5.1.4 Сопряженное пространство, оператор

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства.
$X^* = \{x^* : X \to \mathbb{R}\}$ — сопряженное к X пространство линейных непрерывных функционалов.
X^* — банахово относительно нормы $\|x^*\|_{X^*} := \max\limits_{\|x\|_X \le 1} \langle x^*, x\rangle$,
где $\langle x^*, x\rangle$ означает действие функционала x^* на элемент x.
Для $\Lambda \in L(X, Y)$ можно определить сопряженный оператор $\Lambda^* \colon Y^* \to X^*$, действующий по формуле

$$\langle \Lambda^* y^*, x\rangle = \langle y^*, \Lambda x\rangle \ \forall\ x \in X.$$

Лемма

Всякий функционал $\Lambda \in (X \times Y)^*$ однозначно представляется в виде $\langle \Lambda, (x, y)\rangle = \langle x^*, x\rangle + \langle y^*, y\rangle$, где $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$.

5.2 Определения производных

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow f'(\hat{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\hat{x}+h) - f(\hat{x})}{h} \tag{1}$$

или асимптотическое разложение

$$f(\hat{x}+h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})h + o(h) \quad (h \to 0) \tag{2}$$

дают одно и то же понятие дифференцируемости.

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ или $f\colon X \to Y$

(X, Y — лин. нормированные пространства, f — отображение пространства X или окрестности точки $\hat{x} \in X$ в Y)

$\Rightarrow$ существует несколько различных подходов к понятию дифференцируемости.

(1) $\to$ производная по направлению, вариация по Лагранжу и производная Гато.

(2) $\to$ производная Гато, Фреше, строгая дифф-цируемость.

5.2.1. Производная по направлению

Определение

f имеет в точке $\hat{x}$ производную по направлению h, если $\exists$

$$\lim_{\lambda \to +0} \frac{f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x})}{\lambda} =: \delta_+ f(\hat{x}, h).$$

Плюс в индексе здесь указывает на то, что берется именно предел справа.

Определение

f имеет в точке $\hat{x}$ вариацию по Лагранжу, если $\exists$

$$\delta f(\hat{x}, h) := \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\hat{x} + \lambda h) - f(\hat{x})}{\lambda} \quad \forall\, h \in X.$$

Отображение $h \to \delta f(\hat{x}, h)$ называют вариацией по Лагранжу, $\delta f(\hat{x}, \cdot) \colon X \to Y$.

5.2.3. Производная Гато

Определение

Если оператор вариации по Лагранжу $\delta f(\hat{x}, \cdot) \in L(X, Y)$, то говорят, что отображение f дифференцируемо по Гато в точке $\hat{x}$, а оператор $\delta f(\hat{x}, \cdot)$ называется производной Гато отображения f в точке $\hat{x}$ и обозначается $f'_G(\hat{x})$.

Если f дифференцируемо по Гато в точке $\hat{x} \Rightarrow$
$\forall$ фиксированного $h \in X$

$$f(\hat{x} + \lambda h) = f(\hat{x}) + \lambda f'_G(\hat{x})[h] + r(h, \lambda),$$

где $\|r(h, \lambda)\|_Y = o(|\lambda|)$ при $\lambda \to 0$.
Отметим, что отображение, дифференцируемое по Гато в точке $\hat{x}$, не обязано быть непрерывным в этой точке.

5.2.4. Производная Фреше

Определение

f дифференцируемо по Фреше в точке $\hat{x}$ ($f \in D(\hat{x})$),
если $\exists\ f'(\hat{x}) \in L(X, Y)$ и отображение $r\colon X \to Y$:

$$f(\hat{x}+h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})[h] + r(h),$$

где $\|r(h)\|_Y = o(\|h\|_X)$ при $\|h\|_X \to 0$.

$f'(\hat{x})$ — производная Фреше. $C^1(U)$. Кратко:

$$f(\hat{x}+h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})[h] + o(h).$$

$f \in D(\hat{x}) \Leftrightarrow\ \exists\ f'(\hat{x}) \in L(X, Y) : \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 :$

$$\|f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) - f'(\hat{x})[h]\|_Y \le \varepsilon \|h\|_X \quad \forall\ \|h\| < \delta.$$

$f'(\hat{x})$ определена однозначно, ибо рав-во $\Lambda_1 h - \Lambda_2 h = o(h)$ для лин. непр. операторов Λ_1 и Λ_2 возможно лишь при $\Lambda_1 = \Lambda_2$.
$f \in L(X, Y) \Rightarrow f' = f;\quad f \in D(\hat{x}) \Rightarrow f \in C(\hat{x})$.

Определение

$f \in D(\hat{x})$. f строго дифференцируемо в точке $\hat{x}$ ($f \in SD(\hat{x})$), если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall\ x_1, x_2 : \|x_1 - \hat{x}\| < \delta$, $\|x_2 - \hat{x}\| < \delta$,

$$\|f(x_1) - f(x_2) - f'(\hat{x})[x_1 - x_2]\|_Y \le \varepsilon \|x_1 - x_2\|_X.$$

$f \in SD(\hat{x}) \Rightarrow f \in D(\hat{x}) \Rightarrow f \in D_G(\hat{x}) \Rightarrow \exists\, \delta f(\hat{x}, h) \Rightarrow \exists\, \delta_+ f(\hat{x}, h)\, \forall\, h.$

$f \in SD(\hat{x}) \Rightarrow f \in C\big(\mathcal{O}(\hat{x})\big)$ — из определения.

$f'_G(x) \in C(\hat{x}) \Rightarrow f \in SD(\hat{x})$ — докажем позже.

X, Y, Z — нормированные пространства.
$f\colon X \times Y \to Z$, $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$.

Определение

Если отображение $x \to f(x, \hat{y})$ дифференцируемо в точке $\hat{x}$ по Фреше, то его производная называется частной производной по x отображения f в точке $(\hat{x}, \hat{y})$ и обозначается $f'_x(\hat{x}, \hat{y})$ или $\dfrac{\partial f(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x}$.

Аналогично определяется частная производная по y
$f'_y(\hat{x}, \hat{y}) = \dfrac{\partial f(\hat{x}, \hat{y})}{\partial y}$.

5.2.7. Производные высших порядков

$f\colon X \to Y$. Пусть $\forall\, x \in X\ \exists$ производная Фреше $f'(x)$.
$f'\colon X \to L(X, Y)$. Производная Фреше отображения $x \to f'(x)$ называется второй производной f:

$$f''(\hat{x}) = (f')'(\hat{x}) \in L\big(X, L(X, Y)\big).$$

Для вектора $h_1 \in X$ определен оператор $f''(\hat{x})[h_1] \in L(X, Y)$.
Для $h_2 \in X$ определен элемент $f''(\hat{x})[h_1][h_2] \in Y$.
Т. е., имеется $f''(\hat{x})[h_1, h_2] := f''(\hat{x})[h_1][h_2]$ — билинейное отображение, $f''(\hat{x})\colon X \times X \to Y$.

Аналогично определяются производные высших порядков.

Теорема (о смешанных производных)

Если $f \in D^2(\hat{x})$, то $f''(\hat{x})[h_1, h_2] = f''(\hat{x})[h_2, h_1] \quad \forall\, h_1, h_2 \in X$.

Пример 1. Непрерывная функция не имеет в фиксированной точке производной ни по какому направлению:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \hat{x} = 0.$$

На $\mathbb{R}$ имеются с точностью до умножения на положительную константу два направления: $h_1 = 1$ и $h_2 = -1$.
Но производных ни по какому направлению не существует.
Действительно,

$$\delta_+ f(\hat{x}, h)\Big|_{\substack{\hat{x}=0\\ h=1}} = \lim_{\lambda \to +0} \frac{f(\hat{x}+\lambda h) - f(\hat{x})}{\lambda}\Bigg|_{\substack{\hat{x}=0\\ h=1}} = \lim_{\lambda \to +0} \frac{\lambda \sin \frac{1}{\lambda}}{\lambda} = \lim_{\lambda \to +0} \sin \frac{1}{\lambda}$$

не существует. В силу четности функции f не существует также производной по направлению $h = -1$.

Пример 2. Непрерывная функция имеет в фиксированной точке производную по всем направлениям, но не имеет в этой точке вариации по Лагранжу:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = |x|,\ \ \hat{x} = 0.$$

Как и в примере 1 на прямой $\mathbb{R}$ имеются с точностью до умножения на положительную константу два направления: $h_1 = 1$ и $h_2 = -1$.
Производные по обоим направлениям существуют:

$$\delta_+ f(\hat{x}, h)\Big|_{\substack{\hat{x}=0\\ h=h_i}} = \lim_{\lambda\to+0} \frac{f(\hat{x}+\lambda h)-f(\hat{x})}{\lambda}\Bigg|_{\substack{\hat{x}=0\\ h=h_i}} = \lim_{\lambda\to+0} \frac{|\lambda h_i|}{\lambda} = \lim_{\lambda\to+0} \frac{|\lambda|}{\lambda} = 1.$$

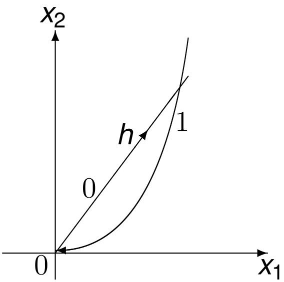
Но предел $\delta f(\hat{x}, h)\Big|_{\substack{\hat{x}=0\\ h=1}} = \lim\limits_{\lambda\to0} \dfrac{f(\hat{x}+\lambda h)-f(\hat{x})}{\lambda}\Bigg|_{\substack{\hat{x}=0\\ h=1}} = \lim\limits_{\lambda\to0} \dfrac{|\lambda|}{\lambda}\ \nexists$

$\Rightarrow f$ не имеет в точке $\hat{x} = 0$ вариации по Лагранжу.

Отметим, что если $\hat{x} \neq 0$, то $\delta f(\hat{x}, h) = f'(\hat{x})[h] = \operatorname{sign} \hat{x} \cdot h$.

Пример 4. Функция f имеет в точке производную Гато, но не имеет в этой точке производной Фреше:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & x_2 = x_1^2,\ x_1 > 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad \hat{x} = (0,0).$$

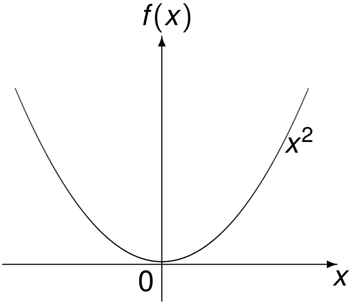


Имеем: $\delta f(\hat{x}, h) = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{f(\hat{x}+\lambda h) - f(\hat{x})}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{f(\lambda h)}{\lambda} = 0\ \forall\, h \Rightarrow f'_G(\hat{x})\ \exists$ и $f'_G(\hat{x}) = 0$.

С другой стороны, f разрывна в точке $\hat{x} = (0,0)$, а функция, дифференцируемая по Фреше, должна быть непрерывна в точке дифференцируемости.

Пример 5. Функция имеет в точке производную Фреше, но не строго дифференцируема в этой точке:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ рационально}, \\ 0, & x \text{ иррационально}, \end{cases} \qquad \hat{x} = 0.$$



Выписанная функция одной (!) переменной дифференцируема в точке $\hat{x} = 0$. Значит она дифференцируема по Фреше в этой точке. С другой стороны, функция имеет разрывы в любой окрестности нуля, а строго дифференцируемая функция должна быть непрерывна в некоторой окрестности $\hat{x}$.

Теорема

X, Y, Z — линейные нормированные пространства, $\varphi\colon X \to Y$, $\psi\colon Y \to Z$, $\varphi(\hat{x}) = \hat{y}$, $f = \psi \circ \varphi\colon X \to Z$. Тогда, если $\psi \in D(\hat{y})$, а φ в точке $\hat{x}$ имеет вариацию по Лагранжу (дифференцируемо по Гато, дифференцируемо по Фреше), то f обладает в точке $\hat{x}$ тем же свойством, что и φ, и при этом соответственно

$A)$ $\delta f(\hat{x}, h) = \psi'(\hat{y})[\delta\varphi(\hat{x}, h)] \quad \forall\ h \in X$,

$B)$ $f'_G(\hat{x}) = \psi'(\hat{y}) \circ \varphi'_G(\hat{x})$,

$C)$ $f'(\hat{x}) = \psi'(\hat{y}) \circ \varphi'(\hat{x}) \quad (\Leftrightarrow f'(\hat{x})[h] = \psi'(\hat{y})[\varphi'(\hat{x})[h]])$,

$D)$ если $\psi \in SD(\hat{y})$, а $\varphi \in SD(\hat{x})$, то $f \in SD(\hat{x})$.

Теорема

X, Y — линейные нормированные пространства, $f : X \to Y$, $f \in D^n(\hat{x})$. Тогда

$$f(\hat{x}+h) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})[h] + \frac{1}{2} f''(\hat{x})[h, h] + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\hat{x})[h, ..., h] + r(h),$$

где $\|r(h)\| = o(\|h\|^n)$ при $h \to 0$.

5.3.3 Теорема о среднем

Теорема (Лагранжа)

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C[a,b]$, $D(a,b) \Rightarrow \exists\ c \in (a,b)$:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \qquad (*)$$

Замечание (1)

Формула $(*)$ остается справедливой и для $f\colon X \to \mathbb{R}$, X — линейное нормированное пространство, $f \in C[a,b]$, $D_G(a,b)$.

$\lhd$ Полагая $\varphi(t) := f(a + t(b-a))$, мы сводим доказательство к случаю функции одной переменной:

$$f(b)-f(a) = \varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(\theta) = f'(a+\theta(b-a))[b-a] = f'(c)[b-a],$$

где $\theta \in (0,1)$, $c = a + \theta(b-a) \in (a,b)$. $\rhd$

Замечание (2)

Для векторнозначных функций теорема Лагранжа неверна.

$\triangleleft$ Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\sin x, -\cos x)$.
Тогда $f'(x)[h] = (\cos x, \sin x)[h] = h(\cos x, \sin x)$, $h \in \mathbb{R}$.

$f(2\pi) - f(0) = (\sin 2\pi, -\cos 2\pi) - (\sin 0, -\cos 0) = (0, 0)$,
$f'(c)[2\pi - 0] = 2\pi(\cos c, \sin c)$.

Равенства $f(2\pi) - f(0) = f'(c)[2\pi - 0] \Leftrightarrow (0, 0) = 2\pi(\cos c, \sin c)$ не может быть ни для какого c, так как $\cos c$ и $\sin c$ одновременно в ноль не обращаются.
Значит, формула $(*)$ для f не имеет места. $\triangleright$

Отметим, что в анализе часто используется не сама формула $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, а вытекающая из нее оценка $|f(b) - f(a)| \leq \sup\limits_{c \in (a,b)} |f'(c)| \cdot |b - a|$.

Теорема (о среднем)

X, Y — линейные нормированные пространства, $f\colon X \to Y$, $f \in D_G[a,b]$. Тогда $\|f(b)-f(a)\| \le \sup\limits_{c\in(a,b)} \|f'_G(c)\| \cdot \|b-a\|$.

$\lhd$ По лемме Банаха $\forall\ y \in Y\ \exists\, y^* \in Y^* : \|y^*\|=1,\ \langle y^*, y\rangle = \|y\|$.
Значит, и для $y = f(b)-f(a)\ \exists\ y^* \in Y^* : \|y^*\| = 1$,
$\langle y^*, f(b)-f(a)\rangle = \|f(b)-f(a)\|$.
Обозначим $\varphi(t) = \langle y^*, f(a+t(b-a))\rangle$. По т. о суперпозиции

$$\varphi'(t) = \langle y^*, f'_G(a+t(b-a))[b-a]\rangle \quad \forall\ t \in [0,1].$$

Тогда $\|f(b)-f(a)\| = \langle y^*, f(b)-f(a)\rangle =$

$= \varphi(1)-\varphi(0) \overset{\text{ф.Лагранжа}}{=} \varphi'(\theta) = \langle y^*, f'_G(a+\theta(b-a))[b-a]\rangle \le$

$\le \|y^*\| \cdot \|f'_G(a+\theta(b-a))[b-a]\| \overset{\|y^*\|=1}{=} \|f'_G(a+\theta(b-a))[b-a]\| \le$

$\le \|f'_G(a+\theta(b-a))\| \cdot \|b-a\| \le \sup\limits_{c\in(a,b)} \|f'_G(c)\| \cdot \|b-a\|.\ \rhd$

Следствие (1)

X, Y — линейные нормированные пространства, $f\colon X \to Y$, $f \in D_G[a, b]$ и оператор $\Lambda \in L(X, Y)$. Тогда

$$\|f(b) - f(a) - \Lambda(b - a)\| \le \sup_{c \in (a,b)} \|f'_G(c) - \Lambda\| \cdot \|b - a\|.$$

$\triangleleft$ Надо применить т. о среднем к отображению $g = f - \Lambda$. $\triangleright$

Следствие (2)

X, Y — линейные нормированные пространства, $f\colon X \to Y$, $f \in D_G(\mathcal{O}(\hat{x}))$, $f'_G \in C(\hat{x})$. Тогда $f \in SD(\hat{x})$ ($\Rightarrow f \in D(\hat{x})$).

$\triangleleft$ В силу непрерывности отображения $x \to f'_G(x)$ в точке $\hat{x}$
$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \|f'_G(x) - f'_G(\hat{x})\| < \varepsilon$ при $\|x - \hat{x}\| < \delta$.
В силу выпуклости шара $B := \{x \mid \|x - \hat{x}\| < \delta\}$ из условия $x_1, x_2 \in B$ следует, что $[x_1, x_2] \in B$. По сл. 1 с $\Lambda = f'_G(\hat{x})$

$$\|f(x_1) - f(x_2) - f'_G(\hat{x})[x_1 - x_2]\| \leq$$
$$\leq \sup_{x \in (x_1, x_2)} \|f'_G(x) - f'_G(\hat{x})\| \cdot \|x_1 - x_2\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\| \Rightarrow f \in SD(\hat{x}). \triangleright$$

Следствие (3)

$f \in D^2(\hat{x}) \Rightarrow f \in SD(\hat{x})$

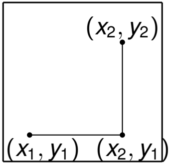
$\triangleleft\ f \in D^2(\hat{x}) \Rightarrow f \in D(\mathcal{O}(\hat{x})),\ f' \in C(\hat{x})) \overset{\text{по сл. 2}}{\Rightarrow} f \in SD(\hat{x}). \triangleright$

Теорема (о полном дифференциале)

X, Y, Z — линейные нормированные пространства,
$F\colon X \times Y \to Z$, $\exists$ частные производные в смысле Гато
$F_x(x,y), F_y(x,y)\ \forall\ (x,y) \in \mathcal{O}(\hat{x},\hat{y})$,
$F_x(x,y), F_y(x,y) \in C(\hat{x},\hat{y})$. Тогда $F \in SD(\hat{x},\hat{y})$ и

$$F'(\hat{x},\hat{y})[(\xi,\eta)] = F_x(\hat{x},\hat{y})[\xi] + F_y(\hat{x},\hat{y})[\eta].$$

$\lhd$ $F_x, F_y \in C(\hat{x},\hat{y}) \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall\ (x,y)$ из выпуклого "прямоугольника" $V := \overset{\circ}{B}(\hat{x},\delta) \times \overset{\circ}{B}(\hat{y},\delta)\ \exists\ F_x(x,y)$ и $F_y(x,y)$ и $\|F_x(x,y) - F_x(\hat{x},\hat{y})\| < \varepsilon$, $\|F_y(x,y) - F_y(\hat{x},\hat{y})\| < \varepsilon$.



Если точки (x_1,y_1), $(x_2,y_2) \in V$, то и точка $(x_2,y_1) \in V$ и оба отрезка $[(x_1,y_1),(x_2,y_1)]$, $[(x_2,y_1),(x_2,y_2)] \in V$ в силу выпуклости. Поэтому отображения $x \to F(x,y_1)$ и $y \to F(x_2,y)$ дифференцируемы и имеют производные $F_x(x,y_1)$ на отрезке $[x_1,x_2]$, $F_y(x_2,y)$ на отрезке $[y_1,y_2]$.

$$\|F_x(x,y)-F_x(\hat{x},\hat{y})\|<\varepsilon, \quad \|F_y(x,y)-F_y(\hat{x},\hat{y})\|<\varepsilon. \qquad (*)$$

Рассмотрим норму разности

$$\|F(x_1,y_1)-F(x_2,y_2)-F_x(\hat{x},\hat{y})[x_1-x_2]-F_y(\hat{x},\hat{y})[y_1-y_2]\|=$$

(вычтем и добавим $F(x_2,y_1)$)

$$=\|F(x_1,y_1)-F(x_2,y_1)-F_x(\hat{x},\hat{y})[x_1-x_2]+$$

$$+F(x_2,y_1)-F(x_2,y_2)-F_y(\hat{x},\hat{y})[y_1-y_2]\| \overset{\triangle}{\leq}$$

$$\overset{\text{сл. 1 т. о среднем}}{\leq} \sup_{x\in(x_1,x_2)}\|F_x(x,y_1)-F_x(\hat{x},\hat{y})\|\cdot\|x_1-x_2\|+$$

$$+\sup_{y\in(y_1,y_2)}\|F_y(x_2,y)-F_y(\hat{x},\hat{y})\|\cdot\|y_1-y_2\| \overset{(*)}{\leq} \varepsilon\|x_1-x_2\|+\varepsilon\|y_1-y_2\|$$

$\forall\ (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in V \Rightarrow F\in SD(\hat{x},\hat{y})$ и явный вид полного дифференциала отображения от двух переменных. $\triangleright$

X — линейное нормированное пространство, $A \subset X$.

Определение

Аннулятор $A^{\perp} := \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle = 0 \ \forall\, x \in A\}$.

Замечание

$x^* = 0 \in A^{\perp} \ \forall\, A$.

Лемма (о нетривиальности аннулятора)

$L \subset X$ — замкнутое собственное ($L \neq X$) подпространство. Тогда $\exists\, x^* \in L^\perp$, $x^* \neq 0$.

$\lhd$ $L \neq X \Rightarrow\ \exists\, \hat{x} \notin L \Rightarrow$ (по теореме о строгой отделимости) $\exists\, x^* \in X^*$, строго разделяющий точку $\hat{x}$ и подпространство L:

$$\langle x^*, \hat{x}\rangle > \sup_{x \in L} \langle x^*, x\rangle. \qquad (*)$$

Из неравенства следует, что $x^* \neq 0$. Покажем, что $x^* \in L^\perp$, т. е. $\langle x^*, x\rangle = 0\ \forall\, x \in L$. Действительно, если бы $\exists\, x_0 \in L$: $\langle x^*, x_0\rangle \neq 0$, то поскольку $\alpha x_0 \in L\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, было бы

$$\sup_{x \in L} \langle x^*, x\rangle \geq \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \langle x^*, \alpha x_0\rangle = +\infty.$$

Это не так в силу неравенства $(*)$.
Следовательно, $\langle x^*, x\rangle = 0\ \forall\, x \in L$ и, поэтому $x^* \in L^\perp$. $\rhd$

Теорема (Банаха об открытости)

X, Y — банаховы, $\Lambda \in L(X, Y)$, $\Lambda \colon X \overset{\text{на}}{\to} Y$.
Тогда образ каждого открытого множества в X открыт в Y.

Теорема (Банаха об обратном операторе)

X, Y — банаховы, $\Lambda \in L(X, Y)$, $\Lambda \colon X \overset{\text{на}}{\to} Y$, $\operatorname{Ker} \Lambda = 0$.
Тогда $\exists\ \Lambda^{-1} \colon Y \to X$, $\Lambda^{-1} \in L(Y, X)$.

Лемма (Банаха)

X — линейное нормированное пространство, $x_0 \in X$.
Тогда $\exists\ x^* \in X^* : \|x^*\| = 1,\ \langle x^*, x_0 \rangle = \|x_0\|$.

Лемма Банаха является следствием из теоремы Хана–Банаха о продолжении линейного функционала.

Лемма (о правом обратном отображении)

X, Y — банаховы, $\Lambda \in L(X, Y)$, $\Lambda\colon X \overset{\text{на}}{\to} Y$. Тогда $\exists\, M\colon Y \to X$ (необязательно непрерывное и необязательно линейное) :

$$\Lambda \circ M = I_Y, \quad \|My\| \le K\|y\| \quad \forall\, y \in Y \ (K > 0).$$

$\lhd$ $B_X := \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$. По т. Банаха об открытости ΛB_X открыто. При линейном отображении $0 \to 0 \Rightarrow 0 \in \operatorname{int} \Lambda B_X$, и, следовательно, $\Lambda B_X \supset \delta B_Y := \{y \in Y \mid \|y\| < \delta\}$ с некоторым $\delta > 0$. Значит, $\forall\, y \in \delta B_Y\ \exists\, x(y) : \Lambda x(y) = y$, $\|x(y)\| < 1$. Обозначим $My := \frac{2\|y\|}{\delta} x\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right)$ $\forall\, y \in Y$, $y \ne 0$. Тогда $\left\|\frac{\delta y}{2\|y\|}\right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ и из определения M имеем:

$$\Lambda \circ My = \Lambda\left(\frac{2\|y\|}{\delta} x\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right)\right) = \frac{2\|y\|}{\delta} \Lambda\left(x\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right)\right) = \frac{2\|y\|}{\delta} \cdot \frac{\delta y}{2\|y\|} = y,$$

$$\|My\| = \left\|\frac{2\|y\|}{\delta} x\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right)\right\| = \frac{2\|y\|}{\delta} \cdot \left\|x\left(\frac{\delta y}{2\|y\|}\right)\right\| \le \frac{2}{\delta}\|y\|. \ \rhd$$

Лемма (о замкнутости образа)

X, Y, Z — банаховы, $A \in L(X, Y)$, $B \in L(X, Z)$, $\operatorname{Im} A$ замкнуто в Y, $B\operatorname{Ker} A$ замкнуто в Z, $C\colon X \to Y \times Z$, $Cx := (Ax, Bx)$. Тогда $C \in L(X, Y \times Z)$ и $\operatorname{Im} C$ замкнуто в $Y \times Z$.

$\triangleleft$ $C \in L(X, Y \times Z)$ очевидно. Докажем замкнутость $\operatorname{Im} C$.
Замкнутое подпространство $\widetilde{Y} = \operatorname{Im} A$ банахового пространства Y само банахово и, значит, отображение $A\colon X \to \widetilde{Y}$ — эпиморфизм.
По лемме о правом обратном $\exists\ M\colon \widetilde{Y} \to X$:

$$A \circ M = I_{\widetilde{Y}}, \quad \|My\| \leq K\|y\| \quad \forall\ y \in \widetilde{Y}\ (K > 0).$$

Лемма (о замкнутости образа)

X, Y, Z — банаховы, $A \in L(X, Y)$, $B \in L(X, Z)$, $\operatorname{Im} A$ замкнуто в Y, $B\operatorname{Ker} A$ замкнуто в Z, $C\colon X \to Y \times Z$, $Cx := (Ax, Bx)$. Тогда $C \in L(X, Y \times Z)$ и $\operatorname{Im} C$ замкнуто в $Y \times Z$.

Пусть $(y, z) \in \overline{\operatorname{Im} C} \Rightarrow \exists \, \{x_n\} : \{(Ax_n, Bx_n)\} \to (y, z)$. В силу замкнутости $\operatorname{Im} A$ предельная точка $y = \lim Ax_n \in \operatorname{Im} A = \widetilde{Y}$. Значит, определены точки $h_n := M(Ax_n - y)$. Тогда

$$A(x_n - h_n) = Ax_n - A(M(Ax_n - y)) \stackrel{A \circ M = I_{\widetilde{Y}}}{=} Ax_n - (Ax_n - y) = y,$$

$\|h_n\| = \|M(Ax_n - y)\| \le K\|Ax_n - y\| \to 0 \Rightarrow Bh_n \to 0$ в силу непрерывности оператора B и $z := \lim Bx_n = \lim B(x_n - h_n)$, т. е. $z \in \overline{\Sigma}$, где $\Sigma = \{z = Bx \mid Ax = y\}$. Σ является сдвигом подпространства $B\operatorname{Ker} A$, следовательно, замкнуто. Итак, $z \in \overline{\Sigma} = \Sigma \Rightarrow \exists \, x \in X \ : \ Ax = y, \, Bx = z$, т. е. $(y, z) \in \operatorname{Im} C$. $\triangleright$

Лемма (об аннуляторе ядра регулярного оператора)

X, Y — банаховы, $A \in L(X,Y)$, $A\colon X \overset{\text{на}}{\to} Y \Rightarrow (\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \operatorname{Im} A^*$.

$\lhd$ A) $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} \overset{?}{\supset} \operatorname{Im} A^*$. Возьмем $x^* \in \operatorname{Im} A^* \Rightarrow x^* = A^* y^* \Rightarrow$

$\langle x^*, x\rangle = \langle A^* y^*, x\rangle = \langle y^*, Ax\rangle = 0\ \forall\, x \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow x^* \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$.
B) $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} \subset \operatorname{Im} A^*$. Возьмем $x^* \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$,
т. е. $\langle x^*, x\rangle = 0\ \forall\ x \in \operatorname{Ker} A$. Применим лемму о замкнутости образа для пространств $X, Y, Z = \mathbb{R}$ и отображений A, $Bx := \langle x^*, x\rangle$. Условия леммы выполняются: $\operatorname{Im} A = Y$ замкнуто в Y, $B\operatorname{Ker} A = \langle x^*, \operatorname{Ker} A\rangle = 0$ — замкнутое подпространство в $\mathbb{R}$. По лемме о замкнутости образа $\operatorname{Im}(A, x^*)$ замкнуто в $Y \times Z = Y \times \mathbb{R}$. $\operatorname{Im}(A, x^*)$ является собственным, так как точка $(0,1) \notin \operatorname{Im}(A, x^*)$ (если $Ax = 0$, то $\langle x^*, x\rangle = 0 \neq 1$).

Лемма (об аннуляторе ядра регулярного оператора)

X, Y — банаховы, $A \in L(X,Y)$, $A\colon X \overset{\text{на}}{\to} Y \Rightarrow (\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \operatorname{Im} A^*$.

По лемме о нетривиальности аннулятора замкнутого собственного подпространства $\operatorname{Im}(A, x^*)$
$\exists\ (y^*, \lambda) \in (\operatorname{Im}(A, x^*))^{\perp} \subset (Y \times \mathbb{R})^* = Y^* \times \mathbb{R}^* = Y^* \times \mathbb{R}$,
$(y^*, \lambda) \neq 0$:

$$\langle (y^*, \lambda), (Ax, \langle x^*, x\rangle)\rangle = 0 \iff \langle y^*, Ax\rangle + \lambda\langle x^*, x\rangle = 0 \iff \langle A^* y^*, x\rangle + \lambda\langle x^*, x\rangle = 0 \iff \langle A^* y^* + \lambda x^*, x\rangle = 0\ \forall\, x \in X \iff A^* y^* + \lambda x^* = 0.$$

Причем $\lambda \neq 0$ (ибо иначе $\langle y^*, Ax\rangle = 0\ \forall\, x \in X \overset{AX=Y}{\Rightarrow} y^* = 0$ — противоречие).
Тогда $x^* = A^*\left(-\frac{y^*}{\lambda}\right) \in \operatorname{Im} A^*$, т. е. $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} \subset \operatorname{Im} A^*$. $\triangleright$

Теорема (об обратном отображении)

X, Z — банаховы, $F\colon X \to Z$, $F(\hat{x}) = \hat{z}$, $F \in SD(\hat{x})$, $F'(\hat{x})X = Z$. Тогда $\exists\ F^{-1}\colon W \in \mathcal{O}(\hat{z}, Z) \to X$ и константа $K > 0 : F^{-1}(\hat{z}) = \hat{x}$ и

$$F(F^{-1}(z)) = z, \quad \|F^{-1}(z) - F^{-1}(\hat{z})\| \le K\|z - \hat{z}\| \ \forall\ z \in W.$$

Теорема (Люстерника)

X, Z — банаховы, $F\colon X \to Z$, $F \in SD(\hat{x})$, $F'(\hat{x})X = Z$.
Тогда $\exists\ \varphi\colon U \to X$, $U \in \mathcal{O}(\hat{x}, X)$ и число $K > 0$:

$$F\big(x + \varphi(x)\big) = F(\hat{x}), \quad \|\varphi(x)\| \le K\|F(x) - F(\hat{x})\| \quad \forall\ x \in U.$$

Пусть X — линейное нормированное пространство, $M \subset X$.

Определение

Вектор $h \in X$ называется односторонним касательным (полукасательным) вектором к множеству M в точке $\hat{x} \in X$, если $\exists\ \varepsilon > 0$ и отображение $r\colon (0, \varepsilon] \to X$:
a) $\hat{x} + th + r(t) \in M\ \forall\ t \in (0, \varepsilon]$;
b) $\|r(t)\| = o(t)$ при $t \to +0$.

Определение

Вектор h называется касательным к множеству M в точке $\hat{x} \in X$, если векторы h и $-h$ являются односторонними касательными векторами к M в $\hat{x}$. Иными словами, элемент $h \in X$ называется касательным вектором к множеству M в точке $\hat{x}$, если $\exists\ \varepsilon > 0$ и отображение $r\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to X$:
a) $\hat{x} + th + r(t) \in M\ \forall\ t \in [-\varepsilon, \varepsilon],\ t \neq 0$;
b) $\|r(t)\| = o(t)$ при $t \to 0$.

Множество всех односторонних касательных векторов к M в точке $\hat{x}$ обозначается $T^+_{\hat{x}}M$,
множество касательных векторов обозначается $T_{\hat{x}}M$.
Очевидно, что $T^+_{\hat{x}}M$ и $T_{\hat{x}}M$ — конусы.

Определение

Если множество $T_{\hat{x}}M$ является подпространством в X, то оно называется касательным пространством к множеству M в точке $\hat{x}$.

Если $\hat{x} \in M$, то в определениях t может равняться нулю.

Теорема (о касательном пространстве)

X, Z — банаховы, $F\colon X \to Z$, $F \in SD(\hat{x})$, $F'(\hat{x})X = Z$, $M := \{x \in X \mid F(x) = F(\hat{x})\}$. Тогда $T_{\hat{x}}M = \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$.

$\lhd$ A) $T_{\hat{x}}M \overset{?}{\subset} \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$. Возьмем $h \in T_{\hat{x}}M \Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ и отображение $r\colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to X : \hat{x} + th + r(t) \in M\ \forall\ t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\|r(t)\| = o(t)$ при $t \to 0$. При малых t

$$F(\hat{x}) = F\big(\hat{x} + th + r(t)\big) = F(\hat{x}) + F'(\hat{x})[th + r(t)] + o(th + r(t)) =$$

$$= F(\hat{x}) + tF'(\hat{x})[h] + o(t).$$

Отсюда $tF'(\hat{x})[h] + o(t) = 0$ и, значит, $F'(\hat{x})[h] = 0$, т. е. $h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x}) \Rightarrow T_{\hat{x}}M \subset \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$.

Теорема (о касательном пространстве)

X, Z — банаховы, $F\colon X \to Z$, $F \in SD(\hat{x})$, $F'(\hat{x})X = Z$, $M = \{x \in X \mid F(x) = F(\hat{x})\}$. Тогда $T_{\hat{x}}M = \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$.

В) $T_{\hat{x}}M \overset{?}{\supset} \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$. Возьмем $h \in \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$. Положим $r(t) = \varphi(\hat{x} + th)$, где φ строится в т. Люстерника. Тогда

$$F\big(\hat{x}+th+r(t)\big) \overset{def}{=} F\big(\hat{x}+th+\varphi(\hat{x}+th)\big) = F(\hat{x}) \Rightarrow \hat{x}+th+r(t) \in M,$$

$$F(\hat{x} + th) - F(\hat{x}) = tF'(\hat{x})[h] + o(t) \overset{F'(\hat{x})[h]=0}{=} o(t),$$

$$\|r(t)\| = \|\varphi(\hat{x} + th)\| \underset{\text{т.Л}}{\leq} K\|F(\hat{x} + th) - F(\hat{x})\| = K\|o(t)\| = o(t),$$

т. е. $h \in T_{\hat{x}}M \Rightarrow T_{\hat{x}}M \supset \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$.

Таким образом, $T_{\hat{x}}M = \operatorname{Ker} F'(\hat{x})$. $\triangleright$