4 Методы нахождения первоначальной крайней точки

4.1 Переход к решению двойственной задачи

Рассмотрим метод решения задач линейного программирования путем перехода к двойственной задаче и решения полученной двойственной задачи. При этом строка Δ последней симплекс-таблицы даст нам решение исходной задачи.

Пусть нам дана следующая задача линейного программирования:

$$\langle b, y\rangle \to \min;\ A^* y \geq c,\ y \geq 0. \tag{P}$$

Двойственной для нее является задача в нормальной форме

$$\langle c, x\rangle \to \max;\ Ax \leq b,\ x \geq 0. \tag{P^{**}}$$

Сведем эту задачу к эквивалентной задаче в канонической форме путем добавления *искусственных* неотрицательных переменных $\tilde{x} = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ и единичной матрицы I:

$$\langle c, x\rangle \to \max;\ Ax + I\tilde{x} = b,\ x \geq 0,\ \tilde{x} \geq 0 \iff$$

$$\langle \bar{c}, \bar{x}\rangle \to \max;\ \overline{A}\bar{x} = b,\ \bar{x} \geq 0, \tag{$\overline{P}$}$$

где $\bar{c} = (c, 0)$, $\bar{x} = (x, \tilde{x})$, $\overline{A} = AI$. Задачу $(\overline{P})$ с вектором $b \geq 0$ можно решить симплекс-методом, взяв в качестве исходной крайней точки точку $\bar{x}^0 = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$. Эта точка будет крайней по предложению 1 п. 3.2, поскольку столбцы матрицы $\overline{A}$, соответствующие координатам $b_1, \dots, b_m$, как столбцы единичной матрицы I, линейно независимы.

Пусть вектор $\hat{\bar{x}} = (\hat{x}, \hat{\tilde{x}})$ является решением задачи $(\overline{P})$. Тогда соответственно $\hat{x}$ является решением задачи (P^{**}). А по теореме п. 3.3 вектор $\hat{y} := c_b A_b^{-1}$ является решением задачи, двойственной к задаче в канонической форме $\overline{P}$:

$$\langle b, y\rangle \to \min;\ \overline{A}^* y \geq \bar{c}\ \left(\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A^* \\ I \end{pmatrix} y \geq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^* y \geq c,\ y \geq 0 \right). \ (\overline{P}^{**}$$

То есть $\hat{y}$ является решением исходной задачи (P). При этом по теореме двойственности $S_{\overline{P}} = S_{\overline{P}^{**}} = S_P$, а из разложения $A_b\bar{X} = \overline{A} \Leftrightarrow \bar{X} = A_b^{-1}\overline{A} \Leftrightarrow X = A_b^{-1}A$, $\tilde{X} = A_b^{-1}I = A_b^{-1}$ получим, что вектор

$$\hat{y} = c_b A_b^{-1} = c_b\tilde{X} = \tilde{z} = \tilde{z} - \tilde{c} = \tilde{\Delta}.$$

Таким образом, часть строки Δ последней симплекс-таблицы, лежащей под разложениями векторов искусственных переменных, дает нам решение исходной задачи (P).

Пример.

Решить следующую задачу линейного программирования путем перехода к двойственной задаче:

$$4y_1 + 2y_2 \to \min;\ y_i \geq 0,\ i = 1, 2,$$

$$\begin{array}{rcl} 9y_1 + \ y_2 & \geq & 15, \\ 3y_1 + 4y_2 & \geq & 27, \\ y_1 + 5y_2 & \geq & 20. \end{array} \qquad (P)$$

Решение. Двойственной для данной задачи линейного программирования будет следующая задача в нормальной форме (выведите это самостоятельно):

$$15x_1 + 27x_2 + 20x_3 \to \max;\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3,$$

$$\begin{array}{rcl} 9x_1 + 3x_2 + \ x_3 & \leq & 4, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 & \leq & 2. \end{array} \qquad (P^{**})$$

Сведем эту задачу к задаче в канонической форме путем добавления искусственных неотрицательных переменных x_4 и x_5 и, заменяя неравенства равенствами:

$$15x_1 + 27x_2 + 20x_3 \to \max;\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5,$$

$$\begin{array}{rcl} 9x_1 + 3x_2 + \ x_3 + x_4 \qquad & = & 4, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \qquad + x_5 & = & 2. \end{array} \qquad (\overline{P})$$

В выписанной задаче линейного программирования в канонической форме первоначальной крайней точкой возьмем точку $x = (0,0,0,4,2)$. Эта точка будет крайней по предложению 1 п. 3.2, поскольку положительным координатам этой точки соответствуют столбцы единичной матрицы, которые линейно независимы. Значит базисными векторами будут векторы $a^4 = (1,0)$, $a^5 = (0,1)$. Составим первую симплексную таблицу для задачи в канонической форме $(\overline{P})$:

	c		15	27	20	0	0	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	
a^4	0	4	9	3	1	1	0	$\frac{4}{3}$
a^5	0	2	1	$\boxed{4}$	5	0	1	$\frac{1}{2}$
$z = \langle c_b, \cdot\rangle$		$\langle 0\rangle$	0	0	0	0	0	
$\Delta = z - c$			-15	-27	-20	0	0	

В первой симплексной таблице разрешающий столбец a^2, разрешающая строка a^5, разрешающий элемент 4. Заменяем в базисе вектор искусственных переменных a^5 на вектор a^2 и для нового базиса строим вторую симплексную таблицу:

	c		15	27	20	0	0	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	
a^4	0	$\frac{5}{2}$	$\boxed{\frac{33}{4}}$	0	$-\frac{11}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{10}{33}$
a^2	27	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	2
$z = \langle c_b, \cdot\rangle$		$\langle \frac{27}{2}\rangle$	$\frac{27}{4}$	27	$\frac{135}{4}$	0	$\frac{27}{4}$	
$\Delta = z - c$			$-\frac{33}{4}$	0	$\frac{55}{4}$	0	$\frac{27}{4}$	

Во второй симплексной таблице разрешающий столбец a^1, разрешающая строка a^4, разрешающий элемент $\frac{33}{4}$. Заменяем в базисе вектор искусственных переменных a^4 на вектор a^1 и для нового базиса строим третью симплексную таблицу:

	c		15	27	20	0	0
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
a^1	15	$\frac{10}{33}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{33}$	$-\frac{1}{11}$
a^2	27	$\frac{14}{33}$	0	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{33}$	$\frac{3}{11}$
$z=\langle c_b,\cdot\rangle$		$\langle 16\rangle$	15	27	31	1	6
$\Delta=z-c$			0	0	11	1	6

Вектор $\Delta \geq 0$, поэтому точка $\hat{\bar{x}} = \left(\frac{10}{33}, \frac{14}{33}, 0, 0, 0\right)$ является решением двойственной задачи с добавленными искусственными переменными $(\overline{P})$, а вектор $\hat{x} = \left(\frac{10}{33}, \frac{14}{33}, 0\right)$ является решением задачи (P^{**}) и $S_{\overline{P}} = S_{P^{**}} = 16$.

В последней симплексной таблице под разложениями векторов искусственных переменных стоят числа 1, 6, являющиеся значениями решения исходной задачи (P), т. е. вектор $\hat{y} = (1, 6)$ является решением задачи (P) и $S_P = 16$.

4.2 Метод искусственного базиса

Метод добавления искусственных переменных используется для отыскания начальной крайней точки в задаче линейного программирования в канонической форме

$$\langle c, x\rangle \to \max;\ Ax = b,\ x \geq 0. \qquad (P_k)$$

Не ограничивая общности, можем считать, что все координаты вектора b неотрицательны. Если это не так, например, $b_j < 0$, то умножим обе части j-ого уравнения на -1. Поэтому далее считаем, что $b \geq 0$.

Рассмотрим вспомогательную задачу, добавляя искусственные переменные $\tilde{x} = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ и единичную матрицу I,

$$-\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max;\ Ax + I\tilde{x} = b,\ x \geq 0,\ \tilde{x} \geq 0 \iff$$

$$\langle \bar{c}, \bar{x}\rangle \to \max;\ \overline{A}\bar{x} = b,\ \bar{x} \geq 0, \qquad (\overline{P})$$

где $\bar{x} = (x, \tilde{x})$, $\bar{c} = (\mathbf{0}, \tilde{c})$, $\tilde{c} = (-1, \ldots, -1)$, $\overline{A} = AI$. Поскольку значение задачи $S_{\overline{P}} \leq 0$ и множество допустимых элементов $D(\overline{P}) \neq \emptyset$ ($\bar{x} := (\mathbf{0}, b) = (0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m) \in D(\overline{P})$), то значение задачи $\overline{P}$ конечно. По теореме существования п. 3.1 решение в задаче существует. Причем, если в исходной задаче (P_k) множество допустимых элементов непусто ($D(P_k) \neq \emptyset$), то значение задачи $S_{\overline{P}} = 0$, а решением задачи $(\overline{P})$ будет крайняя точка, у которой все искусственные переменные равны нулю. Задачу $(\overline{P})$ можно решить симплекс-методом, взяв в качестве исходной крайней точки точку $(\mathbf{0}, b)$. Действительно, столбцы матрицы $\overline{A} = AI$, соответствующие координатам $x_{n+1} = b_1 \geq 0, \ldots,$ $x_{n+m} = b_m \geq 0$, линейно независимы, так как являются столбцами единичной матрицы и, следовательно, по предложению 1 п. 3.2 точка $(\mathbf{0}, b)$ будет крайней.

При решении задачи $(\overline{P})$ симплекс-методом могут возникнуть три исхода:

1) *Не все искусственные переменные равны нулю.* Это означает, что исходная задача (P_k) не имеет допустимых элементов.

Действительно, если не все искусственные переменные равны нулю, то $0 > S_{\overline{P}}$. Предположим, что исходная задача имеет допустимые элементы, например, точка $x \in D(P_k)$. Но тогда точка $\bar{x} = (x, \mathbf{0}) \in D(\overline{P})$, а $\langle \bar{c}, \bar{x} \rangle = \langle (\mathbf{0}, -\mathbf{1}), (x, \mathbf{0}) \rangle = 0 > S_{\overline{P}} = \sup\limits_{\bar{x} \in D(\overline{P})} \langle \bar{c}, \bar{x} \rangle$ — противоречие. Значит, наше предположение, что исходная задача имеет допустимые элементы, неверно.

2) *Все искусственные переменные равны нулю и среди базисных векторов нет векторов, соответствующих искусственным переменным.* Это означает, что решением в задаче $(\overline{P})$ будет $\hat{\bar{x}} = (\hat{x}, \mathbf{0})$ — крайняя точка множества $D(\overline{P})$. При этом $S_{\overline{P}} = \langle \bar{c}, \bar{x} \rangle = \langle (\mathbf{0}, -\mathbf{1}), (\bar{x}, \mathbf{0}) \rangle = 0$. Точка $\hat{x}$ также будет крайней точкой множества $D(P_k)$ по предложению 1, поскольку столбцы матрицы A, соответствующие базисным координатам, линейно независимы.

Далее, взяв в качестве первоначальной крайней точки точку $\hat{x}$, можем приступать ко второму этапу — решению задачи (P_k) по симплекс-методу с найденной крайней точкой. Таким образом, мы имеем двуэтапный метод решения задачи (P_k).

3) *Все искусственные переменные равны нулю и среди базисных векторов есть вектора, соответствующие искусственным переменным.* В этом случае надо исключить из числа базисных вектора, соответствующие искусственным переменным.

Пусть, например, в последней таблице имеется строка с искусственной переменной $x_{i_0} = 0$ и базисным вектором a^{i_0}, $n+1 \leq i_0 \leq n+m$. Будем считать эту строку разрешающей. В качестве разрешающего столбца возьмем столбец a^{j_0}, $1 \leq j_0 \leq n$, такой, что $x_{i_0 j_0} \neq 0$. Здесь неважно $x_{i_0 j_0}$ больше или меньше 0, поскольку берем $t_{i_0 j_0} = 0$. Столбец x_b новой симплексной таблицы при этом не изменится (по правилу прямоугольника $x'_i = x_i - \dfrac{x_{i_0} x_{i\,j_0}}{x_{i_0\,j_0}} = x_i$, так как $x_{i_0} = 0$). В базисе новой симплексной таблицы вместо вектора a^{i_0}, соответствующего искусственной переменной x_{i_0}, будет стоять вектор a^{j_0}. Значение функционала $\langle c, x \rangle$ также не изменится, поскольку $t_{i_0 j_0} = 0$.

Этот процесс закончится удалением всех базисных векторов, соответствующих искусственным переменным, с заменой их на неискусственные, или окажется, что $x_{i_0\,j} = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Так как $x_{i\,j}$ — i-я координата разложения вектора a^j по базисному вектору a^i, то тогда все векторы a^j, $j = 1, \ldots, n$, включая вектор b, можно разложить по базисным без вектора a^{i_0}. Значит, i_0-я строка исходной системы уравнений является линейно зависимой от остальных строк и на втором этапе можем просто вычеркнуть из симплексной таблицы i_0-ю строку, содержащую эту искусственную переменную, и начать второй этап с меньшим числом базисных векторов.

Таким образом, двуэтапный симплекс-метод позволяет для любой задачи линейного программирования в канонической форме: 1) обнаружить, что исходная задача не имеет допустимых элементов, или 2) найти первоначальную крайнюю точку в задаче (P) и решить задачу по симплекс-методу, или 3) исключить линейно зависимые равенства и решить задачу по симплекс-методу с найденной крайней точкой, имеющей менее

m положительных элементов.

Замечание. Вместо такого двуэтапного решения задачи (P_k) можно решать следующую задачу (ее принято называть М-задачей)

$$\langle \bar{c}, (x, \tilde{x}) \rangle \to \max;\ Ax + I\tilde{x} = b,\ x \geq 0,\ \tilde{x} \geq 0,$$

где $\bar{c} = (c, -M, \dots, -M) \in \mathbb{R}^{n+m}$, M — положительное число. Нетрудно понять, что при любом достаточно большом M первые n координат полученного решения определяют решение в (P_k), а искусственные переменные равны нулю.

4.3 Примеры

Пример 1. Решить методом искусственного базиса задачу:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max;\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4,$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + \ x_3 + x_4 & = & 10, \\ 2x_1 + \ x_2 + 5x_3 \qquad & = & 20, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad & = & 15. \end{array}$$

Решение. Рассмотрим вспомогательную задачу, добавляя искусственные переменные x_5, x_6:

$$-x_5 - x_6 \to \max;\ x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 6, :$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + \ x_3 + x_4 \qquad & = & 10, \\ 2x_1 + \ x_2 + 5x_3 \quad + x_5 \quad & = & 20, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad + x_6 & = & 15. \end{array}$$

Исходная крайняя точка $x = (0, 0, 0, 10, 20, 15)$. Базисные векторы $a^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Составим первую симплексную таблицу для вспомогательной задачи:

	c		0	0	0	0	-1	-1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	
a^4	0	10	1	2	1	1	0	0	10
a^5	-1	20	2	1	$\boxed{5}$	0	1	0	4
a^6	-1	15	1	2	3	0	0	1	5
$z=\langle c_b,\cdot\rangle$		$\langle -35\rangle$	-3	-3	-8	0	-1	-1	
$\Delta=z-c$			-3	-3	-8	0	0	0	

Из таблицы видно, что разрешающим столбцом является столбец a^3, разрешающая строка a^5. Заменяем в базисе вектор a^5 на вектор a^3 и для нового базиса строим вторую симплексную таблицу:

	c		0	0	0	0	-1	-1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	
a^4	0	6	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{10}{3}$
a^3	0	4	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	20
a^6	-1	3	$-\frac{1}{5}$	$\boxed{\frac{7}{5}}$	0	0	$-\frac{3}{5}$	1	$\frac{15}{7}$
$z=\langle c_b,\cdot\rangle$		$\langle -3\rangle$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0	0	$\frac{3}{5}$	-1	
$\Delta=z-c$			$\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	0	0	$\frac{8}{5}$	0	

Из таблицы видно, что разрешающим столбцом является столбец a^2, разрешающая строка a^6. Заменяем в базисе вектор a^6 на вектор a^2 и для нового базиса строим третью симплексную таблицу:

	c		0	0	0	0	-1	-1
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
a^4	0	$\frac{15}{7}$	$\frac{6}{7}$	0	0	1	$\frac{4}{7}$	$-\frac{9}{7}$
a^3	0	$\frac{25}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	1	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$
a^2	0	$\frac{15}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	0	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$
$z=\langle c_b,\cdot\rangle$		$\langle 0\rangle$	0	0	0	0	0	0
$\Delta=z-c$			0	0	0	0	1	1

Вектор $\Delta \geq 0$, поэтому точка $\hat{x} = \left(0, \frac{15}{7}, \frac{25}{7}, \frac{15}{7}, 0, 0\right)$ является решением вспомогательной задачи и $S_{\max} = 0$.

Перейдем к решению основной задачи. Составим первую симплексную таблицу для начальной крайней точки
$x = \left(0, \frac{15}{7}, \frac{25}{7}, \frac{15}{7}, 0, 0\right)$. Разложения векторов x, a^1 по базису a^4, a^3, a^2 берем из последней симплексной таблицы.

	c		1	2	3	-1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	
a^4	-1	$\frac{15}{7}$	$\boxed{\frac{6}{7}}$	0	0	1	$\frac{5}{2}$
a^3	3	$\frac{25}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	1	0	$\frac{25}{3}$
a^2	2	$\frac{15}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	0	0	
$z = \langle c_b, \cdot\rangle$		$\langle\frac{90}{7}\rangle$	$\frac{1}{7}$	2	3	-1	
$\Delta = z - c$			$-\frac{6}{7}$	0	0	0	

Разрешающим столбцом является столбец a^1, разрешающая строка a^4. Заменяем в базисе вектор a^4 на вектор a^1 и для нового базиса строим вторую симплексную таблицу:

	c		1	2	3	-1
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4
a^1	1	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$\frac{7}{6}$
a^3	3	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$
a^2	2	$\frac{5}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{6}$
$z = \langle c_b, \cdot\rangle$		$\langle 15\rangle$	1	2	3	0
$\Delta = z - c$			0	0	0	1

Вектор $\Delta \geq 0$, поэтому точка $\hat{x} = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$ является решением исходной задачи и $S_{\max} = 15$.

Пример 2. Решить методом искусственного базиса задачу:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max;\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3,$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 5, \\ 2x_1 + x_2 & = & 3, \\ -2x_1 + 2x_2 & = & 4. \end{array}$$

Решение. Рассмотрим вспомогательную задачу, добавляя искусственные переменные x_4, x_5:

$$-x_4 - x_5 \to \max;\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5,$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 5, \\ 2x_1 + \ x_2 \quad + x_4 & = & 3, \\ -2x_1 + 2x_2 \qquad\quad + x_5 & = & 4. \end{array}$$

Исходная крайняя точка $\bar{x} = (0, 0, 5, 3, 4)$. Базисные векторы $a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Составим первую симплексную таблицу для вспомогательной задачи:

	c		0	0	0	-1	-1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	
a^3	0	5	1	1	1	0	0	5
a^4	-1	3	2	1	0	1	0	3
a^5	-1	4	-2	$\boxed{2}$	0	0	1	2
$z = \langle c_b, \cdot \rangle$		$\langle -7 \rangle$	0	-3	0	-1	-1	
$\Delta = z - c$			0	-3	0	0	0	

Разрешающий столбец a^2, разрешающая строка a^5. Заменяем в базисе вектор a^5 на вектор a^2 и для нового базиса строим вторую симплексную таблицу:

	c		0	0	0	-1	-1	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	
a^3	0	3	2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
a^4	-1	1	$\boxed{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
a^2	0	2	-1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	
$z = \langle c_b, \cdot \rangle$		$\langle -1 \rangle$	-3	0	0	-1	$\frac{1}{2}$	
$\Delta = z - c$			-3	0	0	0	$\frac{3}{2}$	

Во второй симплексной таблице разрешающий столбец a^1, разрешающая строка a^4. Заменяем в базисе вектор искусственных переменных a^4 на вектор a^1 и для нового базиса строим третью симплексную таблицу:

	c		0	0	0	-1	-1
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5
a^3	0	$\frac{7}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$
a^1	0	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$
a^2	0	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$z = \langle c_b, \cdot \rangle$		$\langle 0 \rangle$	0	0	0	0	0
$\Delta = z - c$			0	0	0	1	1

Вектор $\Delta \geq 0$, поэтому точка $\hat{\hat{x}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}, 0, 0\right)$ является решением вспомогательной задачи с добавленными искусственными переменными, и $S_{\max} = 0$.

Перейдем к решению основной задачи. Составим первую симплексную таблицу для начальной крайней точки $x = (1/3, 7/3, 7/3)$. Разложения вектора x по базису a^3, a^1, a^2 берем из последней симплексной таблицы.

	c		1	-2	1
базис		x_b	a^1	a^2	a^3
a^3	1	$\frac{7}{3}$	0	0	1
a^1	1	$\frac{1}{3}$	1	0	0
a^2	-2	$\frac{7}{3}$	0	1	0
$z = \langle c_b, \cdot \rangle$		$\langle -2 \rangle$	1	-2	1
$\Delta = z - c$			0	0	0

Вектор $\Delta \geq 0$, поэтому точка $\hat{x} = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$ является решением исходной задачи и $S_{\max} = -2$.

Заметим, что на самом деле исходная задача тривиально решается, так как мы имеем систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными. И эта система имеет единственное решение $x = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

Пример 3. Решить, вводя искусственные переменные задачу:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \max; \;\; x_i \geq 0, \;\; i = 1, 2, 3, 4,$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 & \leq & 30, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & \leq & 40, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 & \leq & 25. \end{array}$$

Добавив неотрицательные переменные x_5, x_6, x_7, получим задачу в канонической форме:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \max;\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 7,$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 & = & 30, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 & = & 40, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_7 & = & 25. \end{array}$$

Исходная крайняя точка $x = (0, 0, 0, 0, 30, 40, 25)$. Базисные векторы $a^5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a^7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Составим первую симплексную таблицу:

	c		2	1	3	5	0	0	0	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	
a^5	0	30	2	3	1	$\boxed{2}$	1	0	0	15
a^6	0	40	4	2	1	2	0	1	0	20
a^7	0	25	1	2	3	1	0	0	1	25
$z = \langle c_b, \cdot \rangle$		$\langle 0 \rangle$	0	0	0	0	0	0	0	
$\Delta = z - c$			-2	-1	-3	-5	0	0	0	

В первой симплексной таблице разрешающим столбцом является столбец a^4, Разрешающая строка a^5, $t = 15$. Заменяем в базисе вектор a^5 на вектор a^4 и для нового базиса строим вторую симплексную таблицу:

	c		2	1	3	5	0	0	0	t
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	
a^4	5	15	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	30
a^6	0	10	2	-1	0	0	-1	1	0	
a^7	0	10	0	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{5}{2}}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	4
$z = \langle c_b, \cdot \rangle$		$\langle 75 \rangle$	5	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	5	$\frac{5}{2}$	0	0	
$\Delta = z - c$			3	$\frac{13}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	0	

Во второй симплексной таблице разрешающий столбец a^3, разрешающая строка a^7, $t = 4$. Заменяем в базисе вектор a^7

на вектор a^3 и для нового базиса строим третью симплексную таблицу для базиса a^4, a^6, a^3:

	c		2	1	3	5	0	0	0
базис		x_b	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7
a^4	5	13	1	$\frac{7}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$
a^6	0	10	2	-1	0	0	-1	1	0
a^3	3	4	0	$\frac{1}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
$z = \langle c_b, \cdot \rangle$		$\langle 77 \rangle$	5	$\frac{38}{5}$	3	5	$\frac{12}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
$\Delta = z - c$			3	$\frac{33}{5}$	0	0	$\frac{12}{5}$	0	$\frac{1}{5}$

Вектор $\Delta \geq 0$, поэтому крайняя точка $\hat{x} = (0, 0, 4, 13, 0, 10, 0)$ является решением расширенной задачи, а решением исходной задачи является точка $\hat{x} = (0, 0, 4, 13)$, $S_{\max} = 77$.

Задачи

Задачи линейного программирования в канонической форме с незаданной первоначальной крайней точкой. Решить методом искусственного базиса.

4.1. $x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max; \quad x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3,$

$$\begin{aligned} x_1 - \ x_2 + x_3 &= 3, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

4.2. $x_1 - 10x_2 + x_3 \to \max; \quad x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3,$

$$\begin{aligned} x_1 - \ 5{,}5x_2 - 7x_3 &= -13, \\ x_1 - 14{,}5x_2 + 7x_3 &= 15. \end{aligned}$$

4.3. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \to \max; \quad x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3, 4,$

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 - \ x_3 + \ x_4 &= 2, \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 &= 24. \end{aligned}$$

4.4. $x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \to \max; \quad x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3, 4,$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3, \\ 2x_1 \qquad\quad + x_3 - x_4 &= 4. \end{aligned}$$

4.5. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max; \quad x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4,$

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - \ x_4 & = & 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 & = & 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - \ x_4 & = & 4. \end{array}$$

4.6. $x_1 + 10x_2 - x_3 + 5x_4 \to \max; \quad x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4,$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - \ x_3 - x_4 & = & 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 2, \\ x_1 + 5x_2 + \ x_3 - x_4 & = & 5. \end{array}$$

4.7. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \to \max; \quad x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5,$

$$\begin{array}{rcl} 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 7x_5 & = & 2, \\ 6x_1 \qquad + x_3 - 2x_4 + 7x_5 & = & 2, \\ x_1 + x_2 \qquad - 2x_4 + 7x_5 & = & 2. \end{array}$$

4.8. $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 \to \max; \quad x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5,$

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + x_2 + \ x_3 + \ x_4 - 2x_5 & = & 10, \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 & = & 20, \\ 10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5 & = & 30. \end{array}$$

4.9. $x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \max; \quad x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 6,$

$$\begin{array}{rcl} 14x_1 - 14x_2 + 12x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 3x_6 & = & 8, \\ x_1 - \ x_2 + \ 2x_3 \qquad + \ x_5 \qquad & = & 0, \\ 16x_1 - 16x_2 + \ 8x_3 + 7x_4 + 4x_5 + 5x_6 & = & 12. \end{array}$$