длину высоты пирамиды, опущенной из вершины B на плоскость ASC, если $BC = 7$, $AB = 4$.

Домашнее задание

23.35. (ЕГЭ, 2002, B9)

В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной, равной 2. Одна из боковых граней также равносторонний треугольник и перпендикулярна основанию. Найдите объем пирамиды.

23.36. (ЕГЭ, 2002, B9)

В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 10, 8 и 6. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

23.37. (ЕГЭ, 2002, B9)

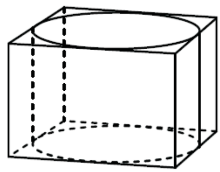
Основание пирамиды — квадрат со стороной, равной $6\sqrt{2}$. Косинус угла наклона каждого бокового ребра к плоскости основания равен $\frac{3}{5}$. Найдите объем пирамиды.

23.38. Бильярдный шар весит 200 г. Сколько граммов будет весить шарик вдвое меньшего радиуса, сделанный из того же материала?

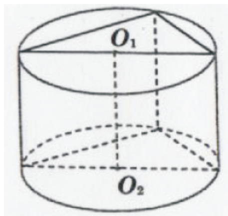
23.39. Объем данного правильного тетраэдра равен 2 см^3. Найдите объем правильного тетраэдра, ребро которого в 3 раза больше ребра данного тетраэдра. Ответ дайте в см^3.

23.40. Радиус основания первого конуса в 2 раза меньше, чем радиус основания второго конуса, а образующая первого конуса в 3 раза больше, чем образующая второго. Чему равна площадь боковой поверхности первого конуса, если площадь боковой поверхности второго равна 22 см^2? Ответ дайте в см^2.

23.41. (ЕГЭ, 2010, B9)
Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 3. Объем параллелепипеда равен 72. Найдите высоту цилиндра.



23.42. (ЕГЭ, 2010, B9)
Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетами 2 и 2. Боковые ребра равны $\dfrac{10}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



23.43. (ЕГЭ, 2007, C4)
Стороны AB и BC основания прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 7 и 5 соответственно, боковое ребро AA_1 равно 3. Точки L, K, M лежат на ребрах AD, A_1B_1, B_1C_1 так, что $AL : AD = 3 : 5$, $A_1K : A_1B_1 = 4 : 7$, $B_1M : B_1C_1 = 2 : 5$. Найдите объем пирамиды с вершиной K и основанием AMC_1L.

23.44. (МГУ, ф-т Государственного управления, 2008, 4(7))
В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ ($ABCD$ и $A'B'C'D'$ — основания, $AA'||BB'||CC'||DD'$) известны длины отрезков: $AD' = \sqrt{34}$, $AC = \sqrt{58}$, $AB' = \sqrt{74}$. Найти объём параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$.

23.45. (МГУ, ИСАА, 1999, 4(7))

Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом $\frac{\pi}{8}$. Каждое боковое ребро равно $\sqrt{6}$ и наклонено к плоскости основания под углом $\frac{5\pi}{13}$. Определить объем пирамиды.

23.46. Вычислить объем треугольной пирамиды, у которой два противоположных ребра 4 и 12, а каждое из остальных ребер равно 7.

23.47. (МГУ, физический, 1997, 6(8))

В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 7, 8, 9. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Найдите высоту пирамиды.

23.48. (МГУ, мех-мат, тест, 2002, 8(10))

Найти максимально возможный объём треугольной пирамиды при условии, что две её грани — равные треугольники со сторонами 5, 6 и 7.

23.49. (МГУ, мех-мат, тест, 2003, 9(10))

В тетраэдре $ABCD$ с ребрами $AB = 5$, $BC = 11$ и $CD = 8$ ближайшая к вершине A точка ребра BC есть точка B, а ближайшая к вершине D точка грани ABC есть точка E, лежащая на ребре BC и делящая его в отношении $BE : EC = 6 : 5$. Какова при этих условиях наименьшая длина ребра AD?

23.50. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2005”, 7(10))

Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 12 и 13, а ее высота образует с высотами боковых граней (опущенными из той же вершины) одинаковые углы, не меньшие $30°$. Какой наибольший объем может иметь такая пирамида?

23.51. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2005”, 10(10))

При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством $3|x|^n + |8y|^n + |z|^n < 1$, а тело Φ — объединение тел Φ_n. Найти объем Φ.

23.3 Углы между плоскостями и прямыми

23.52. (ЕГЭ, 2005, B10 – *демоверсия*)

Концы отрезка BC лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 25, длина отрезка BC равна $14\sqrt{2}$, а угол между прямой BC и плоскостью основания цилиндра равен 45°. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки B и C.

23.53. (ЕГЭ, 2006, B10 – *демоверсия*)

Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является прямоугольник $ABCD$, стороны которого равны $6\sqrt{5}$ и $12\sqrt{5}$. Высота призмы равна 8. Секущая плоскость проходит через вершину D_1 и середины ребер AD и CD. Найдите косинус угла между плоскостью основания и плоскостью сечения.

23.54. (ЕГЭ, 2006, B10) **“Тест”**

Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, площадь которого равна 15, $AB = 7$. Боковое ребро призмы равно 18. Найдите тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью ABC_1.

23.55. (ЕГЭ, 2006, B10)

Основание прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм $ABCD$, в котором $CD = 2\sqrt{3}$, $\angle D = 60^\circ$. Тангенс угла между плоскостью основания и плоскостью A_1BC равен 6. Найдите высоту параллелепипеда.

23.56. (ЕГЭ, 2007, B10 – *демоверсия*)

Высота правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 8, а сторона основания равна $6\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости A_1BD.

23.57. (ЕГЭ, 2007, B10) **“Тест”**

Угол между образующими CA и CB конуса равен 60°, высота конуса равна 4, а радиус основания равен $\dfrac{4\sqrt{15}}{3}$. Найдите градусную меру угла между плоскостью ABC и плоскостью основания конуса.

23.58. (ЕГЭ, 2008, B10 – *демоверсия*)

Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — правильный треугольник ABC, сторона которого равна $8\sqrt{3}$. На ребре отмечена точка P так, что $BP : PB_1 = 3 : 5$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и ACP, если расстояние между прямыми BC и A_1C_1 равно 16.

23.59. (ЕГЭ, 2009, B10 – *демоверсия МИОО*)

В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Объем параллелепипеда равен 4. Чему станет равен объем параллелепипеда, если его высоту увеличить в 3 раза, а стороны квадрата, лежащего в основании, уменьшить в два раза?

23.60. (ЕГЭ, 2009, B10 – *1-я демоверсия*) **"Тест"**

Через образующую цилиндра AB проведены два сечения, пересекающие основание цилиндра: одно — по диаметру AM, другое — по хорде AD. Угол между плоскостями этих сечений равен $60°$. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 60π. Найдите площадь того из данных сечений цилиндра, которое проходит через хорду AD.

23.61. (ЕГЭ, 2009, B10 – *2-я демоверсия*)

Концы отрезка MK лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Угол между прямой MK и плоскостью основания равен $30°$, $MK = 8$, площадь боковой поверхности цилиндра равна 40π. Найдите периметр осевого сечения цилиндра.

23.62. (ЕГЭ, 2009, C2 – *демоверсия МИОО*)

К диагонали куба провели перпендикуляры из остальных вершин куба. На сколько частей и в каком отношении основания этих перпендикуляров разделили диагональ?

23.63. (ЕГЭ, 2010, C2 – *демоверсия*)

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

23.64. (ЕГЭ, 2010, C2)

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: $AB = 8$, $AD = 6$, $CC_1 = 4$. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AD_1B_1.

23.65. (ЕГЭ, 2010, C2)

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 12\sqrt{3}$, $SC = 13$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AM, где M — точка пересечения медиан грани SBC.

23.66. (ЕГЭ, 2003, C3)

В прямую призму, в основании которой лежит ромб с углом 45°, вписан цилиндр. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $5\sqrt{2}$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если объем призмы равен 120.

23.67. (ЕГЭ, 2007, C4 – *демоверсия*) **“Тест”**

Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

23.68. (ЕГЭ, 2009, C4)

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AB = 2$, $AD = 6$, $AA_1 = 6\sqrt{5}$. Точка M лежит на диагонали BC_1. Точка N лежит на диагонали BD. Прямые AM и A_1N пересекаются. Определить тангенс угла между прямой MN и плоскостью ABC, если $BN : ND = 2 : 3$.

Домашнее задание

23.69. (ЕГЭ, 2002, B9) **“Тест”**

Боковое ребро MC пирамиды $MABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC и равно 4. Плоскость, параллельная основанию, проходит через середину высоты пирамиды и пересекает боковые ребра в точках A_1, B_1 и C_1. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $MA_1B_1C_1$, если $AC = BC = 5$, а высота CK треугольника ABC равна 3.

23.70. (ЕГЭ, 2002, В9)

В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной, равной 5. Точка M делит ребро SB в отношении $2:3$, считая от точки S. Через точку M проходит сечение, параллельное основанию пирамиды. Найдите его площадь.

23.71. (ЕГЭ, 2006, В10)

Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 18. Основание призмы — треугольник ABC, площадь которого равна 12, $AB = 5$. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC_1 и плоскостью основания призмы.

23.72. (ЕГЭ, 2007, В10) **"Тест"**

Угол между образующими CA и CB конуса равен $90°$, высота конуса равна 4, а радиус основания равен $\frac{4\sqrt{15}}{3}$. Найдите градусную меру угла между плоскостью ABC и плоскостью основания конуса.

23.73. (ЕГЭ, 2008, В10)

Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно $\sqrt{44}$, точка O — середина стороны BC основания призмы, $BC = 4$. Найдите синус угла между прямой B_1O и плоскостью боковой грани ABB_1A_1.

23.74. (ЕГЭ, 2008, В10)

Радиус основания цилиндра равен 7, высота цилиндра равна 25. В окружность основания вписан остроугольный треугольник ABC такой, что $AC = 4\sqrt{10}$ и $BA = BC$. Отрезки AA_1 и BB_1 — образующие цилиндра. Найдите тангенс угла между плоскостью ACA_1 и плоскостью AB_1C.

23.75. В основании конуса проведена хорда. Через данную хорду и вершину конуса C проведена плоскость так, что угол при вершине C, образовавшегося в сечении треугольника, равен $60°$. Найдите расстояние от центра основания конуса O до данной плоскости, если высота конуса равна 2, а образующая равна $\frac{8}{3}$.

23.76. (ЕГЭ, 2009, B10)

Диаметр и хорда AB основания конуса равны 34 и 30, а тангенс угла наклона образующей к плоскости основания равен 2. Найдите тангенс угла наклона между плоскостью основания конуса и плоскостью сечения, проходящего через вершину конуса и хорду AB.

23.77. (ЕГЭ, 2009, B10) **"Тест"**

Радиус основания цилиндра равен 1, а высота равна $2\sqrt{6}$. Отрезки AB и CD — диаметры одного из оснований цилиндра, а отрезок AA_1 — его образующая. Известно, что $AD = \sqrt{3}$. Найдите косинус угла между прямыми A_1C и BD.

23.78. (ЕГЭ, 2009, B10)

Радиус основания цилиндра равен 5, а высота равна 6. Отрезки AB и CD — диаметры одного из оснований цилиндра, а отрезок AA_1 — его образующая. Известно, что $BC = 6\sqrt{2}$. Найдите синус угла между прямыми A_1C и BD.

23.79. Точки K и M лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Синус угла наклона прямой KM к плоскости основания цилиндра равен $\frac{3}{5}$, $KM = 10$, объем цилиндра равен 150π. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

23.80. Точки B и D лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Синус угла между прямой BD и плоскостью основания цилиндра равен $\dfrac{3}{10}$, $BD = 15$, объем цилиндра равен 450π. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

23.81. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна $3\sqrt{2}$, а объем — 24. Найдите расстояние от вершины основания C до прямой AS.

23.82. В конусе с радиусом основания $1 + \sqrt{3}$ и высотой $3 + \sqrt{3}$ проведено осевое сечение плоскостью SFK, где S — вершина конуса, SK и SF — образующие, SO — высота. Точка M лежит на образующей SF. Найдите расстояние от точки M до SK, если $\angle MOK = 135°$.

23.83. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D.

23.84. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Найдите косинус угла между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 5.

23.85. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB и A_1C.

23.86. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

23.87. Диаметр окружности цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

23.88. В треугольной пирамиде $DABC$ известно, что $BC = 10$, $AD = 24$, расстояние между серединами ребер AC и BD равно 13. Найти угол между прямыми AD и BC.

23.89. (ЕГЭ, 2003, С3)

Около правильной треугольной призмы, объем которой равен 288, описан цилиндр. Расстояние от оси цилиндра до диагонали боковой грани призмы равно $4\sqrt{3}$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

23.90. (ЕГЭ, 2004, С3)

Все грани призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равные ромбы. Углы BAD, BAA_1 и DAA_1 равны 60° каждый. Найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью BDB_1.

23.91. (ЕГЭ, 2004, С3) **“Тест”**

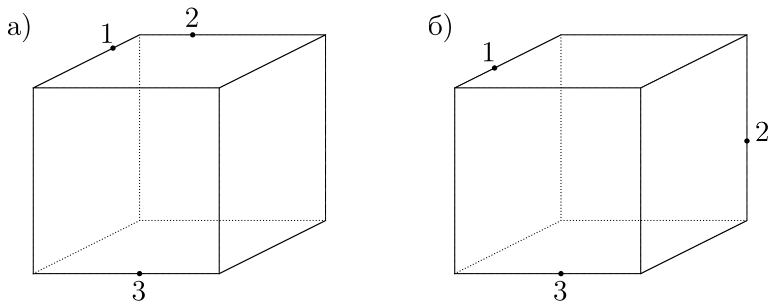
Все ребра призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны между собой. Углы BAA_1 и CAA_1 равны 60° каждый. Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости CA_1B_1, если площадь грани ABB_1A_1 равна $8\sqrt{3}$.

23.92. (ЕГЭ, 2009, С4)

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $AB = 2$, $AD = 3\sqrt{2}$, $AA_1 = \sqrt{7}$. Точка M лежит на отрезке BC_1. Точка N лежит на отрезке BD. Прямые AM и A_1Nпересекаются. Определить тангенс угла между прямой D_1M и плоскостью BCC_1, если $BN : ND = 2 : 5$.

23.4 Сечения

23.93. В кубе построить сечения по трем точкам, лежащим на ребрах куба.



23.94. (ЕГЭ, 2002, B9 – *демоверсия*)

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 6$ м, $BC = 8$ м, $BB_1 = 1{,}6\sqrt{91}$ м. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, параллельной прямой AC и содержащей прямую BA_1.

23.95. (ЕГЭ, 2002, B9)

Основание и боковая грань пирамиды $DABC$ — правильные треугольники ABC и DAC, плоскости которых взаимно перпендикулярны. Найдите AC, если объем пирамиды равен 1.

23.96. (МГУ, “Ломоносов-2009”, 4(9))

Можно ли данный двуграный угол величиной 90° пересечь плоскостью так, чтобы в полученном сечении образовался угол величиной 110°?

23.97. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

В основании правильной треугольной призмы лежит треугольник ABC со стороной a. На боковых ребрах взяты точки A', B' и C', расстояния от которых до плоскости основания равны $\frac{a}{2}, a$ и $\frac{3a}{2}$. Найдите угол между плоскостями ABC и $A'B'C'$.

23.98. (МГУ, мех-мат, 2001, устный)

В единичном кубе с горизонтальным нижним основанием проводятся два плоских сечения. Наивысшая и наинизшая точки первого сечения находятся на расстоянии 0,8 и 0,4 от нижнего основания, а наивысшая и наинизшая точки второго сечения — на расстоянии 0,6 и 0,3. Найти наименьший объем, который при этих условиях может иметь часть куба, расположенная ниже первого сечения, но выше второго.

23.99. (МГУ, мех-мат, 1997, устный) **“Тест”**

На ребре AA' единичного куба $ABCDA'B'C'D'$ взята точка M так, что $AM = 1/7$, а на ребре CC' взята точка K. Указать кратчайший маршрут из точки M в точку K по поверхности куба в зависимости от параметра $\alpha = CK$.

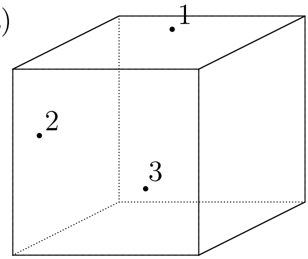
23.100. (МГУ, Олимпиада “Ломоносов-2008”, 8(10))

Основанием прямой призмы $ABCA'B'C'$ служит прямоугольный треугольник с катетами $AB = 3$ и $AC = 4$. Через середину бокового ребра $BB' = 10$ параллельно AC проведена прямая l. Какие значения может принимать площадь параллелограмма, у которого две вершины — точки A и B, а остальные две вершины лежат на прямых $A'C$ и l соответственно?

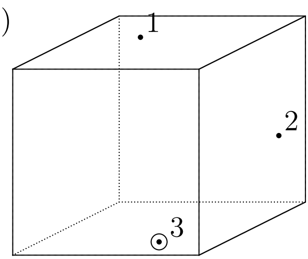
Домашнее задание

23.101. В кубе построить сечения по трем точкам, лежащим на гранях куба.

а)



б)



23.102. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

В пространстве задано некоторое множество точек M. Проекции этого множества на каждую из двух пересекающихся плоскостей являются прямыми линиями. Может ли множество точек M не быть прямой линией?

23.103. (МГУ, ВМиК, 2006, устный)

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, $AD = a$, $AB = b$. На ребре DD' выбрана точка M так, что получившийся в сечении прямоугольного параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, C' и M, четырёхугольник имеет наименьший возможный периметр. Найдите $DM : MD'$.

23.104. Через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, которая отсекает от противоположной грани треугольник площадью 4. Найти боковую поверхность пирамиды, которая отсечена проведенной плоскостью от данной пирамиды, если боковая поверхность данной пирамиды равна 25.

23.105. (МГУ, химический, 1983, 3(5))
Треугольная призма $ABCA'B'C'$ с нижним основанием ABC и боковыми ребрами AA', BB', CC' рассечена плоскостью, проходящей через точки E, F, C, где точка E является серединой ребра AA', точка F лежит на ребре BB', причем $BF : FB' = 1 : 2$. Найти объем части призмы $ABCA'B'C'$, заключенный между секущей плоскостью и нижним основанием этой призмы, если известно, что объем призмы равен V.

23.106. (МГУ, факультет Глобальных процессов, 2005, 7(8))
Верхняя грань $ABCD$ куба $ABCDA'B'C'D'$ ($AA' \| BB' \| CC' \| DD'$ — боковые ребра) является одновременно основанием правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, у которой высота вдвое меньше длины ребра куба. Найдите угол между прямыми AB' и $A'S$.

23.107. (МГУ, физический, 1986, 5(6))
В треугольной пирамиде $SABC$ на ребре SB взята точка M, делящая отрезок SB в отношении $3 : 5$, считая от точки S. Через точки A и M параллельно медиане BD треугольника ABC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды.

23.108. (МГУ, ФНМ, май 2000, 5(6))
Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Длина ребра куба равна 6. Через вершину A, середину M ребра B_1C_1 и некоторую точку K на ребре DD_1 проведена плоскость. Линия пересечения этой плоскости с гранью $A_1B_1C_1D_1$ делит грань $A_1B_1C_1D_1$ на две части, площади которых относятся как $1 : 19$. Найти длину отрезка AK.

23.109. (МГУ, почвоведения, 1998, 5(6))
На ребрах AA' и CC' куба $ABCDA'B'C'D'$ отмечены соответственно точки E и F такие, что $AE = 2A'E$, $CF = 2C'F$. Через точки B, E и F проведена плоскость, делящая куб на две части. Найдите отношение объема части, содержащей точку B', к объему всего куба.

23.110. (МГУ, почвоведения, май 2003, 6(6))

Ребро куба $ABCDA'B'C'D'$ равно a. Найти периметр и площадь сечения, проведенного через диагональ DC' параллельно $D'B$.

23.111. (МГУ, биологический, май 2002, 5(5))

На ребрах AD и BC куба $ABCDA'B'C'D'$ соответственно взяты точки P и Q так, что $AP : PD = 2 : 1$, $BQ : QC = 1 : 3$. В каком отношении делит объём куба плоскость, проходящая через точки P, Q и центр грани $CC'D'D$?

23.112. (МГУ, географический, 1984, 4(5))

Через середину высоты правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру. Найти площадь этого сечения, если длина бокового ребра равна 4, а угол между боковыми ребрами, лежащими в одной грани, равен $\frac{\pi}{3}$.

23.113.* (МГУ, мех-мат, март 2003, 5(6))

Точка O расположена в сечении $AA'C'C$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ размером $2 \times 6 \times 9$ так, что $\angle OAB + \angle OAD + \angle OAA' = 180°$. Сфера с центром в точке O касается плоскостей $A'B'C'$, $AA'B$ и не имеет общих точек с плоскостью $AA'D$. Найти расстояние от точки O до этой плоскости.

23.114.* (МГУ, геологический, 1985, 6(6))

Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром длины 4. На середине ребра CC' взята точка K, а на ребре AA' на расстоянии 1 от вершины A взята точка M. Найти длину кратчайшего пути между точками K и M по поверхности куба.

23.115.* (МГУ, мех-мат, 1969, 4(4))

Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами 1. Найти периметр четырехугольника, зная, что одна из его сторон имеет длину $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ответы, указания, решения

22.6. $\dfrac{4}{3}$. **22.53.** 90°, 25°, 65°. **22.54.** 6. **22.55.** 30. **22.56.** 24.
22.57. $S_{\triangle ABD} = 1$, $R = \dfrac{\sqrt{85}}{2}$. **22.58.** $\arccos\dfrac{5}{7}$. **22.59.** $\dfrac{25}{2\sqrt{13}}$.
22.60. 1 и 4. **22.61.** 5. **22.62.** 40. **22.63.** 16. **22.64.** 1,5. **22.65.** 70°.
22.66. 35°, 55°. **22.67.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **22.68.** $\sqrt{P_1^2 + P_2^2}$.
22.69. $\sqrt{15 + 6\sqrt{3}}$. **22.70.** $h\sqrt{5}$. **22.71.** 30° и 60°. **22.72.** $3, 4, 5$.
22.73. $4(R + r)$. **22.74.** 1 или $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **22.75.** 72. **22.76.** $2 : 5$.
22.77. $\dfrac{2p^2}{2p+h}$. **22.78.** 20. **22.79.** $A = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{4n^2 - m^2}}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$ и $B = \dfrac{\pi}{2} - A$.
22.80. $\pi - 2$. **22.81.** $\dfrac{5\sqrt{13}}{12}$. **22.82.** $8\sqrt{3}$. **22.83.** 30°; 60°.
22.84. $\dfrac{b^2(b^2 - a^2)}{b^2 + a^2}$. **22.85.** $\dfrac{c}{2 + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}$. **22.86.** 3 и 4.
22.87. 30. **22.88.** $\dfrac{ab}{a + b}$. **22.89.** 84, 216. **22.90.** 3 или $2\sqrt{3}$.
22.91. 12. **22.92.** $\sin 18^\circ = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}$. **22.93.** 4. **22.94.** 240.
22.95. 24. **22.97.** 32. **22.98.** 16. **22.99.** $(16{,}9)^2\pi$.
22.100. $\dfrac{2m^2}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$, $\dfrac{2m^2}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$, $\dfrac{2mn}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$.
22.101. $\angle A = \angle C = \operatorname{arctg} 3$, $\angle B = \pi - 2\operatorname{arctg} 3$; $S_{NBMD} = \dfrac{1}{4}$.
22.102. $\dfrac{9\sin(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\sin\beta}$. **22.103.** 1.
22.104. $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ или $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$. **22.105.** 14. **22.106.** 21.
22.107. 10. **22.108.** 14. **22.109.** $\dfrac{\sqrt{5a^2b^2 - a^4 - 4b^4}}{4}$. **22.110.** 60°.
22.111. $3\sqrt{15}$, $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$, $\dfrac{16}{\sqrt{15}}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{31}$, $2\sqrt{6}$. **22.112.** 15.
22.113. $\dfrac{2mn}{3}$. **22.114.** 120°. **22.115.** $6\sqrt{3}$. **22.116.** $\dfrac{8}{\sqrt{15}}$.

22.117. 1. **22.118.** $-5+2\sqrt{10}$. **22.119.** $AB=\dfrac{2d}{3}$, $AC=\dfrac{\sqrt{20d^2-9a^2}}{3}$.
22.120. $\dfrac{20}{9}$. **22.121.** $\dfrac{7\sqrt{13}}{10}$. **22.122.** $CD=2$, $S_{\triangle ABC}=\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{5}$.
22.123. Стороны: 1, 1, $\sqrt{3}$); углы: 30°, 30°, 120°. **22.124.** $\dfrac{51}{96}$.
22.125. $\angle AFB=120^\circ$, $AB=3\sqrt{6}$. **22.126.** $4+\sqrt{2}$.
22.127. $25\sqrt{3}$, $75\sqrt{3}$. **22.128.** 84. **22.129.** $2\sqrt{2}$. **22.130.** $\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$.
22.131. $12\sqrt{5}$. **22.132.** $\sqrt{14}$. **22.133.** $3-\sqrt{3}$. **22.134.** $\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.
22.135. $\sqrt{29}-2$. **22.136.** $\dfrac{15}{2}$. **22.137.** 11. **22.138.** $\sqrt{b(b+c)}$.
22.139. 60. **22.140.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **22.141.** $\dfrac{20\sqrt{3}}{6+\sqrt{21}}$ или $\dfrac{20\sqrt{3}}{4+\sqrt{7}}$.
22.142. 8. **22.143.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, 7. **22.144.** $4\sqrt{3}$. **22.145.** 98,4.
22.146. а) $\dfrac{a\sin C}{\sin(\frac{B}{2}+C)}$; б) $\dfrac{a\sin B\sin C}{\sin(B+C)\cos\frac{B-C}{2}}$.
22.147. $\dfrac{3+2\cos\frac{\gamma}{3}}{1+6\cos\frac{\gamma}{3}}$. **22.148.** $\sqrt{13}$. **22.149.** $\dfrac{9}{2}$. **22.150.** 340.
22.151. 45° или 135°. **22.152.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **22.153.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ или 2.
22.154. 45°, 75°, 60° или 135°, 15°, 30° или 120°, 15°, 45° или 105°, 30°, 45°. **22.155.** $4\sqrt{2}$, 2.
22.156. $AB=1+6\sqrt{2}$, $AC=2$, $BC=5\sqrt{3}$.
22.157. $LC=\dfrac{10}{3}$, $S_{\triangle ABC}=\dfrac{2(-3+2\sqrt{21})}{3}$. **22.158.** 25.
22.159. $\dfrac{6}{25}$. **22.160.** а) $4\sqrt{26}$; б) такого треугольника нет; в) $\dfrac{7}{2}$.
22.161. $\dfrac{15}{2}$. **22.162.** $1:8$. **22.163.** $\dfrac{a+b-\sqrt{(a+b)^2-4ab\sin^2\varphi}}{2}$.
22.164. $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}-\pi$. **22.165.** $\sqrt{2}$; $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}{2}$. **22.167.** $AB=AC=13$.
22.168. 6. **22.169.** $2\sqrt{3}$ или $\dfrac{10}{\sqrt{3}}$. **22.170.** $\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$. **22.171.** $2+\sqrt{6}$.
22.172. $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{6}$. **22.174.** $\dfrac{7}{4}$. **22.175.** а) $1:3$; б) $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{8}}$.

22.176. $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}-\dfrac{\pi}{3}$. **22.177.** $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

22.178. $\operatorname{tg}\angle A=\dfrac{a\sin\angle C}{b-a\cos\angle C}$.

22.179. $\sqrt{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{6}$ или $\sqrt{7}$, $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

22.180. $\dfrac{a\sqrt{4R^2-b^2}\pm b\sqrt{4R^2-a^2}}{2R}$. **22.181.** 120.

22.182. $3(2\sqrt{6}+1)$. **22.183.** 10. **22.184.** $\dfrac{\pi}{2}$, $\arcsin\dfrac{5}{13}$, $\arcsin\dfrac{12}{13}$.

22.185. Нет. **22.186.** $\sqrt{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{6}$. **22.187.** 30°.

22.188. $\dfrac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **22.189.** 240°. **22.190.** 25, 39, 56; 420.

22.191. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{8}$. **22.192.** $5\sqrt{3}$ или $\dfrac{15\sqrt{3}}{7}$. **22.193.** $\dfrac{5\sqrt{14}}{2\sqrt{3{,}01}}$ или 6,25.

22.194. $3(\sqrt{2}-1)$. **22.195.** $AB=AC=2\sqrt{10}$. **22.196.** $9(3+\sqrt{3})$.

22.197. $\dfrac{1}{2}$. **22.198.** 90°, 20°. **22.199.** 5. **22.200.** 1; 7. **22.201.** $\sqrt{ab}$.

22.202. $2\sqrt{3}$. **22.203.** $\sqrt{ab}$. **22.204.** 6. **22.205.** $R_1=1$; $R_2=7$.

22.206. 10. **22.207.** 2. **22.208.** 36; 8. **22.209.** $\dfrac{1}{2}$. **22.210.** $2\sqrt{3}$.

22.211. 24. **22.212.** $CE=6$; $OA=2$. **22.213.** 25 : 81; равны.

22.214. 18; $\dfrac{r_1}{r_2}\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)\bigcup\left(1;\dfrac{5}{3}\right)$. **22.215.** $7+4\sqrt{3}$.

22.216. $\dfrac{23}{5}$ или $\dfrac{11}{2}$. **22.217.** $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ или $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$.

22.218. $2(\sqrt{8}\pm\sqrt{3})$. **22.219.** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$, $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ или $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$, $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$.

22.220. 105° или 165°. **22.221.** $\dfrac{7}{3}$. **22.222.** $\arccos\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}$.

22.223. $\sqrt{2}-1$. **22.224.** 60. **22.225.** 3. **22.226.** $\dfrac{147}{8}$.

22.227. $\sqrt{5+3\sqrt{2}}$. **22.228.** $\dfrac{36}{\sqrt{13}}$. **22.229.** $2+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}+2$.

22.230. $\dfrac{15}{4}$; $\dfrac{20}{3}$. **22.231.** 6. **22.232.** 5. **22.233.** $\sqrt{2}$. **22.234.** 6.

22.235. 30. **22.236.** 90°. **22.237.** 9 : 8. **22.238.** 1,1. **22.239.** 11.

22.240. а) 6 : 5; б) 13. **22.241.** $\sqrt{3}$. **22.242.** 112,5°, равны.

22.243. $\frac{35}{32}$. **22.244.** $\sqrt{2dr}$. **22.245.** 3. **22.246.** 4 : 3. **22.247.** $\sqrt{5}$.
22.248. $\frac{15\sqrt{15}}{32}$. **22.249.** $S = 90\sqrt{3}$. **22.250.** 18. **22.251.** 4 или 6.
22.252. $\sqrt{\frac{S\sin(\alpha+\beta)}{2\sin^3\alpha\,\sin\beta}}$. **22.253.** $\frac{b\sin\alpha}{4\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}$. **22.254.** 24.
22.255. $2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}$. **22.256.** 6. **22.257.** $2\sqrt{3}+4$, $2\sqrt{3}+4$, $4\sqrt{3}+6$.
22.258. $\sqrt{2}$. **22.259.** $\frac{27}{4}$. **22.260.** 4. **22.261.** 80. **22.263.** 5.
22.264. $\arcsin\frac{2}{\pi}$. **22.265.** $\frac{27}{8}$. **22.266.** 672. **22.267.** 77. **22.268.** 224.
22.269. 30. **22.270.** 2. **22.272.** 25,4. **22.273.** 88 или 33.
22.274. $\frac{5}{12}$. **22.275.** $\frac{9}{2}$. **22.276.** $\pi - 2\,\mathrm{arctg}(7\,\mathrm{tg}\,\alpha)$. **22.277.** 5 и 8.
22.278. $\frac{34}{9}$. **22.279.** 8. **22.280.** 12. **22.281.** $\frac{3ab}{4}$.
22.282. $\frac{(a^2-b^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **22.283.** $S = 2\sqrt{15}$. **22.284.** $S = 6$.
22.285. 1,1; 3,9. **22.286.** $\frac{121}{5}+22$; $\frac{726}{25}+22$. **22.287.** 14. **22.288.** 24.
22.289. 39 или 9. **22.290.** m^2. **22.291.** $16\sqrt{5}$. **22.292.** 25.
22.293. 25. **22.294.** $\frac{19}{44}$. **22.295.** 150. **22.296.** 3.
22.297. 36 или $8\sqrt{19}$. **22.298.** $\frac{15}{7}$. **22.299.** $\frac{7\sqrt{35}}{12}$. **22.300.** $10\sqrt{3}$.
22.301. $90\sqrt{3}$. **22.302.** 5 и 3. **22.303.** $\frac{42\sqrt{51}}{625}a^2$. **22.304.** $\frac{48}{5}$.
22.305. 5; $\frac{5}{4}$. **22.306.** $\frac{3ab}{2a+b}$. **22.307.** 8 или 6. **22.308.** $\frac{49}{4}$.
22.309. 10 : 21. **22.310.** $\frac{12}{25}$. **22.312.** 12. **22.313.** 5.
22.314. $S_{ABCD} = 4\sqrt{3}$. **22.315.** 12,5. **22.316.** 1,5. **22.317.** 0,75.
22.318. 48. **22.319.** $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{4}$ или $\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{4}$.
22.320. 72. **22.321.** $\frac{ab}{a+b}$. **22.322.** $32\sqrt{2}$. **22.323.** 16; $16 \pm 8\sqrt{3}$.
22.324. $\frac{2(\sin\alpha+\sin\beta)}{\pi\sin\alpha\sin\beta}$. **22.325.** 5; $\frac{975\sqrt{3}}{196}$. **22.327.** $\frac{13}{2}$.

22.328. 3 и 4; 4 и 3. **22.329.** 3. **22.330.** 6 и 8. **22.331.** $\frac{1}{2}$. **22.332.** 22.

22.333. $\dfrac{5}{\sqrt{2}\sin 15^\circ}$. **22.334.** 60. **22.336.** $AD = 4$, $CD = 6$.

22.337. 7,2. **22.338.** 8. **22.339.** $2S$. **22.340.** $S = 2(\sqrt{6}+\sqrt{2}) < 2\sqrt{15}$.

22.341. $\sqrt{21}$. **22.342.** $\arccos\left(-\dfrac{3}{13}\right)$.

22.343. $\sqrt{\dfrac{2b^2+c^2-a^2}{2}}$, $2b^2+c^2 \geq a^2$. **22.344.** а) $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{7\pi}{12}$; $\dfrac{11\pi}{12}$; б) $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{2\pi}{3}$; α; $\dfrac{5\pi}{6} - \alpha$, где $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4-\sqrt{3}}}$.

22.345. $\arccos\dfrac{5}{8}+\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{4\sqrt{22}}{\sqrt{13}}$. **22.346.** 90°. **22.347.** $4\sqrt{10}-2\sqrt{15}$.

22.348. $\dfrac{47\sqrt{3}}{8}$. **22.349.** $\dfrac{3\sin\frac{5\pi}{24}}{\sin\frac{11\pi}{24}}$. **22.350.** $\sqrt{7}$. **22.351.** 50°.

22.352. 3. **22.353.** $P = 25$; $S = \dfrac{5}{4}\sqrt{143}$. **22.354.** $\dfrac{\sqrt{385}}{4\sqrt{6}}$. **22.355.** 7: 8.

22.356. 319. **22.357.** $\dfrac{1820\sqrt{21}}{341}$. **22.358.** $17\dfrac{11}{17}$. **22.359.** $\pi\sqrt{5}$.

22.360. $\sqrt{3}$. **22.361.** Точка M должна быть серединой BC.

22.362. Отрезок BC в точке M должен делиться пополам.

22.364. В искомом параллелограмме сторона является средней линией, параллельной основанию.

22.365. Искомый отрезок касается в точке M окружности, проходящей через точку M и касающейся сторон данного угла.

22.367. $\dfrac{n^2+n+2}{2}$. **22.368.** 16 при $a = 0$. **22.371.** 32.

22.372. 9. **22.373.** 1, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$. **22.374.** $\left(-\dfrac{91}{17}; \dfrac{44}{17}\right)$.

22.375. $\sqrt{10}$. **22.378.** 1 : 3, считая от точки A. **22.380.** 4.

22.381. $E(0,0)$. **22.382.** $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{5}}\left(=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$. **22.383.** $S = 25$.

23.3. $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. **23.4.** $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$. **23.6.** $324\sqrt{3}$. **23.7.** $\dfrac{5312\pi}{3}$. **23.8.** $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

23.9. $\dfrac{2\sqrt{59}}{15}$. **23.11.** $\dfrac{32}{3}\pi$. **23.12.** $\dfrac{b}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$.

23.13. $\dfrac{a\sqrt{41}}{8}$. **23.14.** $\dfrac{8\pi}{3}$. **23.15.** $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(\arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}<\arccos\dfrac{4}{5}\right)$.

23.16. $\dfrac{r}{a}=\dfrac{1}{3+\sqrt{21}}$. **23.17.** $\sqrt{2}R^2\cos\alpha(2\sin\alpha+\sqrt{2+2\sin^2\alpha})=54$.

23.18. $\dfrac{2\sqrt{42}}{3}$. **23.19.** $\dfrac{\sqrt{769}}{8}$. **23.20.** 5; $\dfrac{2}{3}\sqrt{551}$. **23.21.** $\dfrac{3\sqrt{13}}{\sqrt{5}+\sqrt{13}}$.

23.23. $2+\sqrt{7}$. **23.24.** 9. **23.25.** 15. **23.26.** 3. **23.28.** 250.

23.29. 144. **23.30.** $275\pi(\operatorname{tg}20^\circ\pm\operatorname{tg}10^\circ)$. **23.31.** 90°; $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

23.32. 60°; $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **23.34.** $\dfrac{12}{5}$. **23.35.** 1. **23.36.** 40. **23.37.** 192.

23.38. 25. **23.39.** 54. **23.40.** 33. **23.41.** 2. **23.42.** 20. **23.43.** 9.

23.44. 105. **23.45.** $\sqrt{3}\sin\dfrac{10\pi}{13}\cos\dfrac{5\pi}{13}$. **23.46.** 24. **23.47.** $\dfrac{21\sqrt{15}}{10}$.

23.48. $V_{\max}=\dfrac{144}{5}$. **23.49.** 10. **23.50.** $150\sqrt{3}$. **23.51.** 1. **23.52.** 24.

23.53. 0,6. **23.55.** 18. **23.56.** 4,8. **23.58.** 0,5. **23.59.** 3. **23.61.** 28.

23.62. На три равные части. **23.63.** 30°. **23.64.** $\operatorname{arctg}\dfrac{6}{5}$.

23.65. $\operatorname{arctg}\dfrac{5}{48}$. **23.66.** 106π. **23.68.** 5. **23.70.** 4. **23.71.** 3,75.

23.73. 0,25. **23.74.** 0,4. **23.75.** 1. **23.76.** 4,25. **23.78.** 0,75.

23.79. 60. **23.80.** 90. **23.81.** 4,8. **23.82.** 3. **23.83.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **23.84.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

23.85. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **23.86.** $\dfrac{1}{4}$. **23.87.** 2 или 14. **23.88.** 90°. **23.89.** 416π.

23.90. 45°. **23.92.** $\dfrac{2}{3}$. **23.94.** 80. **23.95.** 2. **23.96.** Да. **23.97.** 45°.

23.98. 0,15. **23.100.** $3\sqrt{29}$ или $3\sqrt{61}$. **23.102.** Может.

23.103. $DM : MD' = a : b$. **23.104.** 20,25. **23.105.** $\dfrac{5}{18}V$.

23.106. $\dfrac{\pi}{2}$; $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **23.107.** 9 : 95. **23.108.** $2\sqrt{10}$. **23.109.** $\dfrac{25}{72}$.

23.110. $a(\sqrt{2}+\sqrt{5})$, $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$. **23.111.** 133 : 803. **23.112.** $5\sqrt{2}$.

23.113. 3. **23.114.** $\sqrt{61}$. **23.115.** $4\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Литература

[1] Вступительные экзамены по математике 2000 — 2002. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2003.

[2] ЕГЭ 2011. Математика. Под редакцией Семенова А.Л., Ященко И.В. М.: Изд-во АСТ. Астрель, 2010.

[3] Математика. Задачи вступительных экзаменов с ответами и решениями. (1993 — 1997 гг.) М.: Издат. отдел УНЦ ДО МГУ, 1998.

[4] Моденов В. П. Пособие по математике. Часть I. М.: Изд-во МГУ, 1977.

[5] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Часть 1. М.: Изд-во "Наука", 1991.

[6] Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Учебное пособие. /Под редакцией Сканави М. И., М.: Изд-во "Высшая школа", 1980.

[7] Ципкин А. Г., Пинский А. И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. М.: Изд-во "Наука", 1989.

[8] Якушева Е. В., Попов А. В., Якушев А. Г. Математика. Все для экзамена. М.: Изд-во "Экономика", 2000.

Сведения об авторе

Галеев Эльфат Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Специалист в области теории аппроксимации, функционального анализа, теории экстремальных задач и методики преподавания элементарной математики. Автор более 150 научных работ, в том числе ряда монографий по теории экстремальных задач и учебно-методических пособий по подготовке к вступительным экзаменам по математике в МГУ. Неоднократно участвовал в составлении вариантов и приеме вступительных экзаменов на различные факультеты МГУ.

Замечания и предложения по улучшению содержания книги можно направлять по адресу:

119992, Москва, МГУ, механико-математический факультет,
кафедра общих проблем управления,
профессору Галееву Эльфату Михайловичу.
моб. тел. 8-926-266-02-87.

e-mail: galeevem@mail.ru

Учебно-методическое пособие

Галеев Эльфат Михайлович

Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ (типы задач и методы их решений).

Часть 5

Геометрия

- **Планиметрия**
- **Стереометрия**

Издание десятое, дополненное

М.: Издательство “Попечительский совет мех-мат. ф-та МГУ”, 2012.—88 с.

Подписано в печать 15.06.2012 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 5,5 п.л.
Заказ 5. Тираж 300 экз.

Издательство “Попечительский совет механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова”.
119992, г. Москва, Ленинские Горы, д.1.

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета.