8 Гладкая задача с равенствами и неравенствами

8.1 Постановка задачи

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства. Отображение $F\colon X \to Y$, функционалы $f_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, обладают некоторой гладкостью. *Гладкой экстремальной задачей с ограничениями типа равенств и неравенств* в нормированных пространствах называется следующая задача:

$$f_0(x) \to \min; \quad f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ F(x) = 0. \qquad (P)$$

8.2 Необходимые условия I порядка.

Теорема (правило множителей Лагранжа)**.** *Пусть* $\hat{x} \in locminP$ *— точка локального минимума в задаче* (P)*,* X, Y *— банаховы пространства* (условие банаховости)*, отображения* $F, f_i \in SD(\hat{x})$*,* $i = 0, 1, \ldots, m$*, — строго дифференцируемы в точке* $\hat{x}$ (условие гладкости)*,* $Im\, F'(\hat{x})$ *— замкнутое подпространство в* Y (ослабленное условие регулярности)*. Тогда существуют множители Лагранжа — вектор* $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ *и функционал* $y^* \in Y^*$ *не равные одновременно нулю,* $(\lambda, y^*) \neq 0$*, такие, что для функции Лагранжа задачи* (P)

$$\mathscr{L}(x) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) + \langle y^*, F(x) \rangle$$

выполняются условия:

a) стационарности: $\mathscr{L}'(\hat{x}) = 0$

$$\Bigg(\iff \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \langle f_i'(\hat{x}), h \rangle + \langle y^*, F'(\hat{x})[h] \rangle = 0 \quad \forall\ h \in X$$

$$\iff \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(\hat{x}) + (F'(\hat{x}))^* y^* = 0 \Bigg);$$

b) дополняющей нежесткости: $\lambda_i f_i(\hat{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m;$

c) неотрицательности: $\lambda_i \geq 0,\ i = 0, 1, \ldots, m.$

В задаче на максимум вместо неравенства $\lambda_0 \geq 0$ надо писать $\lambda_0 \leq 0$ (остальные условия неотрицательности не изменяются: $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$).

$\lhd$ Можно считать, что $f_0(\hat{x}) = 0$, иначе рассмотрим функцию $\widetilde{f}_0(x) = f_0(x) - f_0(\hat{x})$. Если $f_i(\hat{x}) \neq 0$ при $1 \leq i \leq m$, то отбросим эти ограничения, поскольку для локального экстремума в гладкой задаче ограничения $f_i(x) < 0$ несущественны и полагаем $\lambda_i = 0$. Таким образом, можно считать, что условия дополняющей нежесткости уже выполнены.

A) *Вырожденный случай.* Пусть $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) \neq Y$. Тогда $\operatorname{Im} F'(\hat{x})$ есть замкнутое собственное подпространство Y. По лемме о нетривиальности аннулятора замкнутого собственного подпространства существует ненулевой функционал $y^* \in (\operatorname{Im} F'(\hat{x}))^\perp \subset Y^*$. Это означает, что $\langle y^*, y\rangle = 0\ \forall\ y \in \operatorname{Im} F'(\hat{x}) \Leftrightarrow \langle y^*, F'(\hat{x})[h]\rangle = 0\ \forall\ h \in X \Leftrightarrow$ (по определению сопряженного оператора) $\langle \big(F'(\hat{x})\big)^* y^*, h\rangle = 0\ \forall\ h \in X \Leftrightarrow \big(F'(\hat{x})\big)^* y^* = 0$. Остается положить $\lambda_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$, и приходим к утверждению теоремы.

B) *Невырожденный случай.* Пусть $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$. Положим $b = (b_0, \ldots, b_m)$, $B := \{(b, y) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y \mid \exists\ h \in X : \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle \leq b_i,\ i = 0, \ldots, m;\ y = F'(\hat{x})[h]\}$.

Докажем, что B — выпуклое множество.
Действительно, возьмем две точки $(b, y), (b', y') \in B$. Тогда по определению множества B существуют точки h, h' такие, что $\langle f_i'(\hat{x}), h\rangle \leq b_i$, $\langle f_i'(\hat{x}), h'\rangle \leq b_i'$, $y = F'(\hat{x})[h]$, $y' = F'(\hat{x})[h']$. Покажем, что выпуклая комбинация $(b_\alpha, y_\alpha) = \alpha(b, y) + (1-\alpha)(b', y') \in B\ \forall\ \alpha \in [0, 1]$. Положим $h_\alpha = \alpha h + (1-\alpha)h'$, $y_\alpha = \alpha y + (1-\alpha)y'$. Тогда

$$\langle f_i'(\hat{x}), h_\alpha\rangle = \langle f_i'(\hat{x}), \alpha h + (1-\alpha)h'\rangle = \\ = \alpha\langle f_i'(\hat{x}), h\rangle + (1-\alpha)\langle f_i'(\hat{x}), h'\rangle \leq \alpha b_i + (1-\alpha)b_i' = b_\alpha,$$

$$y_\alpha = \alpha y + (1-\alpha)y' = \alpha F'(\hat{x})[h] + (1-\alpha)F'(\hat{x})[h'] = \\ = F'(\hat{x})[\alpha h + (1-\alpha)h'] = F'(\hat{x})[h_\alpha].$$

Значит, $(b_\alpha, y_\alpha) \in B$.

Докажем, что $\operatorname{int} B \neq \emptyset$.
Положим $B_X := \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$. По т. Банаха об открытости образ открытого множества открыт, значит, множество $F'(\hat{x})B_X$ открыто. При линейном отображении ноль переходит в ноль. Поэтому $0 \in \operatorname{int} F'(\hat{x})B_X$, и, следовательно, $F'(\hat{x})B_X \supset \delta B_Y := \{y \in Y \mid \|y\| < \delta\}$ с некоторым $\delta > 0$. Значит, для любого $y \in \delta B_Y$ существует $h(y) \in B_X$ ($\|h(y)\| < 1$) такой, что $F'(\hat{x})h(y) = y$. Тогда $\langle f_i'(\hat{x}), h(y)\rangle \le |\langle f_i'(\hat{x}), h(y)\rangle| \le \|f_i'(\hat{x})\| \cdot \|h(y)\| \le \|f_i'(\hat{x})\| \le \max\limits_{i=0,\dots,m} \|f_i'(\hat{x})\| = M$. Возьмем $\hat{b}_i > M+1$, $i = 0, \dots, m$, $\hat{b} = (\hat{b}_0, \dots, \hat{b}_m)$. Рассмотрим шар $B_{\mathbb{R}^{m+1}_{\hat{b}}}$ радиуса единица в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$ с центром в точке $\hat{b}$. Тогда $B_{\mathbb{R}^{m+1}_{\hat{b}}} \times \delta B_Y \subset B$. Значит, $\operatorname{int} B \neq \emptyset$.

Докажем, что $0 \notin \operatorname{int} B$. Предположим противное, и придем к противоречию с тем что $\hat{x} \in \operatorname{locmin}$. Действительно, если $0 \in \operatorname{int} B$, то при достаточно малом $\beta < 0$ точка $(\beta, \dots, \beta, 0) \in B$. Значит, существует h такой, что $\langle f_i'(\hat{x}), h\rangle \le \beta < 0$, $i = 0, 1, \dots, m$, $F'(\hat{x})[h] = 0$. В рассматриваемом нами невырожденном случае $\operatorname{Im} F'(\hat{x}) = Y$ выполняются все условия теоремы о касательном пространстве. По этой теореме $\operatorname{Ker} F'(\hat{x}) = T_{\hat{x}}M$, где $M := \{x \in X \mid F(x) = F(\hat{x}) = 0\}$. Поэтому $h \in T_{\hat{x}}M$ и, следовательно, существует отображение $r\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to X$ ($\varepsilon > 0$) такое, что $\|r(t)\| = o(t)$,

$$\hat{x} + th + r(t) \in M \iff F\big(\hat{x} + th + r(t)\big) = 0 \;\forall\, t \in [-\varepsilon, \varepsilon]. \tag{1}$$

При малых $t > 0$ для $i = 0, 1, \dots, m$ имеем неравенства

$$f_i\big(\hat{x} + th + r(t)\big) = f_i(\hat{x}) + t\langle f_i'(\hat{x}), h\rangle + o(t) < 0. \tag{1_i}$$

Из неравенств (1), (1_i), $i = 1, \dots, m$, следует, что $\hat{x} + th + r(t) \in D(P)$. Но при этом неравенство (1_0) $\Leftrightarrow f_0\big(\hat{x} + th + r(t)\big) < 0 = f_0(\hat{x})$ противоречит тому, что $\hat{x} \in \operatorname{locmin}$. Значит, $0 \notin \operatorname{int} B$.

По I т. отделимости множество B и точку 0 можно отделить. Значит, существует функционал $(\lambda, y^*) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m, y^*) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y^*$, $(\lambda, y^*) \neq 0$, такой, что

$$\inf_{(b,y)\in B}\{\langle(\lambda, y^*), (b, y)\rangle\} \ge \langle(\lambda, y^*), (0, 0)\rangle \iff$$

$$\langle\lambda, b\rangle + \langle y^*, y\rangle \ge 0 \;\forall\, (b, y) \in B. \tag{$*$}$$

Условие неотрицательности. Поскольку множество $(\mathbb{R}_+^{m+1}, 0) \subset B$, то точка $(e_i, 0) \in B$, где $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$. Подставив эту точку в неравенство $(*)$, получим, что $\lambda_i \geq 0$, $i = 0, \dots, m$.

Условие стационарности. Точки $(\langle f_0'(\hat{x}), h\rangle, \dots, \langle f_m'(\hat{x}), h\rangle, F'(\hat{x})[h]) \in B$ для любого $h \in X$. Подставив эту точку в неравенство $(*)$, получим, что $\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle + \langle y^*, F'(\hat{x})[h]\rangle \geq 0$. Поскольку в неравенстве можно взять и h, и $-h$, то неравенство выполняется в виде равенства: $\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i \langle f_i'(\hat{x}), h\rangle + \langle y^*, F'(\hat{x})[h]\rangle = 0$. Это и есть условие стационарности функции Лагранжа $\mathscr{L}(x)$. $\triangleright$