Оглавление

Глава 1

Гладкость и аппроксимация

В монографии изучаются вопросы приближения классов периодических функций одной и нескольких переменных. Объектами аппроксимации являются классы функций с доминирующей смешанной производной W_p^r и их пересечения, классы Гельдера–Никольского H_p^r, а также классы Бесова $B_{p,\theta}^r$. Для них решаются вопросы вложения, приближения суммами Фурье, вычисляются различные поперечники, вводятся новые характеристики приближения. Определяются порядки ряда величин, связанных с нормами многомерных ядер Дирихле и Фавара и неравенствами Бернштейна–Никольского наилучших по выбору N гармоник, которые играют важную роль в теории приближений.

Теория приближений, являясь частью математического анализа, изучает методы приближенного вычисления чисел, функций, операторов, решений уравнений. Главную роль на первом этапе развитии теории играли методы вычисления функций. Этот этап связан с приближением индивидуальных функций с помощью полиномов и рациональных дробей, нахождением полиномов, наименее уклоняющихся от нуля. Ярким представителем этапа был П. Л. Чебышев.

Второй этап связан с приближением уже не одной, а целого класса функций фиксированным методом приближения, выявлением зависимости между гладкостью функции и скоростью ее аппроксимации. Отметим основополагающие исследования в этом направлении, проведенные Д. Джексоном и С. Н. Бернштейном. Важным является также предложенное С. М. Никольским использование средств гармонического анализа для решения вопросов вложения и приближения функциональных классов. Назовем еще несколько имен математиков, стимулировавших развитие нового направления.

В цикле исследований, посвященных взаимосвязи гладкости и аппроксимации, можно выделить несколько общих тем: характеризация гладкости скоростью аппроксимации, вложения одних пространств гладких функций в другие и наилучшие методы аппроксимации гладких функций. Выяснилось, что гладкость можно характеризовать скоростью приближения.

Долгое время приближения рассматривались лишь в равномерной метрике, и потому гладкость характеризовалась лишь одном числом (подобно тому, как в приведенной выше теореме). Однако, впоследствии понятие гладкости было расширено, и она стала характеризоваться не только собственно числом производных, но и тем пространством (типа L_p), которому эта производная принадлежит. При этом обнаружились два подхода к гладкости — один "непосредственный через модули непрерывности функции и ее производных, а другой — через гармонический анализ, через обобщение понятия дифференцирования и определение оператора дробного дифференцирования. Первый путь привел к определению *пространств Бесова* $\mathcal{B}^r_{p,\theta}$ (частным случаем которого является пространство Гельдера–Никольского $\mathcal{H}^r_p = \mathcal{B}^r_{p,\infty}$), другой — к определению *пространств* Соболева $\mathcal{W}^r_p$, состоящих из функций $x(\cdot)$, у которых r-тая производная по Вейлю принадлежит пространству L_p.

Таким образом, гладкость стала характеризоваться точками плоскости (как в случае пространств Соболева и Гельдера–Никольского) или трехмерного пространства (как в случае пространства Бесова).

И возник естественный вопрос о взаимосвязях различных гладкостей между собою — вопрос *о вложении* одних функциональных пространств в другие.

Вопрос о вложении ставится в простейшем случае так. Пусть имеется, например, соболевское пространство $\mathcal{W}_p^r(\mathbb{T}^1)$ функций. Спрашивается, какими другими гладкостями это пространство обладает? В какие соболевские пространства $\mathcal{W}_q^\gamma(\mathbb{T}^1)$ вкладывается $\mathcal{W}_p^r(\mathbb{T}^1)$?

Большое развитие теория вложения получила после исследований С. Л. Соболева, который применил свои результаты о вложениях к теоремам существования решений дифференциальных уравнений.

С. М. Никольскому принадлежит фундаментальная идея связи теории вложения с теорией приближения. Она дала мощный стимул как для одного, так и для другого направления исследований. Третий этап теории приближений связан с идеями А. Н. Колмогорова, когда для приближения класса ищется наилучший аппарат приближения, например, подпространство фиксированной размерности. В 1936 году он ввел следующую характеристику приближения центрально-симметричного множества $W \subset X$ из линейного нормированного пространства X:

$$d_n(W,X) = \inf_{L_n} \sup_{x\in W} \inf_{y\in L_n} \|x-y\|,$$

где $\{L_n\}$ — совокупность всех n–мерных подпространств из X.

Эта (по сути дела геометрическая) величина получила впоследствии название *поперечника по Колмогорову.*

Активная деятельность по оценкам поперечников началась лишь в шестидесятые годы после работ В. М. Тихомирова, в которых вычисляются поперечники ряда функциональных классов и вводятся другие поперечники, являющиеся различными характеристиками этих классов.

С появлением понятий поперечников возник вопрос о сравнении классических средств и методов аппроксимации с наилучшими возможными. Выяснилось, что классические способы приближения не всегда бывают асимптотически оптимальными, хотя оптимальные не очень сильно их превосходят. Но наряду с классическими средствами приближения стали внедряться в теоретическую и прикладную математику и новые — сплайны, вейвлеты и т. п.

Изучаемые во второй главе вопросы относятся в основном ко второму и третьему этапам теории приближений. Обозначим круг обсуждаемых тем: понятие гладкости, описание классов функций, приближение оператором Фурье, вложения функциональных пространств, поперечники. Эти вопросы изучаются для классов периодических функций одной и нескольких переменных, а так же для конечномерных множеств.

Гладкость функции задается у нас не ограничением одной какой-то производной в метрике L_p, а целым набором ограничений: $\|x^{r^i}(\cdot)\|_{p^i} \le 1$, $i = 1, \dots, m$. Таким образом, гладкость рассматриваемых классов функций характеризуется набором $\Omega = \{(\frac{1}{p^i}, r^i),\ i = 1, \dots, m\}$ “элементарных” гладкостей, и ставится общая задача о вложении и приближении функций, обладающих такой гладкостью. Как правило, мы будем ограничиваться случаем $1 < p, q < \infty$, поскольку случаи $p, q = 1$, требуют несколько иной техники. Поэтому, если особо не будет оговорено, то считаем, что $1 < p, q < \infty$.

В первой главе выводятся необходимые и достаточные условия вложения пересечения классов $W^{\Omega}(\mathbb{T}^d) = \bigcap\limits_{(\frac{1}{p}, r) \in \Omega} W^r_p(\mathbb{T}^d)$ в класс W^{γ}_q, а также для пересечения конечномерных множеств, являющихся дискретными аналогами этих классов. Приводится обобщение неравенства Хаусдорфа–Юнга на случай смешанных норм. Полученные вложения функциональных классов и конечномерных множеств будут использованы в главе 2 для нахождения приближения этих классов суммами Фурье, ядерных и проекционных поперечников, а также в главе 3 для подсчета колмогоровских и линейных поперечников функциональных классов и конечномерных множеств.

Во второй главе определяется приближение суммами Фурье классов периодических функций одной и нескольких переменных и их пересечений $W^r_p(\mathbb{T}^d)$, $W^{\Omega}_p(\mathbb{T}^d)$, $H^r_p(\mathbb{T}^d)$, $B^r_{p,\theta}(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q при всех $1 < p, q < \infty$. Для приближения классов периодических функций многих переменных берется оператор Фурье с гармониками из ступенчатого гиперболического креста. Пересечение классов функций приближается гармониками из пересечения ступенчатых гиперболических крестов. Показывается, что построенный оператор Фурье дает оптимальное приближение среди всех операторов Фурье с заданным числом гармоник N. И более того, является оптимальным среди всех ядерных операторов с ядерной нормой не превышающей N. Отметим, что в этот класс операторов входят ортопроекторы на N-мерные подпространства.

В главе 2 вводятся также две новые характеристики приближения: ядерный и спектральный N-поперечники. Введение этих величин на наш взгляд естественно и полезно. Оказывается, что знание ядерной нормы и спектра оператора позволяет делать выводы о приближающих способностях оператора, не зная даже размерности приближающего подпространства. Причем N может принимать и дробные значения. Определяются точные значения спектральных и проекционных поперечников ряда конечномерных множеств.

В третьей главе определяются колмогоровские и линейные поперечники классов периодических функций одной и нескольких переменных $W^r_p(\mathbb{T}^d)$ и $H^r_p(\mathbb{T}^d)$. Во многих случаях вычисление поперечников классов функций сводится к задаче вычисления поперечников конечномерных множеств. При этом мы пользуемся оценками поперечников конечномерных множеств в тех случаях, когда они уже известны. В ряде случаев, когда эти оценки являлись неизвестными, решается задача их вычисления. Приводятся оценки поперечников классов функций многих переменных при малых гладкостях.

В четвертой главе определяются порядки норм производных ядер Дирихле и Фавара в смешанной норме с гармониками внутри и вне ступенчатого гиперболического креста. Отыскиваются также порядки норм производных ядер Дирихле и Фавара, являющихся минимальными по выбору N гармоник. Находится в ряде случаев порядок множителя, зависящего от N, в неравенстве Бернштейна–Никольского, являющегося минимальным по выбору N гармоник. Определяются порядки бернштейновских поперечников функциональных классов, точные значения бернштейновских поперечников бесконечномерных p-эллипсоидов.

В монографии используются и развиваются методы гармонического анализа. Основным методом доказательств в ряде теорем является идея представления функции в виде блоков гармоник, базирующейся на теореме типа теоремы Литтльвуда–Пэли, использование неравенств типа неравенства Гельдера, Минковского, Бернштейна, Марцинкевича, Харди, а так же неравенств, связывающих нормы функций в различных метриках, типа неравенства Темлякова и др. Важное место занимает переход от поперечников функциональных классов к поперечникам конечномерных множеств с помощью дискретизации по теореме типа теоремы Марцинкевича–Зигмунда и определении поперечников полученных множеств. При этом используются и развиваются геометрические методы теории поперечников (Е. Д. Глускина, Б. С. Кашина и др.).

В начале разделов, пунктов приводятся предварительные сведения и формулировки основных теорем, используемых при доказательствах.

Среди тех, кто внес наибольший вклад в область вложений и приближений указанных классов, отметим также С. М. Никольского, О. В. Бесова, Н. С. Никольскую, Динь Зунга, В. Н. Темлякова.

1 Вложение классов функций и множеств

В первой главе вводятся классы периодических функций одной и нескольких переменных с доминирующей смешанной производной и дробным порядком дифференцирования W^r_p, H^r_p, $B^r_{p,\theta}$, а также их пересечения $W^\Omega(\mathbb{T}^d) = \bigcap\limits_{(\frac{1}{p},r)\in\Omega} W^r_p(\mathbb{T}^d)$. Излагаются необходимые сведения из гармонического анализа, теории мультипликаторов, дробного дифференцирования, выпуклого анализа. Приводится ряд используемых в дальнейшем неравенств.

Выводятся необходимые и достаточные условия вложения W^Ω в класс W^γ_q, а также достаточные условия для вложения пересечения конечномерных множеств. Полученные вложения в дальнейшем используются для нахождения оценок сверху при приближении. Аналоги элементов и функций, доказывающих обязательность выполнения условий вложения, используются далее для доказательства оценок снизу приближений.

Полученные вложения функциональных классов и конечномерных множеств будут использованы в главе 2 для нахождения приближения этих классов суммами Фурье, ядерных и проекционных поперечников, а также в главе 3 для подсчета колмогоровских и линейных поперечников функциональных классов и конечномерных множеств.

Приводится обобщение известного неравенства Хаусдорфа–Юнга на случай векторных норм, позволяющее снять ограничение на монотонность компонент вектора нормы, имевшееся в ранее известной работе А. Бенедека и Р. Панцоне [1961]. Полученные мультипликативные неравенства, а также неравенства Хаусдорфа–Юнга для смешанных норм неоднократно используются во всех остальных разделах главы.

1.1 Предварительные сведения

В п. 1 кратко излагаются необходимые сведения из гармонического анализа, теории мультипликаторов, дробного дифференцирования, выпуклого анализа. Формулируются (для периодических функций многих переменных) теоремы Марцинкевича, Литтльвуда–Пэли, Бесова, приводятся неравенства Гельдера для интегралов и для сумм, неравенства Хаусдорфа–Юнга для функций одной переменной, ряд часто используемых неравенств типа неравенства для средних. Вводятся классы периодических функций нескольких переменных с доминирующей смешанной производной и векторной нормой $W_p^r(\mathbb{T}^d)$, $r, p \in \mathbb{R}^d$, $0 < p \le \infty$, с производной определяемой по Вейлю; классы Гельдера–Никольского $H_p^r(\mathbb{T}^d)$ и классы Бесова $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $0 < \theta \le \infty$.

Условимся равенства и неравенства для векторов понимать как покоординатные. Через $0, 1, 2, \infty$ будем при необходимости также обозначать d-мерные векторы, состоящие из нулей, единиц, двоек и бесконечностей соответственно.

Для вектора $p \in \mathbb{R}^d$ $(0 < p < \infty)$ символ $\frac{1}{p}$ будет рассматриваться как вектор $\left(\frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_d}\right)$. Функции $a(N)$ и $b(N)$ будем называть функциями одного порядка и писать $a \asymp b$, если существует константа N_0 такая, что при $N > N_0 \quad C_1 a(N) \le b(N) \le C_2 a(N)$ $(C_1, C_2 > 0)$. Аналогично определяются порядковые неравенства $a \ll b$ и $a \gg b$. Для $a \in \mathbb{R}$ обозначим $[a]$ — целую часть числа a. Вложение $A \subset\subset B$ означает, что существует константа $C > 0$ такая, что $A \subset CB$. Аналогично определяется вложение $A \supset\supset B$.

Пусть $\mathbb{T}^d = (-\pi, \pi]^d$ — d-мерный тор, реализованный в виде произведения d полуинтервалов $(-\pi, \pi]$. Через $L_{\mathbf{p}} = L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^d)$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d)$, $0 < p_j \le \infty$, $j = 1, \dots, d$, обозначим пространство функций $x(t) = x(t_1, \dots, t_d)$ измеримых на $\mathbb{T}^d$, периодических по каждой переменной с периодом 2π таких, что конечна величина:

$$\|x(\cdot)\|_{L_p} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left[\dots \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |x(t)|^{p_1} \, dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right]^{\frac{p_d}{p_{d-1}}} dt_d \right\}^{\frac{1}{p_d}}.$$

Здесь для скаляра $p = \infty$ выражение $\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |y(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$ понимается как существенный максимум функции $|y(t)|$. Если $1 \le p_j \le \infty$, $j = 1, \dots, d$, то $\| \cdot \|_{L_p}$ будет удовлетворять аксиомам нормы. Свойства пространств со смешанной нормой на $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{T}^d$ описаны в монографии О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [1975] (для краткости обозначим БИН).

Функцию $x(\cdot) \in L_p(\mathbb{T}^d)$ можно разложить в ряд Фурье

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} x_k e^{i\langle k,t\rangle},$$

где суммирование ведется по всем $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ — d-мерной целочисленной решетке, $\langle k, t\rangle = \sum\limits_{i=1}^{d} k_i t_i$, а коэффициенты Фурье x_k определяются по формуле

$$x_k = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} x(t) e^{-i\langle k,t\rangle}\, dt.$$

Для упрощения формулировок будем рассматривать функции с нулевыми средними по всем аргументам, то есть функции, коэффициенты Фурье которых x_k, имеющие хотя бы один нулевой индекс k, равны нулю:

$$x(t) = \sum_{k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d} x_k e^{i\langle k,t\rangle},$$

где $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d := \{k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d \mid k_j \neq 0,\ j = 1, \ldots, d\}$.

Для такой функции и вектора $r = (r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{R}^d$ введем операцию дробного дифференцирования по формуле

$$x^{(r)}(t) = \sum_{k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d} x_k (ik)^r e^{i\langle k,t\rangle},$$

где $(ik)^r = (ik_1)^{r_1} \ldots (ik_d)^{r_d}$, $(ik)^r = |k|^r e^{(i/2)\pi r \operatorname{sign} k}$ (для скаляров k и r). Каждому вектору $s = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ сопоставим множество $\square_s$ по следующему правилу:

$$\square_s = \{k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d \mid 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = 1, \ldots, d\}.$$

Тогда

$$x(t) = \sum_{k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d} x_k e^{i\langle k,t\rangle} = \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \delta_s x(t),$$

где $\delta_s x(t) := \sum\limits_{k \in \square_s} x_k e^{i\langle k,t\rangle}$, $\operatorname{card} \square_s = 2^{\langle s,1\rangle}$.

Для векторов $p, r \in \mathbb{R}^d$, $0 < p_j \leq \infty$, $j = 1, \ldots, d$, числа $\theta \in \mathbb{R}$, $0 < \theta \leq \infty$, и описанных выше функций с нулевыми средними по всем аргументам введем следующие классы функций:

$$W_p^r(\mathbb{T}^d) = \{x(\cdot) \mid \|x\|_{W_p^r} := \|x^{(r)}\|_{L_p} \leq 1\} \text{ — классы Соболева,}$$

$$H_p^r(\mathbb{T}^d) = \left\{ x(\cdot) \mid \|x\|_{H_p^r} := \sup_{s \in \mathbb{N}^d} \|\delta_s x^{(r)}\|_{L_p} \leq 1 \right\}$$

— классы Гельдера–Никольского,

$$B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d) = \left\{ x(\cdot) \mid \|x\|_{B_{p,\theta}^r} := \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \|\delta_s x^{(r)}\|_{L_p}^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\}$$

— классы Бесова.

Если $\theta = \infty$, то $B_{p,\infty}^r(\mathbb{T}^d) = H_p^r(\mathbb{T}^d)$.

Классы $H_p^r(\mathbb{T}^d)$ имеют эквивалентное определение через смешанные разности. Разложим вектор $r \in \mathbb{R}^d$ в виде суммы векторов $r = \alpha + \beta$ таких, что $\alpha \in \mathbb{Z}^d$, $0 < \beta \leq 1$. Тогда

$$\|x\|_{H_p^r} \asymp \sup_{h \in \mathbb{T}^d} \|\triangle_h^2 x^{(\alpha)}\|_{L_p} |h_1|^{-\beta_1} \ldots |h_d|^{-\beta_d},$$

где $\triangle_h^2 = \triangle_h \triangle_h$ — оператор смешанной разности с шагом h_j по переменной t_j. Это утверждение доказано Н. С. Никольской [1975b] для скалярных норм, а для векторных доказательство аналогично.

Отметим, что из определения класса $H_p^r(\mathbb{T}^d)$ и формулируемой ниже теоремы 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли) вытекает, что при $p \in \mathbb{R}^d$, $1 < p < \infty$,

$$x \in H_p^r(\mathbb{T}^d) \iff \|\delta_s x\|_{L_p} \ll 2^{-\langle s,r\rangle} \; \forall \; s \in \mathbb{N}^d. \tag{1.1.1}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие теоремы. Для функций с нулевыми средними по всем аргументам приведем их обобщенными на операцию дробного дифференцирования любого порядка $r \in \mathbb{R}^d$.

Теорема 1.1.1 (Марцинкевича о мультипликаторах (см. [БИН, с. 239])). *Пусть для последовательности* $\{\lambda_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$ *существует число* M *такое, что для любых натуральных чисел* $j_1, \ldots, j_l$ *таких, что* $1 \le j_1 \le \ldots \le j_l \le d$, *и для любого* $s' \in \mathbb{Z}^l$, $1 \le l \le d$,

$$|\lambda_k| \le M, \qquad \sum_{k' \in \square_{s'}} |\triangle_{j_1} \ldots \triangle_{j_l} \lambda_k| \le M,$$

где $k' = (k_{j_1}, \ldots, k_{j_l})$, $s' = (s_{j_1}, \ldots, s_{j_l})$, $\triangle_j \lambda_k = \lambda_{k+e_j} - \lambda_k$, e_j — j*-й орт,* $\triangle_{j_1} \ldots \triangle_{j_l} \lambda_k$ — *соответственно определенная кратная разность. Тогда для функции* $x(t) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^d} x_k e^{i\langle k,t\rangle} \in L_p(\mathbb{T}^d)$, $p \in \mathbb{R}^d$, $1 < p < \infty$, *функция* $y(t) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_k x_k e^{i\langle k,t\rangle} \in L_p(\mathbb{T}^d)$ *и*

$$\|y\|_{L_p} \le C_p M \|x\|_{L_p}. \tag{1.1.2}$$

Теорема 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли (см. [БИН, с. 238])). *Пусть* $p, r \in \mathbb{R}^d$, $1 < p < \infty$. *Тогда*

$$\|x^{(r)}(\cdot)\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} |2^{\langle s,r\rangle} \delta_s x(\cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p. \tag{1.1.3}$$

Сформулируем неравенство Гельдера для интегралов и для сумм. Получение таких неравенств для смешанных норм см. [БИН, с. 18–19].

Неравенство 1.1.1 (Гельдера для интегралов). *Пусть* $p^i \in \mathbb{R}^d$, $1 \le p^i \le \infty$, $x_i(\cdot) \in L_{p^i}(\mathbb{T}^d)$, $i = 1, \ldots, m$, $\frac{1}{p^1} + \ldots + \frac{1}{p^m} = 1$. *Тогда*

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} |x_1(t) \ldots x_m(t)|\, dt \le \|x_1(\cdot)\|_{p^1} \ldots \|x_m(\cdot)\|_{p^m}. \tag{1.1.4}$$

Неравенство 1.1.2 (Гельдера для сумм). *Пусть* $1 \le p^i \le \infty$, $x^i = \{x_k^i,\ k \in \mathbb{N}\} \in l_{p^i}$, $i = 1, \dots, m$, $\frac{1}{p^1} + \ldots + \frac{1}{p^m} = 1$. *Тогда*

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k^1 \ldots x_k^m| \le \|x^1\|_{p^1} \ldots \|x^m\|_{p^m}. \tag{1.1.5}$$

Из неравенства Гельдера для сумм легко выводятся следующие неравенства, которые нам пригодятся в дальнейшем.

Неравенство 1.1.3. *Пусть* $1 \le p^i \le \infty$, $x^i = \{x_k^i,\ k \in \mathbb{N}\} \in l_{p^i}$, $i = 1, \dots, m$, $x = \{x_k^1 \ldots x_k^m,\ k \in \mathbb{N}\}$, $\frac{1}{p^1} + \ldots + \frac{1}{p^m} = \frac{1}{q}$. *Тогда*

$$\|\{x_k^1 \ldots x_k^m\}\|_q \le \|x^1\|_{p^1} \ldots \|x^m\|_{p^m}. \tag{1.1.6}$$

При $m = 2$, $q = 2$, $p_2 = p > 2$, $\frac{1}{p^1} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{p^1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \Leftrightarrow p_1 = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} = \frac{2p}{p-2}$, неравенство перепишется следующим образом:

$$\Big(\sum_k a_k^2 b_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \overset{(1.1.8)}{\le} \Big(\sum_k a_k^{\frac{2p}{p-2}}\Big)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \Big(\sum_k b_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1.7}$$

Неравенство 1.1.4. *Пусть* $0 < p^i \le \infty$, $\mu_i \ge 0$, $i = 1, \dots, m$, $\sum\limits_{i=1}^m \mu_i = 1$, $\sum\limits_{i=1}^m \frac{\mu_i}{p^i} = \frac{1}{p}$, $x = \{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. *Тогда*

$$\|x\|_p \le \|x\|_{p^1}^{\mu_1} \ldots \|x\|_{p^m}^{\mu_m}. \tag{1.1.8}$$

Нам понадобятся также два следующих неравенства для дискретных множеств (см. Г. Харди, Д. Литтльвуд, Г. Полиа [1948, с. 41–43]).

Неравенство 1.1.5 (Минковского). *Если* $0 < q \le p \le \infty$, *то*

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.1.9}$$

Неравенство 1.1.6 (для средних). *Если* $0 < q \le p \le \infty$, *то*

$$\Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{|x_i|^q}{N}\Big)^{\frac{1}{q}} \le \Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{|x_i|^p}{N}\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1.10}$$

Приведем две теоремы об отделимости в конечномерных пространствах (см., например, Э. М. Галеев [2013, с. 55]).

Напомним, что множества $A, B \in \mathbb{R}^d$ называются *отделимыми*, если существует вектор $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \neq 0$, для которого

$$\sup_{a\in A} \langle \lambda, a\rangle \leq \inf_{b\in B} \langle \lambda, b\rangle,$$

и *строго отделимыми*, если

$$\sup_{a\in A} \langle \lambda, a\rangle < \inf_{b\in B} \langle \lambda, b\rangle.$$

Теорема 1.1.3 (об отделимости). *Пусть A и B — непустые выпуклые множества в $\mathbb{R}^d$, $A \cap B = \emptyset$. Тогда множества A и B отделимы.*

Теорема 1.1.4 (о строгой отделимости). *Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ — непустое выпуклое замкнутое множество, $b \notin A$. Тогда точку b можно строго отделить от множества A.*

1.2 Вложение конечномерных множеств

В п. 2 выводятся достаточные условия вложения конечномерного множества, являющегося пересечением множеств B_p^r, во множество B_q^γ.

Для чисел $r \in \mathbb{R}$ и $0 < p \leq \infty$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ введем множество $B_p^r := B_p^r(\mathbb{R}^n) := \bigl\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{l_p^n} \leq n^{-r}\bigr\}$. Как обычно, обозначим

$$\|x\|_{l_p^n} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{при } 0 < p < \infty, \\ \max\limits_{k=1,\dots,n} |x_k|, & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Теорема 1.2.1. *Если $0 < q \leq p \leq \infty$, $r \in \mathbb{R}$, то $B_q^r \subset B_p^r$.*

Теорема 1.2.1 является следствием неравенства 1.1.5.

Теорема 1.2.2. *Если $0 < q \leq p \leq \infty$, $r \in \mathbb{R}$, то $B_p^r \subset B_q^{r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$.*

Теорема 1.2.2 является следствием неравенства 1.1.6 (для средних).

Для множества K из $\mathbb{R}^2$, $K \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, будем рассматривать множество $B(K) = \bigcap\limits_{(\frac{1}{p}, r) \in K} B_p^r$, являющееся пересечением конечномерных множеств B_p^r, и $Q(K) = \operatorname{co} K + \operatorname{cone}\{(-1,0),(1,-1)\}$.

Теорема 1.2.3. *Пусть* $0 < p^i \le \infty$, $\mu_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\sum\limits_{i=1}^m \mu_i = 1$, $\dfrac{1}{p} = \sum\limits_{i=1}^m \dfrac{\mu_i}{p^i}$, $r = \sum\limits_{i=1}^m \mu_i r^i$, $K = \left\{ \left(\dfrac{1}{p^i}, r^i \right), \; i = 1, \ldots, m \right\}$. *Тогда* $B(K) \subset B_p^r$.

Теорема 1.2.3 является следствием неравенства 1.1.4.

Имеет место следующая теорема вложения конечномерных множеств.

Теорема 1.2.4 (Теорема вложения конечномерных множеств)**.** *Пусть* $K \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *— подмножество из* $\mathbb{R}^2$, $0 < q \le \infty$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{1}{q}, \gamma\right) \in Q(K)$. *Тогда* $B(K) \subset B_q^\gamma$.

Доказательство. Пусть $\left(\frac{1}{q}, \gamma\right) \in Q(K)$. Тогда по определению множества $Q(K)$ и выпуклой оболочки множества

$$\left(\frac{1}{q}, \gamma\right) = \left(\frac{1}{p}, r\right) - \nu(1,0) + \lambda(1,-1) \iff \begin{cases} \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \nu + \lambda, \\ \gamma = r - \lambda, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

где $r = \sum\limits_{i=1}^m \mu_i r^i$, $\dfrac{1}{p} = \sum\limits_{i=1}^m \dfrac{\mu_i}{p^i}$, $\mu_i \ge 0$, $\left(\dfrac{1}{p^i}, r^i\right) \in K$, $i = 1, \ldots, m$, $\sum\limits_{i=1}^m \mu_i = 1$, $\nu \ge 0$, $\lambda \ge 0$. По теореме 1.2.3

$$B(K) \subset B_p^r. \tag{1.2.2}$$

Выберем величину z из уравнения $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{p} + \lambda$. Поскольку $\lambda \ge 0$, то $z \le p$ и по теореме 1.2.2

$$B_p^r \subset B_z^{r + \frac{1}{p} - \frac{1}{z}} = B_z^{r-\lambda} = B_z^\gamma. \tag{1.2.3}$$

Так как $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \nu + \lambda = \dfrac{1}{z} - \nu$, где $\nu \geq 0$, то $z \leq q$ и по теореме 1.2.1

$$B_z^\gamma \subset B_q^\gamma. \tag{1.2.4}$$

Из вложений (1.2.2)–(1.2.4) следует нужное вложение: $B(K) \subset B_q^\gamma$. $\square$

Теорема 1.2.4 является прообразом теоремы 1.3.5 о вложениях для функциональных классов, опубликована в работах автора [1978b], [1981].

1.3 Вложения функциональных классов

В п. 3 выводятся необходимые и достаточные условия вложения класса периодических функций нескольких переменных $W^\Omega(\mathbb{T}^d)$, являющегося пересечением конечного числа классов $W_p^r(\mathbb{T}^d)$, в класс $W_q^\gamma(\mathbb{T}^d)$ для функций с произвольными гармониками, а также для функций с гармониками из логарифмически выпуклого множества.

Для доказательства теоремы вложений функциональных классов аналога теоремы 1.2.4 нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения, которые мы сформулируем в виде функциональных неравенств и эквивалентных им вложений.

Теорема 1.3.1. *При $p, q \in \mathbb{R}^d$, $0 < q \leq p \leq \infty$, выполняется неравенство*

$$\|x\|_{L_q(\mathbb{T}^d)} \leq \|x\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \tag{1.3.1}$$

и вложение $W_p^r(\mathbb{T}^d) \subset W_q^r(\mathbb{T}^d)$, $r \in \mathbb{R}^d$.

Доказательство неравенства (1.3.1) при $d = 1$ см., например, в монографии В. М. Тихомирова [1976, с. 176]. При $d > 1$ доказывается аналогично с использованием неравенства 1.1.1 (Гельдера для интегралов).

Теорема 1.3.2 (см. [БИН, с. 243]). *При $p, q, r \in \mathbb{R}^d$, $1 < p \leq q < \infty$, выполняется неравенство*

$$\|x^{(r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}\|_{L_q(\mathbb{T}^d)} \ll \|x^{(r)}\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \tag{1.3.2}$$

и вложение $W_p^r(\mathbb{T}^d) \subset\subset W_q^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}(\mathbb{T}^d)$.

Теорема 1.3.3. *Пусть* $\alpha, \beta, p \in \mathbb{R}^d$, $\alpha \leq \beta$, $1 < p < \infty$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\|x^{(\alpha)}\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \ll \|x^{(\beta)}\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \tag{1.3.3}$$

и вложение $W_p^{\beta}(\mathbb{T}^d) \subset\subset W_p^{\alpha}(\mathbb{T}^d)$.

Доказательство. Возьмем произвольное $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее векторному неравенству $\frac{\beta-\alpha}{n} < 1 - \frac{1}{p}$. Пусть $q \in \mathbb{R}^d$ определяется из уравнения $\frac{\beta-\alpha}{n} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Тогда $1 < q \leq p < \infty$ и в силу теорем 1.3.2, 1.3.1

$$\|x^{(\alpha)}\|_p \overset{(1.3.2)}{\ll} \|x^{(\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}\|_q \overset{(1.3.1)}{\leq} \|x^{(\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}\|_p = \|x^{(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n})}\|_p.$$

Повторяя это рассуждение n раз, придем к утверждению теоремы. $\square$

Для множества $\Omega = \left\{ \left(\dfrac{1}{p^i}, r^i\right) \subset (0,\,1)^d \times \mathbb{R}^d \mid i = 1, \ldots, m \right\}$ введем класс функций $W^{\Omega}(\mathbb{T}^d) = \bigcap\limits_{(\frac{1}{p}, r) \in \Omega} W_p^r(\mathbb{T}^d)$.

Теорема 1.3.4 (см. [БИН, с. 244]). *Пусть* $p^i, r^i \in \mathbb{R}^d$, $1 < p^i < \infty$, $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\sum\limits_{i=1}^m \mu_i = 1$, $\dfrac{1}{p} = \sum\limits_{i=1}^m \dfrac{\mu_i}{p^i}$, $r = \sum\limits_{i=1}^m \mu_i r^i$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\|x^{(r)}\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} \ll \prod_{i=1}^m \|x^{(r^i)}\|_{L_{p^i}(\mathbb{T}^d)}^{\mu_i} \tag{1.3.4}$$

и вложение $W^{\Omega}(\mathbb{T}^d) \subset\subset W_p^r(\mathbb{T}^d)$.

Неравенство (1.3.2) и мультипликативное неравенство (1.3.4) доказаны О. В. Бесовым.

Теорема 1.3.5 (Теорема вложения функциональных классов [1978], [1981]). *Пусть* $W^{\Omega}(\mathbb{T}^d) = \bigcap\limits_{(\frac{1}{p},r)\in\Omega} W_p^r(\mathbb{T}^d)$, $\Omega = \left\{\left(\frac{1}{p^i}, r^i\right) \subset (0,1)^d \times \mathbb{R}^d \mid i = 1,\dots,m\right\}$, $G = \{\operatorname{co}\Omega + (\nu, 0) - (\lambda, \lambda) \mid \lambda, \nu \in \mathbb{R}_+^{\mathrm{d}}\}$, $\gamma, q \in \mathbb{R}^d$, $1 < q < \infty$. *Тогда* $W^{\Omega}(\mathbb{T}^d) \subset\subset W_q^{\gamma}(\mathbb{T}^d)$ *тогда и только тогда, когда* $\left(\frac{1}{q}, \gamma\right) \in G$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $\left(\frac{1}{q}, \gamma\right) \in G$. Тогда по определению множества G и выпуклой оболочки множества

$$\left(\frac{1}{q}, \gamma\right) = \left(\frac{1}{p}, r\right) + \nu(1,0) - \lambda(1,1) \iff \begin{cases} \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \nu - \lambda, \\ \gamma = r - \lambda, \end{cases} \tag{1.3.5}$$

где $r = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i r^i$, $\frac{1}{p} = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\mu_i}{p^i}$, $\mu_i \geq 0$, $\left(\frac{1}{p^i}, r^i\right) \in \Omega$, $i = 1,\dots,m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i = 1$, $\nu \geq 0$, $\lambda \geq 0$. По теореме 1.3.4

$$W^{\Omega} \subset\subset W_p^r. \tag{1.3.6}$$

В силу теорем 1.3.1–1.3.2

$$W_p^r \subset\subset W_q^{r-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+} = W_q^{r-(\lambda-\nu)_+}. \tag{1.3.7}$$

Так как $r - (\lambda - \nu)_+ \geq r - \lambda = \gamma$, то по теореме 1.3.3

$$W_q^{r-(\lambda-\nu)_+} \subset\subset W_q^{\gamma}. \tag{1.3.8}$$

Из вложений (1.3.6)–(1.3.8) следует нужное вложение: $W^{\Omega} \subset\subset W_q^{\gamma}$.

Необходимость докажем от противного. Предположим, что точка $\left(\frac{1}{q}, \gamma\right) \notin G$. По теореме 1.1.4 (о строгой отделимости) точку $\left(\frac{1}{q}, \gamma\right)$ можно строго отделить от выпуклого замкнутого множества G. То есть существуют ненулевой вектор $(a, b) \in \mathbb{R}^{2d}$ $(a, b \in \mathbb{R}^d)$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что справедливо неравенство

$$\sup_{\xi\in G} \langle (a,b), \xi\rangle \leq \left\langle (a,b), \left(\tfrac{1}{q}, \gamma\right)\right\rangle - \varepsilon.$$

В силу построения множества G это неравенство переписывается в виде

$$\sup_{\xi\in\operatorname{co}\Omega,\ \lambda,\nu\ge 0}\big(\langle(a,b),\xi\rangle-\langle a,\lambda\rangle-\langle b,\lambda\rangle+\langle a,\nu\rangle\big)\le\big\langle(a,b),\big(\tfrac{1}{q},\gamma\big)\big\rangle-\varepsilon.$$

Отсюда $\sup\limits_{\lambda\ge 0}\langle -a-b,\lambda\rangle<+\infty$, $\sup\limits_{\nu\ge 0}\langle a,\nu\rangle<+\infty$. Это возможно лишь только в том случае, если $a+b\ge 0$, $a\le 0$. Поэтому

$$\sup_{\left(\frac{1}{p},r\right)\in\Omega}\big(\big\langle a,\tfrac{1}{p}\big\rangle+\big\langle b,r\big\rangle\big)\le\big\langle a,\tfrac{1}{q}\big\rangle+\langle b,\gamma\rangle-\varepsilon. \tag{1.3.9}$$

Рассмотрим функцию $x(t)=c\prod\limits_{j=1}^{d}\big(D_{2^{[\mu b_j]}+2^{[-\mu a_j]}}(t_j)-D_{2^{[\mu b_j]}}(t_j)\big)$ параметра $\mu>0$, где $D_N(t)=\sum\limits_{i=1}^{N}e^{ikt}$ для скаляра t, $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа, коэффициент $c>0$ определим позже. Для оценки $\|x^{(\gamma)}\|_q$ нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1.3.1. *Пусть* $N_1\ge N_2$ *— натуральные числа,* $1<q<\infty$, $\gamma\in\mathbb{R}$, $y(t)=D_{N_1+N_2}(t)-D_{N_1}(t)$. *Тогда*

$$\|y^{(\gamma)}\|_q\asymp N_1^{\gamma}N_2^{1-\frac{1}{q}}. \tag{1.3.10}$$

Доказательство. Покажем вначале, что $\|y^{(\gamma)}\|_q\asymp N_1^{\gamma}\|y\|_q$. По определению дробного дифференцирования $y^{(\gamma)}(t)=\sum\limits_{k=N_1+1}^{N_1+N_2}(ik)^{\gamma}e^{ikt}$. Нетрудно проверить, что множители

$$\lambda_k=\begin{cases}\big(\frac{ik}{N_1}\big)^{\gamma}, & k=N_1+1,\dots,N_1+N_2,\\ 0, & \text{в остальных случаях},\end{cases}$$

$$\mu_k=\begin{cases}\big(\frac{ik}{N_1}\big)^{-\gamma}, & k=N_1+1,\dots,N_1+N_2,\\ 0, & \text{в остальных случаях},\end{cases}$$

удовлетворяют теореме 1.1.1 (Марцинкевича о мультипликаторах) с константами, не зависящими от N_1 и N_2, поэтому $\|y^{(\gamma)}\|_q\asymp N_1^{\gamma}\|y\|_q$. Отсюда и из соотношения

$$\|y\|_q=\|D_{N_1+N_2}-D_{N_1}\|_q=\|D_{N_2}\|_q\asymp N_2^{1-\frac{1}{q}}$$

(последняя оценка содержится, например, в монографии В. М. Тихомирова [1976, с. 181], а так же в теореме 4.1.1) следует утверждение леммы. □

По лемме 1.3.1 и неравенству (1.3.9) имеем для $\left(\frac{1}{p}, r\right) \in \operatorname{extr}\Omega$ (крайние точки множества Ω)

$$\|x^{(r)}\|_p \ll c2^{\sum\limits_{j=1}^{d}([\mu b_j]r_j - [\mu a_j](1-\frac{1}{p_j}))} \ll c2^{\mu(\langle b,r\rangle - \langle a, 1-\frac{1}{p}\rangle)} \ll$$

$$\ll c2^{\mu(\langle b,\gamma\rangle - \langle a, 1-\frac{1}{q}\rangle - \varepsilon)}.$$

Отсюда $x \in W^{\operatorname{extr}\Omega} \subset W^{\Omega}$ при $c \asymp 2^{\mu(-\langle b,\gamma\rangle + \langle a, 1-\frac{1}{q}\rangle + \varepsilon)}$.
С другой стороны,

$$\|x^{(\gamma)}\|_q \asymp c2^{\mu(\langle b,\gamma\rangle - \langle a, 1-\frac{1}{q}\rangle)} \asymp 2^{\mu\varepsilon} \to +\infty \text{ при } \mu \to +\infty.$$

Значит, $x \notin W_q^{\gamma}$ при больших μ. Необходимость, а вместе с ней и теорема доказаны. □

Перейдем к вложению классов функций с гармониками из логарифмически выпуклого замкнутого множества.

Для векторов $r, p \in \mathbb{R}^d$, $1 \le p \le \infty$, и множества $S \subset N^d$ введем класс периодических функций нескольких переменных

$$W_p^r(\mathbb{T}^d, S) = \left\{ x(\cdot) = \sum_{s\in S} \delta_s x(\cdot) \mid \|x^{(r)}(\cdot)\|_p \le 1 \right\}.$$

Сформулируем теорему о вложениях для классов $W_p^r(\mathbb{T}^d, S)$ аналогичную теореме 1.3.5.

Теорема 1.3.6 (Общая теорема вложения функциональных классов с гармониками из логарифмически выпуклого замкнутого множества)**.** *Пусть* $W^{\Omega}(\mathbb{T}^d, S) = \bigcap\limits_{(\frac{1}{p}, r)\in\Omega} W_p^r(\mathbb{T}^d, S)$, $\Omega = \left\{\left(\frac{1}{p^i}, r^i\right) \subset (0,\, 1)^d \times \mathbb{R}r^d \mid i = 1, \dots, m\right\}$, $G = \{\operatorname{co}\Omega + (\nu, 0) - (\lambda, \lambda) \mid \lambda, \nu \in \mathbb{R}_+^{\mathrm{d}}\}$, $\gamma, q \in \mathbb{R}^d$, $1 < q < \infty$, $S = \{\, s \in \mathbb{N}^d \mid s_j = [s_j'],\ j = 1, \dots, d,$

$s'_j \in Q + K\}$, $Q \in \mathbb{R}^d_+$ — ограниченное множество, $K \in \mathbb{R}^d_+$ — выпуклый замкнутый конус с вершиной в нуле, $B = G + (0, K^\circ)$. Тогда $W^\Omega(\mathbb{T}^d, S) \subset\subset W^\gamma_q(\mathbb{T}^d, S)$ тогда и только тогда, когда $\left(\frac{1}{q}, \gamma\right) \in B$.

Здесь $K^\circ = \{\, \xi \in \mathbb{R}^d \mid \langle \xi, \eta\rangle \le 0 \ \forall\, \eta \in K\}$ — поляра конуса K.

Доказательство. Достаточность. Пусть точка $\left(\frac{1}{q}, \gamma\right) \in B$. Поскольку $B - (0, K^\circ) = G$, то построению множества B существуют вектор $r \in K^\circ$ такой, что $\left(\frac{1}{q}, \gamma - r\right) \in G$. По теореме 1.3.5

$$W^\Omega(\mathbb{T}^d, S) \subset\subset W^{\gamma-r}_q(\mathbb{T}^d, S). \tag{1.3.11}$$

В силу определения множества S и условия $r \in K^\circ$

$$\sup_{s\in S} \langle s, r\rangle \le \sup_{s \in B_\infty + Q + K} \langle s, r\rangle \le$$
$$\le \sup_{s \in B_\infty + Q} \langle s, r\rangle + \sup_{s\in K} \langle s, r\rangle \overset{r \in K^\circ}{=} \sup_{s \in B_\infty + Q} \langle s, r\rangle \le C,$$

где B_∞ — единичный шар (куб) пространства $l_\infty(\mathbb{Z}^d)$. Следовательно, для функции $x = \sum\limits_{s \in S} \delta_s x$

$$\|x^{(\gamma)}\|_q \overset{(1.1.1)}{\asymp} \left\| \left(\sum_{s \in S} |2^{\langle s, \gamma\rangle} \delta_s x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q = \left\| \left(\sum_{s \in S} |2^{\langle s, r\rangle} 2^{\langle s, \gamma - r\rangle} \delta_s x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \ll$$
$$\ll \left\| \left(\sum_{s \in S} |2^{\langle s, \gamma - r\rangle} \delta_s x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \overset{(1.1.1)}{\asymp} \|x^{(\gamma - r)}\|_q.$$

Значит, $W^{\gamma-r}_q \subset\subset W^\gamma_q$ и из вложения (1.3.11) $W^\Omega \subset\subset W^\gamma_q$.

Необходимость докажем от противного. Предположим, что точка $\left(\frac{1}{q}, \gamma\right) \notin B$. Множество B выпукло, как сумма выпуклых множеств. Докажем, что множество B замкнуто. Поляра выпуклого замкнутого конуса K является замкнутым выпуклым конусом K° (см. Р. Рокафеллар [1973, с. 138]). Пусть $(0, h)$ — рецессивное[1] направление для множества $(0, K^\circ)$ и $(0, -h)$ — рецессивное

[1]Напомним (см. Рокафеллар [1973, с. 77]), что направление h для множества $C \subset \mathbb{R}^k$ называется *рецессивным*, если из условия $c \in C$ следует, что $c + th \in C \ \forall\, t > 0$.

направление для множества G. Тогда из построения множества G вытекает, что $h \geq 0$. Поскольку $K \subset \mathbb{R}_+^d$, то $K^\circ \supset \mathbb{R}_-^d$ и, следовательно, $(0, -h)$ является рецессивным направлением множества $(0, K^\circ)$. Поэтому множество B как сумма полиэдрального выпуклого множества G и выпуклого замкнутого множества $(0, K^\circ)$, причем всякое рецессивное направление для G, противоположное рецессивному направлению для $(0, K^\circ)$, есть направление, по которому $(0, K^\circ)$ линейно, само замкнуто (см. Рокафеллар [1973, с. 201]).

По теореме 1.1.4 (о строгой отделимости) точку $\left(\frac{1}{q}, \gamma\right)$ можно строго отделить от выпуклого замкнутого множества B. То есть существуют ненулевой вектор $(a, b) \in \mathbb{R}^{2d}$ $(a, b \in \mathbb{R}^d)$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что справедливо неравенство

$$\sup_{\xi \in B} \langle (a, b), \xi \rangle \leq \langle (a, b), (\tfrac{1}{q}, \gamma) \rangle - \varepsilon.$$

Следовательно, $\sup\limits_{\xi \in G} \langle (a, b), \xi \rangle < +\infty$ и $\sup\limits_{\eta \in K^\circ} \langle b, \eta \rangle < +\infty$. Как и при доказательстве теоремы 1.3.5 отсюда выводим, что $a + b \geq 0$, $a \leq 0$, $b \in K^{\circ\circ}$. Так как для замкнутого выпуклого конуса K (см. Рокафеллар [1973, с. 138]) $K^{\circ\circ} = K$, то $b \in K$. Тогда

$$\sup_{\left(\frac{1}{p}, r\right) \in \Omega} \left(\left\langle a, \tfrac{1}{p} \right\rangle + \langle b, r \rangle\right) \leq \left\langle a, \tfrac{1}{q} \right\rangle + \langle b, \gamma \rangle - \varepsilon.$$

Возьмем функцию параметра $\mu > 0$ $x(t) = c \prod\limits_{j=1}^{d} \left(D_{2^{[\mu b_j + k_j] - 1} + 2^{[-\mu a_j]}}(t_j) - D_{2^{[\mu b_j + k_j] - 1}}(t_j)\right)$, где $k = (k_1, \ldots, k_d)$ — произвольная точка из множества S, коэффициент $c > 0$ определим позже. Поскольку $b \in K$, то $\mu b + k \in S$ $\forall$ $\mu > 0$. Заметим, что если $\delta_s x \neq 0$, то $s = [\mu b + k]$. Поэтому $x = \sum\limits_{s \in S} \delta_s x$. Как и при доказательстве теоремы 1.3.5 можно показать, что $x \in W^\Omega(\mathbb{T}^d, S)$ при $c \asymp 2^{\mu(-\langle b, \gamma \rangle + \langle a, 1 - \frac{1}{q} \rangle + \varepsilon)}$ и $x \notin W_q^\gamma(\mathbb{T}^d, S)$ при больших μ. Необходимость, а вместе с ней и теорема доказаны. $\square$

Теоремы 1.3.5 и 1.3.6 опубликованы в работе автора [1978a]. Множество G из теоремы 1.3.5 для скалярных норм видимо впервые появилось в работе Н. С. Бахвалова [1963], где для классов близких к H_p^r доказывается, что если $\left(\frac{1}{p}, r\right) \in \operatorname{int} G$, то имеется вложение пересечения как и в теореме 1.3.5. В работе Г. Г. Магарил-Ильяева [1979] доказывается теорема о вложениях для функций на $\mathbb{R}^d$, аналогичная теореме 1.3.5. В совместной работе Магарил-Ильяева и В. М. Тихомирова [1984] теорема 1.3.5 обобщается на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m$.

1.4 Неравенства Хаусдорфа–Юнга для векторных норм

В этом пункте приводятся обобщение неравенств Хаусдорфа–Юнга на случай функций многих переменных и векторных норм.

Неравенство 1.4.1 (Хаусдорфа–Юнга (см. Эдвардс [1985, с. 172])). *Пусть* $p \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{ikt}$, $x = \{x_k, k \in \mathbb{Z}\}$. *Тогда*

$$\|x\|_{l_p(\mathbb{Z}^1)} \ge \|x(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T}^1)}, \tag{1.4.1}$$

$$\|x\|_{l_q(\mathbb{Z}^1)} \le \|x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^1)}. \tag{1.4.2}$$

Обозначим через $l_p(\mathbb{Z})$, $0 < p \le \infty$, линейное пространство однократных последовательностей $x = \{x_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, для которых конечна следующая величина

$$\|x\|_{l_p(\mathbb{Z})} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 0 < p < \infty, \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|, & p = \infty. \end{cases}$$

Пространство $l_p(\mathbb{Z})$ является нормированным пространством при $1 \le p \le \infty$.

Аналогично пространству периодических функций многих переменных $L_p(\mathbb{T}^d)$ определим линейное пространство $l_p(\mathbb{Z}^d)$, $p = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{R}^d$, $0 < p \le \infty$, d-кратных последовательностей $x = \{x_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$, для которых конечна величина

$$\|x\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)} = \left(\sum_{k_1} \cdots \sum_{k_{d-1}} \left(\sum_{k_d} |x_k|^{p_d}\right)^{\frac{p_{d-1}}{p_d}} \cdots \right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Здесь для скаляров $p = \infty$ и k выражение $\left(\sum\limits_k |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ понимается как $\sup\limits_k |y_k|$. Нетрудно проверить, что при $1 \le p \le \infty$ $\|\cdot\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)}$ удовлетворяет всем аксиомам нормы. Отметим только, что неравенство $\|x + y\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)} \le \|x\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)} + \|y\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)}$ и следующая лемма получаются при d-кратном применении соответствующего неравенства для однократных последовательностей.

Лемма 1.4.1. *Пусть* $0 < p \le q \le \infty$. *Тогда*

$$\|x\|_{l_q(\mathbb{Z}^d)} \le \|x\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)}.$$

Неравенство 1.4.2 (Хаусдорфа–Юнга для векторных норм). *Пусть* $p \in \mathbb{R}^d$, $1 \le p \le 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x(t) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^d} x_k e^{i\langle k,t\rangle}$, $x = \{x_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$. *Тогда*

$$\|x\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)} \ge \|x(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T}^d)}, \tag{1.4.3}$$

$$\|x\|_{l_q(\mathbb{Z}^d)} \le \|x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}. \tag{1.4.4}$$

Здесь через $l_p(\mathbb{Z})$, $0 < p \le \infty$, обозначается линейное пространство однократных последовательностей $x = \{x_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, для которых конечна величина

$$\|x\|_{l_p(\mathbb{Z})} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 0 < p < \infty, \\ \sup\limits_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|, & p = \infty. \end{cases}$$

Пространство $l_p(\mathbb{Z})$ является линейным нормированным пространством при $1 \le p \le \infty$.

Аналогично пространству периодических функций многих переменных $L_p(\mathbb{T}^d)$ определим линейное пространство $l_p(\mathbb{Z}^d)$, $p = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{R}^d$, $0 < p \le \infty$, d-кратных последовательностей $x = \{x_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$, для которых конечна величина

$$\|x\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)} = \left(\sum_{k_1} \ldots \sum_{k_{d-1}} \left(\sum_{k_d} |x_k|^{p_d}\right)^{\frac{p_{d-1}}{p_d}} \ldots\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Для скаляров $p = \infty$ и k выражение $\left(\sum\limits_k |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ понимается как $\sup\limits_k |y_k|$. Нетрудно проверить, что $\|\cdot\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)}$ при $1 \le p \le \infty$ удовлетворяет всем аксиомам нормы. Отметим только, что неравенство $\|x+y\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)} \le \|x\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)} + \|y\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)}$ получается при d-кратном применении соответствующего неравенства для однократных последовательностей.

Лемма 1.4.2. *Пусть* $0 < p \le q \le \infty$. *Тогда*

$$\|x\|_{l_q(\mathbb{Z}^d)} \le \|x\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)}.$$

Лемма 1.4.2 следует после d-кратного применения соответствующего неравенства (1.1.9) для однократных последовательностей.

Неравенство 1.4.3 (Хаусдорфа–Юнга для векторных норм). *Пусть* $x(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} x_k e^{i\langle k,t\rangle}$, $x = \{x_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$, $p \in \mathbb{R}^d$, $1 \le p \le 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Тогда*

$$\|x\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)} \ge \|x(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{T}^d)}, \tag{1.4.5}$$

$$\|x\|_{l_q(\mathbb{Z}^d)} \le \|x(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}. \tag{1.4.6}$$

Отметим, что если норма в пространстве определяется соотношением

$$\|x\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)} = \left(\sum_{k_d} \cdots \sum_{k_2} \left(\sum_{k_1} |x_k|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}} \cdots\right)^{\frac{1}{p_d}},$$

то неравенство Хаусдорфа–Юнга, как показали А. Бенедек и Р. Панцоне [1961] выполняется только при $1 < p_d \le \cdots \le p_1 \le 2$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу переменных. Для функций одной переменной неравенство 1.4.3 (Хаусдорфа–Юнга) выполняется. Предположим, что неравенство выполняется для функций числа переменных менее d, и докажем, что тогда оно выполняется и для функций d переменных.

Докажем неравенство (1.4.5). Обозначим $x_{k_1} = \{x_{k_1k'}, k' \in \mathbb{Z}^{d-1}\}$, $x_{k_1}(t') = \sum\limits_{k'} x_{k_1k'} e^{i\langle k',t'\rangle}$, где $k' = (k_2, \ldots, k_d)$, $t' = (t_2, \ldots, t_d)$. Тогда $x(t) = \sum\limits_{k_1} x_{k_1}(t') e^{ik_1t_1}$. По предположению индукции

$$\|x_{k_1}\|_{l_{p'}(\mathbb{Z}^{d-1})} \ge \|x_{k_1}(t')\|_{L_{q'}(\mathbb{T}^{d-1})},$$

где $p' = (p_2, \ldots, p_d)$, $q' = (q_2, \ldots, q_d)$. Возведем обе части последнего неравенства в степень p_1, просуммируем по всем $k_1 \in \mathbb{Z}$ и возведем сумму в степень $\frac{1}{p_1}$. Получим, что

$$\|x\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)} \geq \left(\sum_k \|x_{k_1}(t')\|^{p_1}_{L_{q'}(\mathbb{T}^{d-1})}\right)^{\frac{1}{p_1}} =$$
$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\|\sum_{k_1} x_{k_1}(t')\chi_{\Delta_{k_1}}(t_1)\right\|^{p_1}_{L_{q'}(\mathbb{T}^{d-1})} dt_1\right)^{\frac{1}{p_1}}, \quad (1.4.7)$$

где $\chi_{\Delta_{k_1}}(t_1)$ — характеристическая функция полуинтервала $\Delta_{k_1}= (k_1 - \frac{1}{2}, k_1 + \frac{1}{2}]$. Далее воспользуемся неравенством (см. [БИН, с. 23]), что при $1 \leq \mu \leq \nu \leq \infty$ для любой функции $\phi(s,\tau)$ измеримой на $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_\tau$

$$\|\phi(s,\tau)\|_{L_{\nu\mu}(\mathbb{R}_s\times\mathbb{R}_\tau)} \geq \|\phi(s,\tau)\|_{L_{\mu\nu}(\mathbb{R}_s\times\mathbb{R}_\tau)}, \quad (1.4.8)$$

которое применим $d-1$ раз. Поскольку у нас $1 \leq p_1 \leq 2 \leq q_j$, $j = 2,\ldots,d$, то по неравенству (1.4.8)

$$\left\|\sum_{k_1} x_{k_1}(t')\chi_{\Delta_{k_1}}(t_1)\right\|_{L_{q'p_1}(\mathbb{T}^{d-1}\times\mathbb{R})} \geq \left\|\sum_{k_1} x_{k_1}(t')\chi_{\Delta_{k_1}}(t_1)\right\|_{L_{p_1q'}(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^{d-1})}$$
$$= \left\|\left(\sum_{k_1} |x_{k_1}(t')|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\right\|_{L_{q'}(\mathbb{T}^{d-1})}. \quad (1.4.9)$$

По неравенству Хаусдорфа–Юнга для функций одной переменной

$$\left(\sum_{k_1} |x_{k_1}(t')|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \overset{(1.4.1)}{\geq} \|x(\cdot,t')\|_{L_{q_1}(\mathbb{T}^1)}. \quad (1.4.10)$$

Из неравенств (1.4.7),(1.4.9),(1.4.10) следует неравенство (1.4.5) для функций d переменных, а вместе с тем и для любого числа переменных.

Докажем неравенство (1.4.6). По предположению индукции

$$\|x_{k_1}\|_{l_{q'}(\mathbb{Z}^{d-1})} \leq \|x_{k_1}(t')\|_{L_{p'}(\mathbb{T}^{d-1})}.$$

Возведем обе части последнего неравенства в степень q_1, просуммируем по всем $k_1 \in \mathbb{Z}$ и возведем в степень $\frac{1}{q_1}$. Получим, что

$$\|x\|_{l_q(\mathbb{Z}^d)} \le \left(\sum_{k_1} \|x_{k_1}(t')\|^{q_1}_{L_{p'}(\mathbb{T}^{d-1})}\right)^{\frac{1}{q_1}} =$$

$$= \left\|\sum_{k_1} x_{k_1}(t')\chi_{\Delta_{k_1}}(t_1)\right\|_{L_{p'q_1}(\mathbb{T}^{d-1}\times\mathbb{R})}. \tag{1.4.11}$$

Поскольку $1 \le p_j \le 2 \le q_1$, $j = 2, \dots, d$, то по неравенству (1.4.8)

$$\left\|\sum_{k_1} x_{k_1}(t')\chi_{\Delta_{k_1}}(t_1)\right\|_{L_{p'q_1}(\mathbb{T}^{d-1}\times\mathbb{R})} \le \left\|\sum_{k_1} x_{k_1}(t')\chi_{\Delta_{k_1}}(t_1)\right\|_{L_{q_1p'}(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^{d-1})}$$

$$= \left\|\left(\sum_{k_1} |x_{k_1}(t')|^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}\right\|_{L_{p'}(\mathbb{T}^{d-1})}. \tag{1.4.12}$$

В силу неравенства (1.1.5) Хаусдорфа–Юнга для функций одной переменной

$$\left(\sum_{k_1} |x_{k_1}(t')|^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}} \le \|x(\cdot, t')\|_{L_{p_1}(\mathbb{T})}. \tag{1.4.13}$$

Из неравенств (1.4.11)–(1.4.13) следует неравенство (1.4.6) для функций d переменных, а вместе с тем и для любого числа переменных. Неравенство Хаусдорфа–Юнга для функций нескольких переменных полностью доказано. □

Теорема 1.4.3 анонсирована в работе автора [1977] и доказана в [1978b]. Отметим, что если норма в пространстве $l_p(\mathbb{Z}^d)$ определяется соотношением

$$\|x\|_{l_p(\mathbb{Z}^d)} = \left(\sum_{k_d} \dots \sum_{k_2}\left(\sum_{k_1} |x_k|^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots\right)^{\frac{1}{p_d}},$$

то неравенство Хаусдорфа–Юнга при $1 < p_d \le \ldots \le p_1 \le 2$ типа (1.4.6) доказали А. Бенедек и Р. Панцоне [1961], типа (1.4.5) доказал Б. С. Поздеев [1969]. Но в обоих случаях оно выполняется только при $1 < p_d \leq \cdots \leq p_1 \leq 2$. Таким образом, при правильной записи неравенства Хаусдорфа–Юнга для смешанных норм необходимо внутреннюю и внешнюю норму менять местами.

2 Приближение суммами Фурье и ядерные поперечники

В этой главе приближаются суммами Фурье классы периодических функций одной и нескольких переменных и их пересечения $W^{\Omega}(\mathbb{T}^1)$, $W_p^r(\mathbb{T}^d)$, $W_p^A(\mathbb{T}^d) = \bigcap\limits_{r\in A} W_p^r(\mathbb{T}^d)$, $A = \{r^i \subset \mathbb{R}^d \mid i = 1,\dots,m\}$, $W^{\Omega}(\mathbb{T}^d) = \bigcap\limits_{(\frac{1}{p},r)\in\Omega} W_p^r(\mathbb{T}^d)$, $\Omega = \big\{\big(\frac{1}{p^i}, r^i\big) \subset (0,1)^d \times \mathbb{R}^d \mid i = 1,\dots,m\big\}$, $H_p^r(\mathbb{T}^d)$, $H_p^A(\mathbb{T}^d) = \bigcap\limits_{r\in A} H_p^r(\mathbb{T}^d)$, $B_{p,\theta}^r(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q при всех $1 < p,q < \infty$. Для приближения классов периодических функций нескольких переменных берется оператор Фурье с гармониками из ступенчатого гиперболического креста. Пересечение классов функций приближается гармониками из пересечения ступенчатых гиперболических крестов.

Показывается, что построенный оператор Фурье дает оптимальное приближение среди всех операторов Фурье с заданным числом гармоник N. И более того, является оптимальным среди всех ядерных операторов с ядерной нормой не превышающей N. Отметим, что в этот класс операторов входят ортопроекторы на N-мерные подпространства. Доказывается оптимальность построенного оператора Фурье также для некоторых других классов линейных операторов.

Оценки снизу поперечников функциональных классов часто сводятся к оценке снизу соответствующих поперечников конечномерных множеств. При оценке последних удобно пользоваться введенным в этой главе понятием спектрального поперечника. В пункте 4 определяются точные значения спектральных и проекционных поперечников конечномерных множеств V_k, B_p^m, $B_p^m(r)$ в пространстве l_q^m при $1 \le p,q \le \infty$.

2.1 Предварительные сведения

В этом пункте приводятся без доказательств несколько теорем, принадлежащих В. Н. Темлякову, Динь Зунгу, Н. С. Никольской и автору. Дается формула Динь Зунга суммирования числа целых точек в логарифмически полиэдральном множестве. Приводятся два неравенства Темлякова, а так же неравенства типа неравенств Бернштейна–Никольского, доказанные Темляковым, Никольской и автором.

Сформулируем теорему о порядке числа целых точек в логарифмически полиэдральном множестве.

Теорема 2.1.1 (Динь Зунг [1983], [1984a]). *Пусть* $A = \{r^i \subset \mathbb{R}^d \mid i = 1, \ldots, m\}$, $\mathrm{co}\, A \cap \overset{\circ}{\mathbb{R}^d_+} \neq \emptyset$, $S = \{s \in \mathbb{R}^d \mid \langle s, a \rangle < 1 \ \forall\ a \in A,\ s \geq 0\}$. *Тогда*

$$\sum_{s \in \mu S} 2^{\langle s, 1 \rangle} \asymp \mu^l 2^{\mu M}, \tag{2.1.1}$$

где M *— значение, а* l *— размерность множества значений задачи:*

$$\langle s, 1 \rangle \to \sup;\ \ s \in S.$$

При приближении классов периодических функций нескольких переменных $H^r_p(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q важную роль играют два следующих неравенства.

Теорема 2.1.2 (В. Н. Темляков [1984a], [1986]). *Имеют место неравенства:*

$$\Big\| \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \delta_s x \Big\|_{L_p} \ll \Big(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \| 2^{\langle s, \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \rangle} \delta_s x \|^p_{L_q} \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq q < p < \infty, \tag{2.1.2}$$

$$\Big\| \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \delta_s x \Big\|_{L_p} \gg \Big(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \| 2^{\langle s, \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \rangle} \delta_s x \|^p_{L_q} \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < q \leq \infty, \tag{2.1.3}$$

Приведем также два неравенства типа неравенств Бернштейна–Никольского.

Теорема 2.1.3 (В. Н. Темляков [1986, с. 21]). *Пусть* $1 \leq q < \infty$, $r \in \mathbb{R}^d$, $\alpha = r + \frac{1}{q}$, $0 < \alpha_1 = \ldots = \alpha_{l+1} < \alpha_{l+2} \leq \ldots \leq \alpha_d$,

$x = \sum\limits_{\langle s,\alpha\rangle \le \mu} \delta_s x$. *Тогда*

$$\|x^{(r)}\|_{L_\infty} \ll \mu^{l-\frac{l}{q}} 2^\mu \|x\|_{L_q} \asymp \log^{l-\frac{l}{q}} N \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{\alpha_1} \|x\|_{L_q}, \qquad (2.1.4)$$

где N *— число элементов множества* $\bigcup\limits_{\langle s,\alpha\rangle \le \mu} \square_s$.

Теорема 2.1.4. *Пусть* $r, p, q \in \mathbb{R}^d$, $\alpha = r + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+$, $1 < p, q < \infty$, $0 < \alpha_{i_1} = \ldots = \alpha_{i_{l+1}} < \alpha_{i_{l+2}} \le \ldots \le \alpha_{i_d}$, $x = \sum\limits_{\langle s,\alpha\rangle \le \mu} \delta_s x$. *Тогда*

$$\|x^{(r)}\|_{L_p} \ll \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{\alpha_{i_1}} \|x\|_{L_q}, \qquad (2.1.5)$$

где N *— число элементов множества* $\bigcup\limits_{\langle s,\alpha\rangle \le \mu} \square_s$.

Последнее неравенство при $q = p$ доказано Н. С. Никольской [1973], при $q \ne p$ содержится в работе автора [1978b].

Теорема 2.1.5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $p^* = \min\{p, 2\}$, $p^{**} = \max\{p, 2\}$. *Тогда*

$$\left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d} \|\delta_s x\|_{L_p}^{p^{**}}\right)^{\frac{1}{p^{**}}} \ll \left\|\sum_{s\in\mathbb{N}^d} \delta_s x\right\|_{L_p} \ll \left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d} \|\delta_s x\|_{L_p}^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}. \quad (2.1.6)$$

Доказательство. В силу неравенства Минковского 1.1.5 имеем:

$$\left(\sum_s |a_s|^p\right)^{1/p^{**}} \le \left(\sum_s |a_s|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_s |a_s|^p\right)^{1/p^*}.$$

Отсюда

$$\left(\sum_s \|\delta_s x\|_p^{p^{**}}\right)^{1/p^{**}} \le \left(\sum_s \|\delta_s x\|_p^{p}\right)^{1/p} \le \left(\sum_s \|\delta_s x\|_p^{p^*}\right)^{1/p^*}.$$

А по теореме Литтльвуда–Пэли

$$\left(\sum_s \|\delta_s x\|_p^p\right)^{1/p} = \left(\sum_s \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |\delta_s x(t)|^p \, dt\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \sum_s |\delta_s x(t)|^p \, dt\right)^{1/p} = \left\|\sum_s |\delta_s x|\right\|_p \overset{(1.1.3)}{=} \left\|\sum_s |\delta_s x|\right\|_p \overset{(1.1.3)}{\asymp} \left\|\left(\sum_s\right.\right.$$

$$\asymp \left\|\left(\sum_s |\delta_s x|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \le \left\||S|^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)_+} \left(\sum_{s\in S} |2^{\langle s,r\rangle} \delta_s x|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\|_p = |S|^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)_+} \left(\sum_{s\in S} \|2^{\langle s,\right.$$

$$\le \left\|\sum_s |\delta_s x|\right\|_p \overset{(1.1.3)}{\asymp} \left\|\left(\sum_s |\delta_s x|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \overset{(1.1.3)}{\asymp} \left\|\sum_s \delta_s x\right\|_p \overset{(1.1.3)}{\asymp}$$

$$\asymp \left\|\left(\sum_s |\delta_s x|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \le \left\||S|^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)_+} \left(\sum_{s\in S} |2^{\langle s,r\rangle} \delta_s x|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\|_p = |S|^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)_+} \left(\sum_{s\in S} \|2^{\langle s,\right.$$

$\square$

Теорема 2.1.6. [1985a] *Пусть* $S \subset \mathbb{N}^d$, $x(\cdot) = \sum\limits_{s \in S} \delta_s x(\cdot)$, $r \in \mathbb{R}^d$, $1 < p < \infty$. *Тогда*

$$|S|^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})_-} \left(\sum_{s \in S} \left\| 2^{\langle s,r \rangle} \delta_s x \right\|_{L_p}^p \right)^{1/p} \ll \left\| x^{(r)} \right\|_{L_p} \ll$$

$$\ll |S|^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})_+} \left(\sum_{s \in S} \left\| 2^{\langle s,r \rangle} \delta_s x \right\|_{L_p}^p \right)^{1/p}. \quad (2.1.7)$$

Доказательство. В силу неравенства Минковского и 1.1.5 и неравенства для средних 1.1.6 имеем при $0 < p \le 2 \le \infty$ $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \le 0\right)$:

$$N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{s=1}^N |a_s|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{s=1}^N |a_s|^2 \right)^{1/2} \le \left(\sum_{s=1}^N |a_s|^p \right)^{1/p};$$

при $0 < 2 \le p \le \infty$ $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \ge 0\right)$:

$$\left(\sum_{s=1}^N |a_s|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{s=1}^N |a_s|^2 \right)^{1/2} \le N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{s=1}^N |a_s|^p \right)^{1/p}.$$

Объединяя эти неравенства в одно, получаем при $0 < p \le \infty$:

$$N^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})_-} \left(\sum_{s=1}^N |a_s|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{s=1}^N |a_s|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le N^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})_+} \left(\sum_{s=1}^N |a_s|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Используя теорему Литтльвуда–Пэли, отсюда при $N = |S|$, $a_s = \left\| 2^{\langle s,r \rangle} \delta_s x \right\|_p$ выводим доказываемое неравенство:

$$|S|^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})_-} \left(\sum_{s \in S} \left\| 2^{\langle s,r \rangle} \delta_s x \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| |S|^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})_-} \left(\sum_{s \in S} |2^{\langle s,r \rangle} \delta_s x|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_p \le$$

$$\le \left\| \left(\sum_{s \in S} |2^{\langle s,r \rangle} \delta_s x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \overset{(1.1.3)}{\asymp} \left\| x^{(r)} \right\|_p \overset{(1.1.3)}{\asymp} \left\| \left(\sum_{s \in S} |2^{\langle s,r \rangle} \delta_s x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \le$$

$$\le \left\| |S|^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})_+} \left(\sum_{s \in S} |2^{\langle s,r \rangle} \delta_s x|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_p = |S|^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})_+} \left(\sum_{s \in S} \left\| 2^{\langle s,r \rangle} \delta_s x \right\|_{L_p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

2.2 Приближение классов функций суммами Фурье

В этом пункте определяется порядок приближения классов периодических функций одной и нескольких переменных суммами Фурье.

Порядок приближения оператором Фурье S_N класса функций одной переменной $W^r_p(\mathbb{T}^1)$ в пространстве L_q найден В. М. Тихомировым [1976, § 3.2]

Найдем порядок приближения суммами Фурье пересечения классов функций $W^r_p(\mathbb{T}^1)$ в пространстве L_q. Напомним, что оператор Фурье S_N на функцию $x(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} x_k e^{ikt}$ действует по формуле $S_N x(t) = \sum\limits_{|k|\le N} x_k e^{ikt}$ (N — натуральное число).

Приближение класса функций W оператором S в линейном нормированном пространстве X будем оценивать величиной

$$d(W, S, X) = \sup_{x\in X} \|x - Sx\|_X.$$

Теорема 2.2.1 (о приближении пересечения соболевских классов суммами Фурье в $\mathbb{T}^1$ [1978a]). *Пусть* $W^\Omega(\mathbb{T}^1) = \bigcap\limits_{(\frac{1}{p},r)\in\Omega} W^r_p(\mathbb{T}^1)$, $\Omega = \bigl\{\bigl(\frac{1}{p^i}, r^i\bigr) \subset (0,1)\times\mathbb{R} \mid i = 1,\dots,m\bigr\}$, $\gamma(\xi) = \sup\limits_{(\xi,r)\in G} r$, $G = \operatorname{co}\Omega + \operatorname{cone}\{(-1,-1),(1,0)\}$. *Тогда*

$$d(W^\Omega(\mathbb{T}^1), S_N, L_q) \asymp N^{-\gamma(\frac{1}{q})},\ 1 < q < \infty,\ \gamma\bigl(\tfrac{1}{q}\bigr) > 0.$$

Доказательство. Обозначим $\gamma = \gamma\bigl(\frac{1}{q}\bigr)$. *Оценка сверху* следует из вложения $W^\Omega \subset\subset W^\gamma_q$ по теореме 1.3.5 и приближения класса W^γ_q в пространстве L_q оператором Фурье (см. Тихомиров [1976, с. 179]). Приведем здесь доказательство, основанное на теореме 1.1.2 Литтльвуда–Пэли, которое легко можно будет распространить и для функций нескольких переменных. Обозначим $\mu := \log_2 N$ ($2^\mu = N$). Тогда в операторе Фурье $S_\mu x = \sum\limits_{s\le\mu} \delta_s x$ содержится порядка N гармоник: $\sum\limits_{s\le\mu} \operatorname{card}\square_s = \sum\limits_{s=1}^{[\mu]} 2^s \asymp 2^\mu = N$.

Пусть $x(\cdot) \in W_q^\gamma$, тогда

$$\|x - S_\mu x\|_q = \Big\|\sum_{s>\mu} \delta_s x\Big\|_q \overset{(1.1.3)}{\asymp} \Big\|\Big(\sum_{s>\mu} |\delta_s x|^2\Big)^{1/2}\Big\|_q \asymp$$

$$\asymp \Big\|\Big(\sum_{s>\mu} \big|2^{-s\gamma}\delta_s x^{(\alpha)}\big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_q \le 2^{-\mu\gamma}\Big\|\Big(\sum_{s>\mu} \big|\delta_s x^{(\gamma)}\big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_q \le$$

$$\le 2^{-\mu\gamma}\Big\|\Big(\sum_{s\in\mathbb{N}} \big|\delta_s x^{(\gamma)}\big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_q \overset{(1.1.3)}{\asymp} 2^{-\mu\gamma}\big\|x^{(\gamma)}\big\|_q \le 2^{-\mu\gamma} \asymp N^{-\gamma}.$$

Таким образом,

$$d(W^\Omega, S_N, L_q) \ll d(W_q^\gamma, S_\mu, L_q) \asymp N^{-\gamma}.$$

Оценка снизу. Проведем через точку $\left(\frac{1}{q}, \gamma\right)$ опорную прямую к выпуклому множеству G. Пусть γ' — тангенс угла наклона этой прямой к оси абсцисс. Из построения множества G следует, что $0 \le \gamma' \le 1$. Возьмем функцию $x(t) = a(D_{N+[N^{\gamma'}]}(t) - D_N(t))$, множитель $a > 0$ выберем ниже. Поскольку точка $\left(\frac{1}{p}, r\right) \in \Omega$ лежит не выше опорной прямой, то $r - \frac{\gamma'}{p} \le \gamma - \frac{\gamma'}{q}$ и, следовательно,

$$\big\|x^{(r)}\big\|_p \overset{(1.3.10)}{\asymp} aN^{r+\gamma'(1-\frac{1}{p})} \le aN^{\gamma+\gamma'(1-\frac{1}{q})}.$$

Таким образом, $x \in W^\Omega$ при $a \asymp N^{-\gamma-\gamma'(1-\frac{1}{q})}$. С другой стороны,

$$\|x - S_N x\|_q = \|x\|_q \overset{(1.3.10)}{\asymp} aN^{\gamma'(1-\frac{1}{q})} \asymp N^{-\gamma}. \qquad \square$$

Перейдем к приближению функций нескольких переменных суммами Фурье. Для приближения классов $W_p^r(\mathbb{T}^d)$, $r \in \mathbb{R}^d$, $0 < r$, в пространстве L_p при $1 < p < \infty$, $p \in \mathbb{R}$, Н. С. Никольской [1973] введен оператор Фурье S_μ^r с гармониками из ступенчатого гиперболического креста, действующий на функцию $x(t) = \sum_{s\in\mathbb{N}^d} \delta_s x(t)$ по формуле

$$S_\mu^r x(t) = \sum_{\langle s,r\rangle \le \mu} \delta_s x(t),$$

где величина μ выбирается из уравнения $\mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N$. Тогда число гармоник в операторе S^r_μ будет порядка N.

Сформулируем и докажем теорему о приближении класса $W^r_p(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q суммами Фурье для векторных норм.

Теорема 2.2.2 ([1977]). *Пусть* $r, p, q \in \mathbb{R}^d$, $1 < p, q < \infty$, $\alpha := r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$, $0 < \alpha_{i_1} = \ldots = \alpha_{i_{l+1}} < \alpha_{i_{l+2}} \le \ldots \le \alpha_{i_d}$, $\mu^l 2^{\frac{\mu}{\alpha_{i_1}}} = N$. *Тогда*

$$d(W^r_p(\mathbb{T}^d), S^\alpha_\mu, L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\alpha_{i_1}}.$$

Доказательство. Оценка сверху следует из вложения $W^r_p \subset\subset W^\alpha_q$ по теоремам 1.3.1, 1.3.2 и приближения класса W^α_q в пространстве L_q оператором Фурье S^α_μ: (здесь мы повторяем рассуждения Н. С. Никольской [1975a], проведенные для скалярной нормы) $d(W^r_p, S^\alpha_\mu, L_q) \ll d(W^\alpha_q, S^\alpha_\mu, L_q)$, и, если $x \in W^\alpha_q$, то

$$\|x - S^\alpha_\mu x\|_q = \Big\| \sum_{\langle s,\alpha\rangle > \mu} \delta_s x \Big\|_q \overset{(1.1.3)}{\asymp} \Big\| \Big(\sum_{\langle s,\alpha\rangle > \mu} |\delta_s x|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_q \asymp$$

$$\asymp \Big\| \Big(\sum_{\langle s,\alpha\rangle > \mu} 2^{-2\langle s,\alpha\rangle} \big|\delta_s x^{(\alpha)}\big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_q \le 2^{-\mu} \Big\| \Big(\sum_{\langle s,\alpha\rangle > \mu} \big|\delta_s x^{(\alpha)}\big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_q \le$$

$$\le 2^{-\mu} \Big\| \Big(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \big|\delta_s x^{(\alpha)}\big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_q \overset{(1.1.3)}{\asymp} 2^{-\mu} \big\|x^{(\alpha)}\big\|_q \le 2^{-\mu} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\alpha_{i_1}}.$$

Оценка снизу. Возьмем функцию $x(t) = a \prod_{j=1}^{d} x_j(t_j)$, где $x_j(t_j) = \begin{cases} e^{i\hat{k}_j t_j}, & p_j \ge q_j, \\ \sum_{k_j \in \square_{s_j}} e^{ik_j t_j}, & p_j < q_j, \end{cases}$ $\hat{k} = (\hat{k}_1, \ldots, \hat{k}_d)$ — произвольная гармоника из $\square_s$, вектор $s = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ такой, что $\mu < \langle s, \alpha\rangle \le \mu + \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$. Тогда

$$\|x^{(r)}\|_p \overset{(1.3.10)}{\asymp} a \prod_{j\,:\,p_j \ge q_j} 2^{s_j r_j} \prod_{j\,:\,p_j < q_j} 2^{s_j(r_j + 1 - \frac{1}{p_j})}.$$

Значит, $x \in CW^r_p$ при $a = \prod\limits_{j\,:\,p_j \geq q_j} 2^{-s_j r_j} \prod\limits_{j\,:\,p_j < q_j} 2^{-s_j(r_j+1-\frac{1}{p_j})}$, а с другой стороны,

$$\|x - S^\alpha_\mu x\|_q = \|x\|_q \overset{(1.3.10)}{\asymp} a \prod_{j\,:\,p_j<q_j} 2^{s_j(1-\frac{1}{q_j})} \asymp$$

$$\asymp \prod_{j\,:\,p_j \geq q_j} 2^{-s_j r_j} \times \prod_{j\,:\,p_j<q_j} 2^{-s_j(r_j - \frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j})} =$$

$$= 2^{-\langle s, r - (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+\rangle} = 2^{-\langle s,\alpha\rangle} \asymp 2^{-\mu} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\alpha_{i_1}}. \qquad \square$$

Для приближения пересечения классов $W^\Omega(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q будут использованы гармоники из пересечения ступенчатых гиперболических крестов соответствующих сумм Фурье.

Для множества $A \subset \mathbb{R}^d$ введем оператор Фурье S^A_μ, действующий на функцию $x = \sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \delta_s x$ по формуле: $S^A_\mu x = \sum\limits_{s\in\mathcal{S}^A_\mu} \delta_s x$, где $\mathcal{S}^A_\mu := \bigcap\limits_{r\in A} \mathcal{S}^r_\mu$, $\mathcal{S}^r_\mu := \{s \in \mathbb{N}^d \mid \langle s, r\rangle \leq \mu\}$.

Теорема 2.2.3 (о приближении пересечения соболевских классов суммами Фурье по пересечению ступенчатых гиперболических крестов в одинаковых метриках)**.** *Пусть* $W^A_p(\mathbb{T}^d) = \bigcap\limits_{r\in A} W^r_p(\mathbb{T}^d)$, $A = \{r^i \subset \mathbb{R}^d \mid i = 1,\dots,m\}$, $p \in \mathbb{R}^d$, $1 < p < \infty$. *Тогда, если* $\max\limits_{i,j} r^i_j > 0$, *то*

$$d(W^A_p(\mathbb{T}^d), S^A_\mu, L_p) \asymp 2^{-\mu},$$

и если $\operatorname{co} A \cap \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^d_+ \neq \emptyset$, *то число гармоник в операторе Фурье* $S_N := S^A_\mu$ *имеет порядок* N *при* $\mu^l 2^{\mu M} = N$ *и*

$$d(W^A_p(\mathbb{T}^d), S_N, L_p) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{1}{M}},$$

где M *— значение, а* l *— размерность множества значений задачи:* $\langle s, 1\rangle \to \sup$; $\langle s, r\rangle \leq 1\ \forall\ r \in A$.

Доказательство. Оценка сверху. Условие $\max\limits_{i,j} r^i_j > 0$ эквивалентно тому, что не все гармоники входят в оператор Фурье, т. е. $\mathcal{S}^A_\mu \neq \mathbb{N}^d$. Поскольку $\mathbb{N}^d \setminus \mathcal{S}^A_\mu = \mathbb{N}^d \setminus \bigcap\limits_{r\in A} \mathcal{S}^r_\mu = \bigcup\limits_{r\in A}(\mathbb{N}^d \setminus \mathcal{S}^r_\mu)$, то для $x \in W^A_p$

$$\|x - S^A_\mu x\|_p = \Big\| \sum_{\mathbb{N}^d\setminus\mathcal{S}^A_\mu} \delta_s x\Big\|_p = \Big\| \sum_{\bigcup\limits_{r\in A}(\mathbb{N}^d\setminus\mathcal{S}^r_\mu)} \delta_s x\Big\|_p \asymp$$

$$\asymp \Big\|\Big(\sum_{\bigcup\limits_{r\in A}(\mathbb{N}^d\setminus\mathcal{S}^r_\mu)} |\delta_s x|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \leq \Big\|\Big(\sum_{r\in A}\sum_{\mathbb{N}^d\setminus\mathcal{S}^r_\mu} |\delta_s x|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \overset{(1.1.9)}{\leq}$$

$$\leq \Big\|\sum_{r\in A}\Big(\sum_{\mathbb{N}^d\setminus\mathcal{S}^r_\mu} |\delta_s x|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \leq \sum_{r\in A}\Big\|\Big(\sum_{\mathbb{N}^d\setminus\mathcal{S}^r_\mu} |\delta_s x|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p \overset{(1.1.3)}{\asymp}$$

$$\asymp \sum_{r\in A}\Big\|\sum_{\mathbb{N}^d\setminus\mathcal{S}^r_\mu} \delta_s x\Big\|_p = \sum_{r\in A} \|x - S^r_\mu x\|_p \ll 2^{-\mu}.$$

Условие конечности числа гармоник в операторе Фурье, порядок их числа выводятся из теоремы 2.1.1. При этом $2^{-\mu} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{1}{M}}$.

Оценка снизу. Возьмем функцию $x(t) = 2^{-\mu} e^{i\langle k,t\rangle}$, где k — произвольная гармоника из $\square_s$, $s \in (\mathcal{S}^A_{\mu+C} \setminus \mathcal{S}^A_\mu) \cap \mathbb{N}^d$. Константа выбирается так, чтобы множество $(\mathcal{S}^A_{\mu+C} \setminus \mathcal{S}^A_\mu) \cap \mathbb{N}^d \neq \emptyset$, при этом не зависит от μ. Тогда $\|x^{(r)}\|_p \asymp 2^{-\mu+\langle s,r\rangle} \leq 1$ при $r \in A$, т. е. $x \in C'W^A_p$, а с другой стороны,

$$\|x - S^A_\mu x\|_q = \|x\|_q = 2^{-\mu} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{1}{M}}. \qquad \square$$

Теорема 2.2.4 (о приближении пересечения соболевских классов суммами Фурье по пересечению ступенчатых гиперболических крестов в разных метриках)**.** *Пусть* $W^\Omega(\mathbb{T}^d) = \bigcap\limits_{(\frac{1}{p},r)\in\Omega} W^r_p(\mathbb{T}^d)$, $\Omega = \left\{\left(\frac{1}{p^i}, r^i\right) \subset (0,1)^d \times \mathbb{R}^d \mid i = 1,\dots,m\right\}$, $G = \{\operatorname{co}\Omega + (\nu,0) - (\lambda,\lambda) \mid \lambda,\nu \in \mathbb{R}^d_+\}$, $\gamma, q \in \mathbb{R}^d$, $1 < q < \infty$, $G_q = \left\{\gamma \in \mathbb{R}^d \mid \left(\frac{1}{q},\gamma\right) \in\right.$

$G\}$. Тогда множество крайних точек $\Gamma = \{\gamma^1, \dots \gamma^\nu\}$ множества G_q конечно, и если $\max\limits_{i,j} \gamma_j^i > 0$, то

$$d(W^\Omega(\mathbb{T}^d), S_\mu^\Gamma, L_q) \asymp 2^{-\mu},$$

а если $\operatorname{co}\Gamma \cap \overset{\circ}{\mathbb{R}_+^d} \neq \emptyset$, то число гармоник в операторе Фурье $S_N := S_\mu^\Gamma$ при $\mu^l 2^{\mu M} = N$ имеет порядок N и

$$d(W^\Omega(\mathbb{T}^d), S_N, L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{1}{M}},$$

где M — значение, а l — размерность множества значений задачи: $\langle s, 1\rangle \to \sup$; $\forall\ s \in S := \{s \in \mathbb{R}_+^d \mid \langle s, r\rangle \le 1\ \forall\ r \in \Gamma\}$.

Доказательство. Оценка сверху. Так как множество G полиэдрально, то его сечение G_q также является полиэдральным множеством и, следовательно (см. Р. Т. Рокафеллар [1973, с. 188]), имеет конечное число крайних точек. По теореме 1.3.5 о вложениях $W^\Omega \subset\subset W_q^\Gamma$ оценка сверху следует из теоремы 2.2.3 о приближении класса W_q^Γ в согласованной метрике L_q.

Оценка снизу. Очевидно, что $\mathcal{S}_\mu^\Gamma = \mu S$ (мы рассматриваем только точки из $\mathbb{N}^d$). Выберем константу $C > 0$, не зависящую от μ, такую, что $(\mu + C)S \setminus \mu S \neq \emptyset$. Фиксируем произвольную точку $s \in (\mu + C)S \setminus \mu S$.

Предположим, что $\max\limits_{r \in G_q} \langle s, r\rangle = \langle \gamma, s\rangle$ достигается на некотором векторе $\gamma \in G_q$. Это означает, что функционал $s \in \mathbb{R}^d$ разделяет точку γ и выпуклое замкнутое множество G_q, при этом $\gamma \in \partial G$ и $\langle \gamma, s\rangle \le \mu$. Достроим функционал s до функционала $(b, s) \in \mathbb{R}^{2d}$, разделяющего точку $\left(\frac{1}{q}, \gamma\right)$ и выпуклое замкнутое множество G. Описание такого построения см. Рокафеллар [1973, с. 112]. Имеем

$$\left\langle (b, s), \left(\tfrac{1}{p}, r\right)\right\rangle \le \left\langle (b, s), \left(\tfrac{1}{q}, \gamma\right)\right\rangle \quad \forall\ \left(\tfrac{1}{p}, r\right) \in G. \tag{2.2.1}$$

Так как направления $(e_j, 0)$, $(-e_j, -e_j)$, $j = 1, \dots, d$, ($e_1, \dots, e_d$ — канонический базис в $\mathbb{R}^d$), являются рецессивными для множества G, то $b + s \ge 0$, $b \le 0$ ($b = b(s)$).

Обозначим $K = \{k \in \mathbb{Z}^d \mid k_j = 2^{s_j-1}, \dots, 2^{s_j-1} + 2^{-b_j} - 1,$ $j = 1, \dots, d\}$. Возьмем функцию $x(t) = a \sum\limits_{k \in K} e^{i\langle k,t\rangle}$. Тогда при $\left(\frac{1}{p}, r\right) \in \Omega$

$$\|x^{(r)}\|_p \overset{(1.3.10)}{\asymp} a2^{\langle s,r\rangle + \langle -b, 1-\frac{1}{p}\rangle} \overset{(2.2.1)}{\leq} a2^{\langle s,\gamma\rangle + \langle -b, 1-\frac{1}{q}\rangle}.$$

Значит, $x \in W^\Omega$ при $a \asymp 2^{-\langle s,\gamma\rangle + \langle b, 1-\frac{1}{q}\rangle}$. С другой стороны,

$$\|x - S_N x\|_q \overset{(1.1.3)}{\asymp} a2^{\langle -b, 1-\frac{1}{q}\rangle} \asymp 2^{-\langle s,\gamma\rangle} \geq 2^{-\mu}. \qquad \square$$

Первая часть теорем 2.2.3, 2.2.4 доказана в работе автора [1978a], вторая получается при применении теоремы Динь Зунга 2.1.1 о числе целых точек в логарифмически полиэдральном множестве.

Перейдем к приближению классов периодических функций $H^r_p(\mathbb{T}^d)$, $0 < r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \leq \ldots \leq r_d$, суммами Фурье. Приближение осуществляется оператором Фурье $S^{r'}_\mu$, $r'_i = r_i$, $i = 1, \dots, l+1$, $r_1 < r'_i < r_i$, $i = l+2, \dots, d$, гармониками из некоторого расширенного ступенчатого гиперболического креста, впервые рассмотренного С. А. Теляковским [1964] и использованным Я. С. Бугровым [1964] для приближения H^r_2 в L_2.

Теорема 2.2.5 (о приближении классов Гельдера–Никольского суммами Фурье по расширенному ступенчатому гиперболическому кресту в разных метриках)**.** *Пусть* $1 < p, q < \infty$, $r, r' \in \mathbb{R}^d$, $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+ < r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \leq \ldots \leq r_d$, $r'_i = r_i$, $i = 1, \dots, l+1;$ $r_1 < r'_i < r_i$, $i = l+2, \dots, d$, $\mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N$. *Тогда число гармоник в операторе Фурье* $S_N := S^{r'}_\mu$ *имеет порядок* N *и*

$$d(H^r_p(\mathbb{T}^d), S_N, L_q) \asymp \begin{cases} \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{\frac{l}{2}} N, & p \geq q,\ p \geq 2; \text{(a)} \\ \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{\frac{l}{p}} N, & 2 \geq p \geq q; \quad \text{(b)} \\ \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{l}{p} + \frac{l}{q}} \log^{\frac{l}{q}} N, & p < q. \quad \text{(c)} \end{cases}$$

Доказательство. Оценки сверху. a)–b). Так как $p \geq q$, то

$$\|x - S_\mu^{r'} x\|_q = \Big\| \sum_{\langle s,r'\rangle>\mu} \delta_s x \Big\|_q \overset{(1.3.1)}{\leq} \Big\| \sum_{\langle s,r'\rangle>\mu} \delta_s x \Big\|_p \overset{(2.1.6)}{\ll}$$

$$\ll \Big(\sum_{\langle s,r'\rangle>\mu} \|\delta_s x\|_p^{p^*} \Big)^{\frac{1}{p^*}},$$

где $p^* := \min\{p, 2\}$. Отсюда

$$d(H_p^r, S_N, L_q) = \sup_{x\in H_p^r} \|x - S_\mu^{r'} x\|_q \ll \sup_{x\in H_p^r} \Big(\sum_{\langle s,r'\rangle>\mu} \|\delta_s x\|_p^{p^*} \Big)^{\frac{1}{p^*}} \ll$$

$$\overset{(1.1.1)}{\ll} \Big(\sum_{\langle s,r'\rangle>\mu} 2^{-\langle s,r\rangle p^*} \Big)^{\frac{1}{p^*}} \overset{(\mathbf{??})}{\asymp} \Big(\mu^l 2^{-\mu p^*} \Big)^{\frac{1}{p^*}} \asymp \Big(\frac{\log^l N}{N} \Big)^{r_1} \log^{\frac{l}{p^*}} N$$

$\Big($поскольку $1 = \frac{r_1}{r_1'} = \ldots = \frac{r_{l+1}}{r_{l+1}'} < \frac{r_j}{r_j'}$, $j = l+2, \ldots, d\Big)$.

c) В случае $p < q$ аналогично получаем

$$d(H_p^r, S_N, L_q) = \sup_{x\in H_p^r} \Big\| \sum_{\langle s,r'\rangle>\mu} \delta_s x \Big\|_q \overset{(2.1.2)}{\ll}$$

$$\ll \sup_{x\in H_p^r} \Big(\sum_{\langle s,r'\rangle>\mu} \|2^{\langle s, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\rangle} \delta_s x\|_p^q \Big)^{\frac{1}{q}} \overset{(1.1.1)}{\ll} \Big(\sum_{\langle s,r'\rangle>\mu} 2^{-\langle s, r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\rangle q} \Big)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\overset{(\mathbf{??})}{\asymp} \Big(\mu^l 2^{-\frac{(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})\mu q}{r_1}} \Big)^{\frac{1}{q}} \asymp \Big(\frac{\log^l N}{N} \Big)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \log^{\frac{l}{q}} N$$

$\Big($поскольку в силу условия гладкости $r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 0$ и выполняется соотношение $\frac{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{r_1'} = \ldots = \frac{r_{l+1} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{r_{l+1}'} = 1 - \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}{r_{l+1}'} < \frac{r_j}{r_j'} - \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}{r_j'} = \frac{r_j - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{r_j'}$, $j = l+2, \ldots, d\Big)$.

Оценки снизу. a) Пусть $p \geq q$, $p \geq 2$. Возьмем функцию $x(t) = a \sum\limits_{s\in S} e^{i\langle 2^s, t\rangle}$, где $S := \{s = (s_1, \ldots, s_{l+1}, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d \mid \langle s, r'\rangle =$

$[\mu]+1\}$. Тогда $x \in H_p^r$ при $a \asymp 2^{-\mu}$. С другой стороны,

$$\|x - S_\mu^{r'} x\|_q = \|x\|_q \overset{(1.1.3)}{\asymp} 2^{-\mu} \left(\sum_{s \in S} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{-\mu} \mu^{\frac{l}{2}} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{r_1} \log^{\frac{l}{2}} N.$$

b) Пусть $2 > p > q$. Для простоты записи будем считать, что вектор $r = (r, \ldots, r)$ имеет равные координаты, т. е. $l = d - 1$. Положим $S = \left\{ s \in \mathbb{N}^d \mid \langle s, 1 \rangle = \left[\frac{\mu}{r}\right] + 1,\ s_j \geq \frac{\mu}{2dr},\ j = 1, \ldots, d \right\}$. Выберем величину μ из уравнения $\mu^l 2^{\frac{\mu}{r}} = N$. Тогда $|S| \asymp \mu^l$.

Разобьем куб $[-\pi, \pi]^d$ на $(2m+1)^d$ равных кубов I_ξ с ребром длины $\dfrac{2\pi}{2m+1}$, где $m^d \asymp |S|$, $(2m+1)^d \geq |S| \asymp \mu^l$, $m \in \mathbb{N}$, и центром куба I_ξ в точке t_ξ, $(t_\xi)_j = \xi_j \dfrac{2\pi}{2m+1}$, $\xi_j = 0, \pm 1, \ldots, \pm m$, $j = 1, \ldots, d$. Сопоставим каждому вектору $s \in S$ куб $I_{\xi(s)}$ с центром в точке $t_{\xi(s)}$ так, чтобы $\xi(s) \neq \xi(s')$ при $s \neq s'$. Такое сопоставление возможно, поскольку $|S| \leq (2m+1)^d$. Сопоставление может быть проведено различным образом, нам годится любое.

Возьмем функцию $x(t) = a \sum\limits_{s \in S} x_s(t + t_{\xi(s)})$, где $x_s(t) = \sum\limits_{k \in K_s} e^{i\langle k, t \rangle}$, $K_s = \{k \in \square_s \mid 2^{s_j - 1} < k_j \leq 2^{s_j - 1} + m,\ j = 1, \ldots, d\}$, $s \in S$. Поскольку $\delta_s x(t) = a x_s(t + t_{\xi(s)})$, то

$$\|x\|_{H_p^r} \overset{(1.1.3)}{\asymp} a \sup_{s \in S} \|2^{\langle s, r \rangle} x_s\|_p \overset{(1.3.10)}{\asymp} a 2^\mu m^{d(1 - \frac{1}{p})} \asymp a 2^\mu |S|^{1 - \frac{1}{p}}.$$

Значит $x \in H_p^r$ при $a \asymp 2^{-\mu} |S|^{\frac{1}{p} - 1}$. С другой стороны,

$$\|x - S_\mu^{r'} x\|_q = \|x\|_q \overset{(1.1.3)}{\asymp} a \left(\int_{\mathbb{T}^d} \left(\sum_{s \in S} |x_s(t + t_{\xi(s)})|^2 \right)^{\frac{q}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq a \left(\sum_{s \in S} \int_{t + t_{\xi(s)} \in I_0} |x_s(t + t_{\xi(s)})|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} = a \left(|S| \int_{I_0} |x_s(t)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

В силу неравенства

$$\frac{2\alpha}{\pi} \leq \sin \alpha \leq \alpha \text{ при } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

имеем: $|x_s(t)| = \Big|\sum\limits_{k=1}^{m} e^{ikt}\Big| = \left|\dfrac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right| \geq \dfrac{2m}{\pi}$ для скаляров t и k при $t \in I_0$, то $\int_{I_0} |x_s(t)|^q\,dt \asymp m^{q-1}$ и, следовательно,

$$\|x - S_\mu^{r'} x\|_q \gg a|S|^{\frac{1}{q}} m^{d(1-\frac{1}{q})} = 2^{-\mu}|S|^{\frac{1}{p}} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^r \log^{\frac{l}{p}} N.$$

c) Пусть $p < q$. Возьмем функцию $x(t) = \sum\limits_{\langle s,r'\rangle>\mu} 2^{\langle s,-r+\frac{1}{p}-1\rangle}\delta_s(t)$, где $\delta_s(t) = \sum\limits_{k\in\square_s} e^{i\langle k,t\rangle}$. По лемме 1.3.1 $x \in CH_p^r$ с некоторой константой $C > 0$. Выберем произвольное число $z > q$. Тогда

$$\|x - S_N x\|_q = \|x\|_q \overset{(2.1.3)}{\gg} \left(\sum_{\langle s,r'\rangle>\mu} 2^{\langle s,\frac{1}{z}-\frac{1}{q}\rangle q}\|\delta_s x\|_z^q\right)^{\frac{1}{q}} \overset{(1.3.10)}{\asymp}$$

$$\asymp \left(\sum_{\langle s,r'\rangle>\mu} 2^{\langle s,\frac{1}{z}-\frac{1}{q}-r+\frac{1}{p}-1+1-\frac{1}{z}\rangle q}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{\langle s,r'\rangle>\mu} 2^{\langle s,-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\rangle q}\right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$\Big($поскольку в силу условия гладкости $r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 0$ и выполняется соотношение $\frac{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{r_1'} = \ldots = \frac{r_{l+1}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{r_{l+1}'} = 1 - \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{r_{l+1}'} < \frac{r_j}{r_j'} - \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{r_j'} = \frac{r_j-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{r_j'}$, $j = l+2,\ldots,d\Big)$

$$\overset{(??)}{\asymp} \left(\mu^l 2^{-\frac{(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})q\mu}{r_1}}\right)^{\frac{1}{q}} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \log^{\frac{l}{q}} N. \quad \square$$

Теорема 2.2.5 при $p = q$ доказана Н. С. Никольской [1973], [1975a]; при $p < q$ и при $q < p < 2$ В. Н. Темляковым [1980a], [1982], [1986]; при $2 < q < p$ Динь Зунгом [1983], [1984]; при $q < 2 < p$ автором [1984a]–[1984d], [1985a]. Функция $\sum\limits_{s\in S} x_s(t)$ была построена Темляковым.

Перейдем к приближению классов $H_p^A(\mathbb{T}^d)$ суммами Фурье в пространстве L_q.

Теорема 2.2.6. *Пусть* $H_p^A(\mathbb{T}^d) = \bigcap\limits_{r\in A} H_p^r(\mathbb{T}^d)$, $A = \{r^i \subset \mathbb{R}^d \mid i = 1,\ldots,m\}$, $1 < p,q < \infty$, $S = \{s \in \mathbb{R}_+^d \mid \langle s, r\rangle \le 1\ \forall\ r \in A\}$, $\mu^l 2^{\mu M} = N$, $\frac{1}{M} > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$, $p^* := \min\{p, 2\}$. *Тогда существует полиэдральное множество* $S' \supset S$ *такое, что число гармоник в операторе Фурье* S_N*, действующего на функцию* $x = \sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \delta_s x$ *по формуле* $S_N x = \sum\limits_{s\in\mu S'} \delta_s x$ *имеет порядок* N*, и*

$$d(H_p^A(\mathbb{T}^d), S_N, L_q) \asymp \begin{cases} \log^{\frac{l}{p*}} N \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{1}{M}}, & q \le p, \\ \log^{\frac{1}{q}} N \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{1}{M}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}, & p < q, \end{cases}$$

где M *— значение, а* l *— размерность множества значений задачи:* $\langle s, 1\rangle \to \sup$; $\forall\ s \in S$.

Доказательство. Построение множества S' расширения множества S описано в работе Динь Зунга [1984a] при приближении класса H_p^A суммами Фурье в пространстве L_p.

Обозначая $s(A) = \max\limits_{r\in A} \langle s, r\rangle$, получим, что

$$x \in H_p^A \iff \|\delta_s x\|_p \ll 2^{-s(A)} \quad \forall\ s \in \mathbb{N}^d.$$

Оценка сверху. A) Пусть $p < q$. Тогда при $\frac{1}{M} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$

$$d(H_p^A, S_N, L_q) = \sup_{x\in H_p^A} \|x - S_N x\|_q =$$

$$= \sup_{x\in H_p^A} \left\| \sum_{s\notin\mu S'} \delta_s x \right\|_q \overset{(2.1.2)}{\ll} \sup_{x\in H_p^A} \left(\sum_{s\notin\mu S'} 2^{\langle s, \frac{1}{p}-\frac{1}{q}\rangle q} \|\delta_s x\|_p^q \right)^{1/q} \le$$

$$\le \left(\sum_{s\notin\mu S'} 2^{\langle s, \frac{1}{p}-\frac{1}{q}\rangle q - s(A) q} \right)^{1/q} \overset{(??)}{\asymp} \left(\mu^l 2^{\mu q(M(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1)}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \mu^{\frac{l}{q}} 2^{-\mu M(\frac{1}{M}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \asymp \log^{\frac{l}{q}} N \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{1}{M}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}.$$

Б) Пусть $q \le p$. Тогда

$$d(H_p^A, S_N, L_q) = \sup_{x \in H_p^A} \|x - S_N x\|_q \le$$

$$\overset{(1.3.1)}{\le} \sup_{x \in H_p^A} \|x - S_N x\|_p \overset{(2.1.6)}{\ll} \sup_{x \in H_p^A} \left(\sum_{s \notin \mu S'} \|\delta_s x\|_p^{p^*} \right)^{1/p^*} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s \notin \mu S'} 2^{-p^* s(A)} \right)^{1/p^*} \overset{(??)}{\asymp} \mu^{\frac{l}{p^*}} 2^{-\mu} \asymp \log^{\frac{l}{p^*}} N \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{1/M}.$$

Оценка снизу. А) Пусть $p < q$. Возьмем функцию $x(t) = \sum\limits_{s \notin \mu S'} \delta_s(t) \times 2^{\langle s, \frac{1}{p} - 1 \rangle - s(A)}$, где $\delta_s(t) = \sum\limits_{k \in \square_s} e^{i\langle k,t \rangle}$. Тогда по лемме 1.3.1 $x \in C H_p^A$ с некоторой константой $C > 0$. Выберем произвольное число $z > q$. Тогда

$$\|x - S_N x\|_q = \|x\|_q \overset{(2.1.3)}{\gg} \left(\sum_{s \notin \mu S'} 2^{\langle s, \frac{1}{z} - \frac{1}{q} \rangle q} \|\delta_s x\|_z^q \right)^{1/q} \overset{(1.3.10)}{\asymp}$$

$$\asymp \left(\sum_{s \notin \mu S'} 2^{\langle s, \frac{1}{z} - \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1 + 1 - \frac{1}{z} \rangle q - q s(A)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{s \notin \mu S'} 2^{\langle s, \frac{1}{p} - \frac{1}{g} \rangle q - q s(A)} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp$$

$$\overset{(??)}{\asymp} \mu^{\frac{l}{q}} 2^{\mu M (\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - \mu} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{\frac{1}{M} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \log^{\frac{l}{q}} N.$$

Б) Пусть $p \ge q$, $p \ge 2$. Для оценки снизу возьмем функцию $x(t) = a \sum\limits_{s \in S''} e^{i\langle k_s, t \rangle}$, где $S'' = \{ s \in \mathbb{N}^d \mid \langle s, 1 \rangle > \mu M,\ \langle s, r \rangle \le \mu + C \ \forall\ r \in A \}$, константа $C > 0$ такова, что $|S''| \asymp \mu^l$, k_s — произвольная гармоника из $\square_s$. Тогда $x \in H_p^A$ при $a \asymp 2^{-\mu}$ и

$$\|x - S_N x\|_q = \|x\|_q \overset{(1.1.3)}{\asymp} 2^{-\mu} \left(\sum_{s \in S''} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{-\mu} \mu^{\frac{l}{2}} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{\frac{1}{M}} \log^{\frac{l}{2}} N.$$

В) Пусть $q \le p \le 2$. В этом случае оценка снизу доказывается как и в теореме 2.2.5 с использованием техники обобщения на класс H_p^A. $\square$

Теорема 2.2.6 при $p \le q \le 2$ и при $2 \le q \le p$ доказана Динь Зунгом [1983], [1984]; при $p < q$, $q > 2$ и при $q < 2 < p$ автором [1984b]–[1984d], [1985a]. В дальнейших работах Динь Зунга теорема 2.2.6 была обобщена для более широких классов.

Условия на линейные операторы, при которых приближение не улучшается по сравнению с операторами Фурье опубликованы в работе автора [1988d].

В заключение п. 2 приведем формулировку теоремы о приближении суммами Фурье классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций нескольких переменных в пространстве L_q при всех $1 < p, q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$.

Теорема 2.2.7 (о приближении классов Бесова суммами Фурье)**.** *Пусть* $1 < p, q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r, r' \in \mathbb{R}^d$, $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) < r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \le \ldots \le r_d$, $p^* := \min\{p, 2\}$, $r'_i = r_i$, $i = 1, \ldots, l+1$; $r_1 < r'_i < r_i$, $i = l+2, \ldots, d$. *Тогда число гармоник в операторе Фурье* $S_N := S^{r'}_\mu$ *имеет порядок* N *при* $\mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N$ *и*

$$d(B^r_{p,\theta}(\mathbb{T}^d), S_N, L_q) \asymp \begin{cases} (\log N)^{l(\frac{1}{p^*} - \frac{1}{\theta})_+} \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1}, & q \le p, \\ (\log N)^{l(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})_+} \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}, & q > p. \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы использует методы оценок приближения классов H^r_p в пространстве L_q и некоторые элементарные неравенства типа неравенств (1.1.9)–(1.1.10). Ряд случаев разобран в статье Динь Зунга [1984b]. Случай $q \le p \le 2$ следует из работы автора [1990b].

2.3 Ядерные поперечники функциональных классов

В этом пункте определяются ядерные поперечники классов периодических функций одной и нескольких переменных $W^\Omega(\mathbb{T}^1)$, $W^\Omega(\mathbb{T}^d)$, $H^A_p(\mathbb{T}^d)$, $B^r_{p,\theta}(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q при всех $1 < p, q < \infty$.

Известно (см. работы Б. С. Кашина [1977], В. Е. Майорова [1978]), что при $q > \max\{p, 2\}$ оператор Фурье S_N не дает наилучшего приближения классов $W_p^r(\mathbb{T}^1)$ в пространстве L_q среди всех операторов линейного приближения подпространством размерности N.

Поэтому естественно поставить задачу о нахождении как можно более широкого множества операторов, содержащих операторы Фурье, такого, что наилучшим (в смысле порядка приближения) среди этого множества операторов будет оператор Фурье. Первые результаты в этом направлении получены В. Н. Темляковым [1982], [1985a], [1985b].

Он доказал, что оператор Фурье при приближении классов периодических функций нескольких переменных W_p^r и H_p^r в пространстве L_q при $p \leq q$ дает наилучшее приближение среди всех операторов ортогонального проектирования ($d(W, S_N, L_q) \asymp d_N^{\perp}(W, L_q)$), а также среди более широкого класса операторов, чем ортопроекторы, например, среди линейных операторов ранга N ограниченных из L_2 в L_2.

Отметим также работы Н. С. Никольской [1978], [1980], в которых определяется порядок приближения классов $H_p^r(\mathbb{T}^d)$ и $W_p^r(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_p оператором Фурье с фиксированным числом гармоник.

Приведем некоторые другие условия на линейные операторы, при которых оператор Фурье дает оптимальное по порядку приближение, не привлекая при этом дополнительное пространство L_2 и понятие ортогональности, имеющее смысл только в гильбертовом пространстве.

Ядерным N-поперечником множества W в банаховом пространстве X назовем величину

$$\mathcal{N}_N(W, X) = \inf_{P \in \mathcal{P}(N,X)} \sup_{x \in W} \|x - Px\|_X,$$

где $\mathcal{P}(N, X)$ — множество ядерных операторов, у которых ядерная норма $N(P) \leq N$ $(N > 0)$.

Понятия ядерного и спектрального поперечников введено впервые автором на Международной конференции по Конструктивной теории функций в Варне в 1987 году (см. [1987c] — Сборник трудов этой конференции). Содержание пункта 2.3 в том числе теоремы 2.3.1–2.3.3 опубликованы в работах автора [1987c], [1990a].

Напомним (см. А. Пич [1982, с. 98]), что $P\colon X \to X$ — линейный непрерывный оператор называется *ядерным*, если он представим в виде

$$Px = \sum_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l, x\rangle f_l, \quad f_l \in X,\ \lambda_l \in X^*, \tag{2.3.1}$$

где X^* — сопряженное к X пространство и $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \|\lambda_l\|_{X^*}\|f_l\|_X < \infty$.

По определению ядерная норма $N(P) := \inf \sum\limits_{l=1}^{\infty} \|\lambda_l\|_{X^*}\|f_l\|_X$ (нижняя грань берется по всевозможным представлениям оператора в виде (2.3.1), т. е. ядерным представлениям).

Если P — линейный непрерывный оператор на подпространство размерности N, то существует (см. А. Пич [1982, с. 17–18]) конечное представление $Px = \sum\limits_{l=1}^{N} \langle \lambda_l, x\rangle f_l$, где $\lambda_l \in X^*$, $f_l \in X$, $\|\lambda_l\|_{X^*} \le \|P\|$, $\|f_l\|_X = 1$. Поскольку $N(P) \le \sum\limits_{l=1}^{N} \|\lambda_l\|_{X^*}\|f_l\|_X = \sum\limits_{l=1}^{N} \|\lambda_l\|_{X^*} \le N\|P\|$, то $P \in \mathcal{P}(\|P\|N, X)$.

Если P — ортопроектор на пространство размерности N в пространстве $L_2(\mathbb{T}^d)$, то $\|P\|_2 = 1$ и, следовательно, $P \in \mathcal{P}(N, L_2)$. Ядерная норма оператора Фурье S_N в пространстве $L_q(\mathbb{T}^d)$, отображающего на подпространство размерности N по формуле $S_N x(\cdot) = x(K, \cdot)$, $K \subset \mathbb{Z}^d$, $|K| = N$, не превышает N, поэтому $S_N \in \mathcal{P}(N, L_q)$. Ядерная норма операторов Фурье в пространстве L_q, отображающих на подпространство размерности N, также не превышает N.

Для функции $x(t) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^d} x_k e^{i\langle k,t\rangle}$ и множества $K \subset \mathbb{Z}^d$ обозначим $x(K, t) = \sum\limits_{k \in K} x_k e^{i\langle k,t\rangle}$.

Для оценки снизу ядерных поперечников нам понадобится

Лемма 2.3.1. *Пусть* $P \in \mathcal{P}(N, L_q(\mathbb{T}^d))$, $1 < q < \infty$, $S \subset \mathbb{N}^d$, δ_s *— параллелепипед в* $\mathbb{R}^d$ *с ребрами параллельными координатным осям,* $\triangle_s = \delta_s \cap \square_s$, $s \in \mathbb{N}^d$, $K = \bigcup\limits_{s \in S} \triangle_s$. *Тогда существует константа* C_q *(не зависящая от множества* K*) такая, что имеется ядерное представление (2.3.1) оператора и* $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), f_l(K, \cdot) \rangle \le C_q N$, *если при этом* $|K| \ge 2C_q N$, *то*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), f_l(K, \cdot) \rangle \le \frac{|K|}{2}. \tag{2.3.2}$$

Доказательство. Если $P \in \mathcal{P}(N, L_q)$, то это означает, что существует ядерное представление (2.3.1), для которого $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \|\lambda_l\|_{q'} \|f_l\|_q \le 2N$. После применения теоремы Марцинкевича с множителями $\mu_k = 1$, $k \in K$, $\mu_k = 0$, $k \notin K$, к этому представлению получим нужные неравенства

$$\sum_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), f_l(K, \cdot) \rangle \le \sum_{l=1}^{\infty} \|\lambda_l(\cdot)\|_{q'} \|f_l(K, \cdot)\|_q \le C_q' \sum_{l=1}^{\infty} \|\lambda_l\|_{q'} \|f_l\|_q \le C_q N.$$

Откуда при $|K| \ge 2C_q N$ следует неравенство (2.3.2). $\square$

Теорема 2.3.1 (о ядерных поперечниках пересечения классов Соболева в $\mathbb{T}^1$). *Пусть* $W^{\Omega}(\mathbb{T}^1) = \bigcap\limits_{(\frac{1}{p}, r) \in \Omega} W_p^r(\mathbb{T}^1)$, $\Omega = \left\{ \left(\frac{1}{p^i}, r^i \right) \subset (0, 1) \times \mathbb{R} \mid i = 1, \dots, m \right\}$, $G = \operatorname{co} \Omega + \operatorname{cone}\{(-1, -1), (1, 0)\}$, $\gamma(\xi) = \sup\limits_{(\xi, r) \in G} r$. *Тогда*

$$\mathcal{N}_N(W^{\Omega}(\mathbb{T}^1), L_q) \asymp N^{-\gamma(\frac{1}{q})}, \ 1 < q < \infty, \ \gamma\left(\tfrac{1}{q}\right) > 0.$$

Доказательство. Оценка сверху. Поскольку оператор Фурье S_N, отображающий на пространство $Q = \operatorname{lin}\{e^{ikt}, \ |k| \le N\}$, принадлежит множеству $\mathcal{P}(2N, L_q)$, то оценка сверху следует из приближения класса W^{Ω} оператором Фурье по теореме 2.2.1

$$\mathcal{N}_N(W^{\Omega}, L_q) \ll d(W^{\Omega}, S_N, L_q) \asymp N^{-\gamma(\frac{1}{q})}.$$

Оценка снизу. Обозначим $\gamma = \gamma\big(\frac{1}{q}\big)$. Проведем через точку $\big(\frac{1}{q}, \gamma\big)$, лежащую на границе выпуклого замкнутого множества G, опорную к G прямую. Пусть γ' — тангенс угла наклона этой прямой к оси абцисс. Из построения множества G следует, что $0 \le \gamma' \le 1$.

Возьмем произвольный оператор $P \in \mathcal{P}(N, L_q)$. Положим $\mathcal{K} = \{N+1, \ldots, N+N'\}$, $|\mathcal{K}| = N' \ge 2C_qN$, $N' \asymp N$, N' кратно $[N^{\gamma'}]$ (C_q — константа из леммы 2.3.1). Тогда по лемме 2.3.1 имеется ядерное представление оператора $Px(t) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot)\rangle f_l(t)$, для которого

$$\sum_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), f_l(\mathcal{K}, \cdot)\rangle \le \frac{|\mathcal{K}|}{2}. \tag{2.3.3}$$

Из неравенства (2.3.3) следует, что существует множество $K \subset \mathcal{K}$, подряд идущих гармоник, $|K| = [N^{\gamma'}]$, такое, что для K также выполняется неравенство (2.3.3).

Возьмем функцию $x(t) = a \sum\limits_{k \in K} e^{ikt}$. Поскольку точка $\big(\frac{1}{p}, r\big) \in \Omega$ лежит не выше опорной прямой, то $r - \frac{\gamma'}{p} \le \gamma - \frac{\gamma'}{q}$ и, следовательно,

$$\|x^{(r)}\|_p \overset{(1.3.10)}{\asymp} aN^{r+\gamma'(1-\frac{1}{p})} \le aN^{\gamma+\gamma'(1-\frac{1}{q})}.$$

Значит $x \in W^{\Omega}$ при $a \asymp N^{-\gamma-\gamma'(1-\frac{1}{q})}$. Покажем, что существует точка $\tau \in [-\pi, \pi]$ такая, что $\|x(\cdot - \tau) - Px(\cdot - \tau)\|_q \gg N^{-\gamma}$, и тем самым оценка снизу будет доказана.

Используя теорему Марцинкевича и неравенство С.М. Никольского, получим

$$\|x(t-\tau) - Px(t-\tau)\|_{q,t} = \Big\|x(t-\tau) - \sum_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot - \tau)\rangle f_l(t)\Big\|_{q,t} \gg$$

$$\overset{(1.1.2)}{\gg} \Big\|x(t-\tau) - \sum_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot - \tau)\rangle f_l(K, t)\Big\|_{q,t} \gg$$

$$\gg N^{-\frac{\gamma'}{q}} \Big\|x(t-\tau) - \sum_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot - \tau)\rangle f_l(K, t)\Big\|_{\infty,t} \ge$$

$$\geq N^{-\frac{\gamma'}{q}}\left(a|K| - \sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot), x(\cdot-\tau)\rangle f_l(K,\tau)\right)$$

(при последнем переходе положили $t=\tau$ и отбросили знак модуля). Поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot), x(\cdot-\tau)\rangle f_l(K,\tau)\right)d\tau = a\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot), f_l(K,\cdot)\rangle \overset{(2.3.3)}{\leq} a\frac{|K|}{2},$$

то существует точка $\tau \in [-\pi,\, \pi]$, для которой

$$\|x(t-\tau) - Px(t-\tau)\|_q \gg$$
$$\gg N^{-\frac{\gamma'}{q}} a|K| \asymp N^{-\frac{\gamma'}{q}} N^{-\gamma-\gamma'(1-\frac{1}{q})} N^{\gamma'} \asymp N^{-\gamma}. \qquad \square$$

Излагаемый в п. 2.3 метод сдвига функции, перехода к метрике пространства L_∞ и последующего усреднения использован впервые Темляковым [1985b] для оценки снизу ортопроекционного поперечника $d_N^{\perp}(W_p^r, L_q)$ при $p<q$.

Теорема 2.3.2 (о ядерных поперечниках пересечения классов Соболева в $\mathbb{T}^d$)**.** *Пусть* $W^{\Omega}(\mathbb{T}^d) = \bigcap\limits_{(\frac{1}{p},r)\in\Omega} W_p^r(\mathbb{T}^d)$, $\Omega = \left\{\left(\frac{1}{p^i}, r^i\right) \subset (0,\,1)^d \times \mathbb{R}^d \mid i=1,\ldots,m\right\}$, $G = \left\{\operatorname{conv}\Omega + (\nu,0) - (\lambda,\lambda) \mid \lambda,\nu \in \mathbb{R}_+^d\right\}$, $q \in \mathbb{R}^d$, $1<q<\infty$, $G_q = \left\{\gamma \in \mathbb{R}^d \mid \left(\frac{1}{q},\gamma\right) \in G\right\}$, $G_q \cap \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}_+^d \neq \emptyset$. *Тогда*

$$\mathcal{N}_N(W^{\Omega}(\mathbb{T}^d), L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{1}{M}},$$

где M — значение, а l — размерность множества значений задачи:

$$\langle s, 1\rangle \to \sup; \quad \langle s,\gamma\rangle \leq 1 \ \forall\ \gamma \in G_q,\ s \geq 0.$$

Доказательство. Оценка сверху следует из приближения класса W^{Ω} оператором Фурье $S_N = S_\mu^{\Gamma}$ по теореме 2.2.4, так как $S_N \in \mathcal{P}(CN, L_q)$.

Оценка снизу. Возьмем произвольный оператор $P \in \mathcal{P}(N, L_q)$. Положим $S = \{\, s \in \mathbb{N}^d \mid \langle s, r\rangle \leq \mu \ \forall\ r \in G_q\}$, $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{s\in S} \square_s$.

Выберем величину μ так, чтобы $|\mathcal{K}| = \sum\limits_{s\in S} |\Box_s| = \sum\limits_{s\in S} 2^{\langle s,1\rangle} \geq C'\mu^l 2^{\mu M} \geq 2C_q N$ (C_q — константа из леммы 2.3.1) и $N \asymp \mu^l 2^{\mu M}$. Тогда по лемме 2.3.1 имеется ядерное представление оператора $Px(t) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot)\rangle f_l(t)$, для которого

$$\sum_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), f_l(\mathcal{K}, \cdot)\rangle \leq \frac{|\mathcal{K}|}{2}. \tag{2.3.4}$$

Из этого неравенства следует, что существует множество $K_1 = \Box_s$, $s \in S$, такое, что для K_1 также выполняется неравенство (2.3.4).

Предположим, что $\max\limits_{r\in G_q} \langle s, r\rangle = \langle \gamma, s\rangle$ достигается на некотором векторе $\gamma \in G_q$. Это означает, что функционал $s \in \mathbb{R}^d$ разделяет точку γ и выпуклое замкнутое множество G_q при этом $\gamma \in \partial G$ и $\langle \gamma, s\rangle \leq \mu$. Достроим функционал s до функционала $(b, s) \in \mathbb{R}^{2d}$, разделяющего точку $\left(\frac{1}{q}, \gamma\right)$ и выпуклое замкнутое множество G. Описание такого построения см. Р. Рокафеллар [1973, с. 112]. Имеем

$$\left\langle (b, s), \left(\tfrac{1}{p}, r\right)\right\rangle \leq \left\langle (b, s), \left(\tfrac{1}{q}, \gamma\right)\right\rangle \quad \forall \left(\tfrac{1}{p}, r\right) \in G. \tag{2.3.5}$$

Так как направления $(e_j, 0)$, $(-e_j, -e_j)$, $j = 1, \dots, d$ ($e_1, \dots, e_d$ — канонический базис в $\mathbb{R}^d$), являются рецессивными для множества G, то $b + s \geq 0$, $b \leq 0$ ($b = b(s)$).

Поскольку для K_1 выполняется неравенство (2.3.4), то существует множество $K \subset K_1$ (для определенности пусть $K \subset \mathbb{N}^d$),

$$K = \left\{k \in \mathbb{N}^d \mid 2^{s_j - 1} + \hat{k}_j \leq k_j < 2^{s_j-1} + \hat{k}_j + 2^{-b_j - 1},\ j = 1, \dots, d\right\} \subset \Box_s$$

при некотором $\hat{k} \in \mathbb{Z}^d$, $0 \leq \hat{k}_j \leq 2^{s_j-1} - 2^{-b_j-1}$, $j = 1, \dots, d$, такое, что для K также выполняется неравенство (2.3.4). (Отметим, что неравенство (2.3.4) будет выполняться для множества K с коэффициентом $\frac{1}{2}$, если $|K_1|$ кратно $|K|$, если $|K_1|$ не кратно $|K|$, то коэффициент при $|K|$ в неравенстве (2.3.4) можно взять больше, например, $\frac{2}{3}$.)

Возьмем функцию $x(t)=a\sum\limits_{k\in K}e^{i\langle k,t\rangle}$. Тогда для точек $\left(\frac{1}{p},r\right)\in\Omega$

$$\|x^{(r)}\|_p \overset{(1.3.10)}{\asymp} a2^{\langle s,r\rangle-\langle b,1-\frac{1}{p}\rangle} \overset{(2.3.5)}{\leq} a2^{\langle s,\gamma\rangle-\langle b,1-\frac{1}{q}\rangle} \leq a2^{\mu-\langle b,1-\frac{1}{q}\rangle}.$$

Значит $x\in W^\Omega$ при $a\asymp 2^{-\mu+\langle b,1-\frac{1}{q}\rangle}$. С другой стороны, как и при доказательстве теоремы 2.3.2, получим, что существует точка $\tau\in\mathbb{T}^d$, для которой

$$\|x(t-\tau)-Px(t-\tau)\|_{q,t} = \left\|x(t-\tau)-\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot),x(\cdot-\tau)\rangle f_l(t)\right\|_{q,t} \gg$$

$$\overset{(1.1.2)}{\gg} \left\|x(t-\tau)-\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot),x(\cdot-\tau)\rangle f_l(K,t)\right\|_{q,t} \gg$$

$$\gg 2^{\langle b,\frac{1}{q}\rangle}\left\|x(t-\tau)-\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot),x(\cdot-\tau)\rangle f_l(K,t)\right\|_{\infty,t} \geq$$

$$\geq 2^{\langle b,\frac{1}{q}\rangle}\left(a|K|-\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot),x(\cdot-\tau)\rangle f_l(K,\tau)\right) \gg$$

$$\gg 2^{\langle b,\frac{1}{q}\rangle}a|K| \asymp 2^{-\mu+\langle b,1-\frac{1}{q}\rangle+\langle b,\frac{1}{q}\rangle-\langle b,1\rangle} = 2^{-\mu} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{1}{M}}.$$

(при последнем переходе положили $t=\tau$ и отбросили знак модуля). Поскольку

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot),x(\cdot-\tau)\rangle f_l(K,\tau)\right)d\tau = a\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot),f_l(K,\cdot)\rangle \overset{(2.3.3)}{\leq} a\frac{|K|}{2},$$

то существует точка $\tau\in\mathbb{T}^d$, для которой

$$\|x(t-\tau)-Px(t-\tau)\|_q \gg 2^{\langle b,\frac{1}{q}\rangle}a|K| \asymp$$

$$\asymp 2^{-\mu+\langle b,1-\frac{1}{q}\rangle+\langle b,\frac{1}{q}\rangle-\langle b,1\rangle} = 2^{-\mu} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{1}{M}}. \qquad \square$$

Теорема 2.3.3 (о ядерных поперечниках классов Гельдера–Никольского). *Пусть* $1 < p, q < \infty$, $r \in \mathbb{R}^d$, $p^* := \min\{p, 2\}$, $\big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\big)_+ < r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \le \ldots \le r_d$. *Тогда*

$$\mathcal{N}_N(H_p^r(\mathbb{T}^d), L_q) \asymp \begin{cases} \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{\frac{l}{p*}} N, & p \ge q, \\ \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \log^{\frac{1}{q}} N, & p < q. \end{cases}$$

Доказательство. Оценка сверху следует из приближения классов $H_p^r(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q оператором Фурье $S_\mu^{r'}$ с числом гармоник порядка N из расширенного ступенчатого гиперболического креста по теореме 2.2.5.

Оценка снизу. Пусть $P \in \mathcal{P}(N, L_q)$ — произвольный оператор. Положим $S = \big\{s \in \mathbb{N}^d \mid \langle s, 1\rangle = \big[\frac{\mu}{r}\big],\ s_j \ge \frac{\mu}{2dr},\ j = 1, \ldots, d\big\}$, $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{s \in S} \square_s$. (Для простоты записи будем считать, что вектор $r = (r, \ldots, r)$ имеет равные координаты, т. е. $l = d - 1$. В случае не равных координат надо просто полагать $s_j = 1$, $j = l + 2, \ldots, d$.) Выберем величину μ так, чтобы $|\mathcal{K}| = \sum\limits_{s \in S} |\square_s| = \sum\limits_{s \in S} 2^{\langle s, 1\rangle} \ge C' \mu^l 2^{\frac{\mu}{r}} \ge 2 C_q N$ и $\mu^l 2^{\frac{\mu}{r}} \asymp N$, ($C_q$ — константа из леммы 2.3.1). Тогда по лемме 2.3.1 имеется ядерное представление оператора $Px(t) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot)\rangle f_l(t)$, для которого

$$\sum_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), f_l(\mathcal{K}, \cdot)\rangle \le \frac{|\mathcal{K}|}{2}. \tag{2.3.6}$$

А) Проведем оценку, исключая случай $2 > p > q$. Из неравенства (2.3.6) следует, что существует множество $K_1 = \bigcup\limits_{s \in S} k_s$, где $k_s \in \square_s$, такое, что для K_1 также выполняется неравенство (2.3.6).

Возьмем функцию $x(t) = \begin{cases} a\sum\limits_{k\in K_1} e^{i\langle k,t\rangle}, & p\ge q, \\ b\sum\limits_{s\in S}\delta_s(t), & p\le q. \end{cases}$ Тогда

$$\|x\|_{H_p^r} \overset{(1.1.3)}{\asymp} \begin{cases} a\sup\limits_{s\in S} 2^{\langle s,r\rangle}\|e^{i\langle k_s,\cdot\rangle}\|_p, & p\ge q, \\ b\sup\limits_{s\in S}\|2^{\langle s,r\rangle}\delta_s\|_p, & p\le q, \end{cases} \overset{(1.3.10)}{\asymp}$$

$$\asymp \begin{cases} a\sup\limits_{s\in S} 2^{\langle s,r\rangle}, & p\ge q, \\ b\sup\limits_{s\in S} 2^{\langle s,r+1-\frac{1}{p}\rangle}, & p\le q, \end{cases} \asymp \begin{cases} a2^{\mu}, & p\ge q, \\ b2^{\frac{\mu}{r}(r+1-\frac{1}{p})}, & p\le q, \end{cases} = 1$$

при $a = 2^{-\mu}$, $b = 2^{-\frac{\mu}{r}(r+1-\frac{1}{p})}$. Значит, $x\in CH_p^r$ при этих a и b с некоторой константой $C>0$.

По неравенству 1.1.4 (Гельдера) для функции $z(t) = \sum\limits_{k\in K_1} z_k e^{i\langle k,t\rangle} = (z*D)(t)$, где $D(t) = \sum\limits_{k\in K_1} e^{i\langle k,t\rangle}$, имеем при $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$

$$\|z\|_\infty = \|z*D\|_\infty \overset{(1.1.4)}{\le} \|z\|_q\|D\|_{q'} \overset{(1.1.3)}{\asymp} |S|^{\frac{1}{2}}\|z\|_q. \tag{2.3.7}$$

Далее имеем как и в теореме 2.3.2 для множества $K = \begin{cases} K_1, & p\ge q, \\ \mathcal{K}, & p<q, \end{cases}$

$$\|x(t-\tau)-Px(t-\tau)\|_{q,t} \overset{(1.1.3)}{\gg} \left\|x(t-\tau)-\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot),x(\cdot-\tau)\rangle f_l(K,t)\right\|_{q,t} \overset{(2.3.7)}{\gg}$$

$$\gg \left\|x(t-\tau)-\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot),x(\cdot-\tau)\rangle f_l(K,t)\right\|_{\infty,t} \times \begin{cases} |S|^{-\frac{1}{2}}, & p\ge q, \\ 2^{-\frac{\mu}{qr}}\mu^{\frac{l}{q}-l}, & p<q, \end{cases} \ge$$

$$\ge \left(a|K|-\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot),x(\cdot-\tau)\rangle f_l(K,\tau)\right) \times \begin{cases} |S|^{-\frac{1}{2}}, & p\ge q, \\ 2^{-\frac{\mu}{qr}}\mu^{\frac{l}{q}-l}, & p<q, \end{cases}$$

(при последнем переходе положили $t=\tau$ и отбросили знак модуля). Поскольку

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot),x(\cdot-\tau)\rangle f_l(K,\tau)\right)d\tau = a\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda(\cdot),f_l(K,\cdot)\rangle \overset{(2.3.6)}{\le} a\frac{|K|}{2},$$

то существует точка $\tau\in\mathbb{T}^d$, для которой

$$\|x(t-\tau)-Px(t-\tau)\|_q \gg \begin{cases}|S|^{-\frac{1}{2}}a|K_1|, & p\ge q,\\ 2^{-\frac{\mu}{qr}}\mu^{\frac{l}{q}-l}b|\mathcal{K}|, & p<q,\end{cases}\asymp$$

$$\asymp\begin{cases}|S|^{-\frac{1}{2}}2^{-\mu}|S|, & p\ge q,\\ 2^{-\frac{\mu}{qr}}\mu^{\frac{l}{q}-l}2^{-\frac{\mu}{r}(r+1-\frac{1}{p})}\mu^l 2^{\frac{\mu}{r}}, & p<q,\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}|S|^{\frac{1}{2}}2^{-\mu}, & p\ge q,\\ \mu^{\frac{l}{q}}2^{-\frac{\mu}{r}(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}, & p<q,\end{cases}\asymp\begin{cases}\left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1}\log^{\frac{l}{2}}N, & p\ge q,\\ \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\log^{\frac{l}{q}}N, & p<q.\end{cases}$$

Б) Пусть $2>p>q$. Как и при оценке снизу в теореме 2.2.5 разобьем куб $[-\pi,\pi]^d$ на $(2m+1)^d$ равных кубов I_ξ с ребром длины $\frac{2\pi}{2m+1}$, где $m^d\asymp|S|$, $(2m+1)^d\ge|S|\asymp\mu^l$, $m\in\mathbb{N}$, и центром куба I_ξ в точке t_ξ, $(t_\xi)_j=\xi_j\frac{2\pi}{2m+1}$, $\xi_j=0,\pm1,\dots,\pm m$, $j=1,\dots,d$. Множество таких векторов ξ обозначим Ξ. Сопоставим каждому вектору $s\in S$ куб $I_{\xi(s)}$ с центром $t_{\xi(s)}$ так, чтобы $\xi(s)\ne\xi(s')$ при $s\ne s'$. Такое сопоставление возможно, поскольку $|S|\le(2m+1)^d$; сопоставление может быть проведено различным образом, нам годится любое.

Из неравенства (2.3.6) следует, что существует множество $K=\bigcup\limits_{s\in S}\Delta_s$, $\Delta_s=k_s+\Delta\subset\square_s$, для определенности пусть $\Delta\subset\mathbb{N}^d$, $\Delta=\{k\in\mathbb{N}^d\mid k_j=1,\dots,m,\ j=1,\dots,d\}$, $k_s\in\overset{\circ}{\mathbb{Z}^d}$, $s\in S$, такое, что для K также выполняется неравенство (2.3.6).

Возьмем функцию $x(t)=a\sum\limits_{s\in S}x_s(t-t_{\xi(s)})$, $x_s(t)=e^{i\langle k_s,t\rangle}\sum\limits_{k\in\Delta}e^{i\langle k,t\rangle}=e^{i\langle k_s,t\rangle}D_m(t)$, $D_m(t)=\sum\limits_{k\in\Delta}e^{i\langle k,t\rangle}$. Функция x построена таким образом, чтобы при использовании аналога неравенства С. М. Никольского, с одной стороны, норма функции $\sum\limits_{s\in S}x_s(t)$ в пространстве L_∞ была бы большой, а с другой стороны, норма функции $\sum\limits_{s\in S}x_s(t+t_{\xi(s)})$ в пространстве $L_{q'}$ $\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q}'=1\right)$ была бы достаточна мала. Это будет показано в лемме 2.3.2.

Поскольку $\delta_s x(t)=ax_s(t-t_{\xi(s)})$, то

$$\|x\|_{H_p^r}\asymp\sup_{s\in S}\|2^{\langle s,r\rangle}\delta_s x\|_p\asymp a2^\mu m^{d(1-\frac{1}{p})}\asymp a2^\mu|S|^{1-\frac{1}{p}}.$$

Значит $x\in H_p^r$ при $a\asymp 2^{-\mu}|S|^{\frac{1}{p}-1}$. Далее нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 2.3.2. *Пусть* $D(t)=\sum\limits_{s\in S}x_s(t+t_{\xi(s)})$, $1<q<\infty$. *Тогда*

$$\|D\|_q\asymp|S|.$$

Доказательство. Оценка сверху. По теореме 1.1.3 (Литтльвуда–Пэли)

$$\|D\|_q\asymp\left\|\left(\sum_{s\in S}|x_s(\cdot+t_{\xi(s)})|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_q=\left\|\left(\sum_{s\in S}|D_m(\cdot+t_{\xi(s)})|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_q. \tag{2.3.8}$$

Оценим величину $A:=A(t):=\sum\limits_{s\in S}|D_m(t+t_{\xi(s)})|^2$ сверху. Имеем

$$A\le\sum_{\xi\in\Xi}|D_m(t+t_{\xi(s)})|^2\le\sum_{\xi\in\Xi}\max_{t\in I_\xi}|D_m(t)|^2.$$

В силу неравенства (для одномерных величин t,ξ)

$$|D_m(t)|=\left|\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right|\ll\begin{cases}m, & t\in I_0,\\ |t|^{-1}, & t\notin I_0,\end{cases}$$

получим, что
$$|D_m(t)| \ll \frac{m}{|\xi|+1} \quad \forall\, t \in I_\xi.$$
И, следовательно,
$$A \ll \sum_{\xi\in\Xi}\prod_{j=1}^{d}\frac{m^2}{(|\xi_j|+1)^2} \ll m^{2d}\sum_{\xi\in\overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d}\frac{1}{\xi^2} \ll m^{2d} \asymp |S|^2.$$
Подставляя оценку для A в неравенство (2.3.8), легко выводим искомую оценку сверху в лемме: $\|D\|_q \ll |S|$.

Оценка снизу. По теореме 1.1.3 (Литтльвуда–Пэли)
$$\|D\|_q^q \asymp \int_{\mathbb{T}^d}\biggl(\sum_{s\in S}|x_s(t+t_{\xi(s)})|^2\biggr)^{\frac{q}{2}} dt \ge \sum_{s\in S}\int_{t+t_{\xi(s)}\in I_0}|x_s(t+t_{\xi(s)})|^q\, dt =$$
$$= |S|\int\limits_{I_0}|x_s(t)|^q\, dt = |S|\prod_{j=1}^{d}\int\limits_{-\pi/(2m+1)}^{\pi/(2m+1)}\left|\frac{\sin\frac{mt_j}{2}}{\sin\frac{t_j}{2}}\right|^q dt_j \asymp |S|m^{d(q-1)} \asymp |S|^q.$$
Извлекая корень q-ой степени из обеих частей последнего неравенства, получаем нужную оценку снизу. Лемма 2.3.2 доказана. $\square$

Лемма 2.3.3. *Пусть* $z_s(t) = \sum\limits_{k\in\Delta_s} z_k e^{i\langle k,t\rangle}$, $s\in S$, $1<q<\infty$. *Тогда*
$$\Bigl\|\sum_{s\in S} z_s\Bigr\|_q \gg |S|^{-1}\Bigl\|\sum_{s\in S} z_s(\cdot + t_{\xi(s)})\Bigr\|_\infty.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что $\sum\limits_{s\in S} z_s(t+t_{\xi(s)}) = \sum\limits_{s\in S} z_s(t) * D(t)$, где $D(t) = \sum\limits_{s\in S} x_s(t+t_{\xi(s)})$. По неравенству Юнга (см. [БИН, с. 25]) и лемме 2.3.2
$$\Bigl\|\sum_{s\in S} z_s(\cdot + t_{\xi(s)})\Bigr\|_\infty \le \Bigl\|\sum_{s\in S} z_s\Bigr\|_q \|D\|_{q'} \asymp \Bigl\|\sum_{s\in S} z_s\Bigr\|_q |S|,$$
$\frac{1}{q}+\frac{1}{q}' = 1$. Отсюда сразу вытекает утверждение леммы 2.3.3. $\square$

По теореме Марцинкевича

$$\|x(t-\tau)-Px(t-\tau)\|_{q,t} \overset{(1.1.2)}{\gg} \left\|x(t-\tau)-\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot),x(\cdot-\tau)\rangle f_l(K,t)\right\|_{q,t} =$$

$$= \left\|\sum_{s\in S} x(\Delta_s,t-\tau) - \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s\in S}\langle\lambda_l(\cdot),x(\cdot-\tau)\rangle f_l(\Delta_s,t)\right\|_{q,t}.$$

Далее по лемме 2.3.3

$$\|x(t-\tau)-Px(t-\tau)\|_{q,t} \gg$$

$$\gg |S|^{-1}\left\|\sum_{s\in S} x(\Delta_s,t-\tau+t_{\xi(s)}) - \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s\in S}\langle\lambda_l(\cdot),x(\cdot-\tau)\rangle f_l(\Delta_s,t+t_{\xi(s)})\right\|_{\infty,t} \geq$$

$$\geq |S|^{-1}\left(a|K| - \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s\in S}\langle\lambda_l(\cdot),x(\cdot-\tau)\rangle f_l(\Delta_s,\tau+t_{\xi(s)})\right)$$

(при последнем переходе положили $t=\tau$ и отбросили знак модуля). Поскольку

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s\in S}\langle\lambda_l(\cdot),x(\cdot-\tau)\rangle f_l(\Delta_s,\tau+t_{\xi(s)})\right)d\tau =$$

$$= a\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s\in S}\sum_{s'\in S}\lambda_l(\Delta_{s'},\tau+t_{\xi(s')})f_l(\Delta_s,\tau+t_{\xi(s)})\right)d\tau =$$

$$= a\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda(K,\cdot),f_l(K,\cdot)\rangle \overset{(2.3.6)}{\leq} a\frac{|K|}{2},$$

то существует точка $\tau\in\mathbb{T}^d$, для которой

$$\|x(t-\tau)-Px(t-\tau)\|_q \gg a\frac{|K|}{|S|} \asymp a|S| \asymp |S|^{\frac{1}{p}}2^{-\mu} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^r \log^{\frac{l}{p}} N.$$

Получили оценку снизу в случае $2>p>q$. Теорема 2.3.3 доказана. $\square$

Приведем формулировку теоремы о порядке ядерных поперечников классов Бесова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{T}^d)$ периодических функций нескольких переменных в пространстве L_q при всех $1 < p, q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$.

Теорема 2.3.4 (о ядерных поперечниках классов Бесова)**.** *Пусть* $1 < p, q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r \in \mathbb{R}^d$, $p^* := \min\{p, 2\}$, $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+ < r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \le \ldots \le r_d$. *Тогда*

$$\mathcal{N}_N(B^r_{p,\theta}(\mathbb{T}^d), L_q) \asymp \begin{cases} (\log^l N)^{(\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta})_+}\left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1}, & q \le p, \\ (\log^l N)^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}\left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}, & p < q. \end{cases}$$

Доказательство оценки сверху следует из приближения этого класса оператором Фурье по теореме 2.2.7, поскольку $S_N \in \mathcal{P}(N, L_q)$. Оценка снизу доказывается методами доказательств оценки снизу $\mathcal{N}_N(H^r_p, L_q)$ с использованием ряда неравенств типа неравенств (1.1.9)–(1.1.10).

Данная теорема может быть обобщена на случай классов $B^A_{p,\theta}(\mathbb{T}^d)$.

Приведем ряд условий на линейные операторы, при которых приближение не улучшается по сравнению с операторами Фурье.

Пусть P — линейный оператор в пространстве L_2, представимый в виде $Px(t) = \sum\limits_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot), x(\cdot)\rangle f_l(t)$, где $f_l(t) = \sum\limits_{k\in\overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d} f_{lk}e^{i\langle k,t\rangle}$, $l \in \mathbb{N}$, — ортонормированная система, $\lambda_l(t) = \sum\limits_{k\in\overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d}\lambda_{lk}e^{i\langle k,t\rangle} \in L_2$. Тогда $Pe^{i\langle k,t\rangle} = \sum\limits_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot), e^{i\langle k,\cdot\rangle}\rangle f_l(t) = \sum\limits_{l=1}^{\infty}\lambda_{lk}f_l(t) = \sum\limits_{l=1}^{\infty}\lambda_{lk}\sum\limits_{n\in\overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d} f_{ln}e^{i\langle n,t\rangle} = \sum\limits_{n\in\overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d} p_{kn}e^{i\langle n,t\rangle}$, где $p_{kn} = \langle\lambda'_k, f'_n\rangle$, $\lambda'_k = \{\lambda_{lk},\ l \in \mathbb{N}\}$, $f'_n = \{f_{ln},\ l \in \mathbb{N}\}$. Значит, $\|Pe^{i\langle k,\cdot\rangle}\|_2 = \|\lambda'_k\|_{l_2} =: |\lambda'_k|$.

Обозначим $\pi(C, N)$ ($C < 1$, $N \in \mathbb{R}$) — множество таких операторов, для которых

$$\sum_{k\in K} p_{kk} \le C|K| \quad \forall\ K \subset \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d,\ |K| \ge N. \tag{2.3.9}$$

Если S_N — оператор Фурье на пространство размерности N, действующий по формуле $S_N x(\cdot) = x(K,\cdot)$, $K \subset \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d$, $|K| = N$, то $S_N \in \pi(C, N/C)$. Поскольку для доказательства оценок снизу в теоремах 2.3.1–2.3.3, 2.3.4 вместо леммы 2.3.1 можно использовать условие (2.3.9), то порядок приближения рассматриваемых классов операторами из $\pi(C,N)$ не улучшается.

Приведем ряд условий более общих, чем условие ограниченности линейных операторов ранга N из L_2 в L_2, при которых $P \in \pi(C,N)$.

Лемма 2.3.4. *Пусть $P = P(N)$ — линейный оператор в пространстве $L_2(\mathbb{T}^d)$, представимый в виде $Px(t) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot)\rangle f_l(t)$ и удовлетворяющий условию*

$$\left(\sum_{k\in\overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d} |\lambda'_k|^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \le C_1 N^{\frac{1}{\theta}} \quad (C_1>0,\ 1\le\theta\le\infty), \tag{2.3.10}$$

при $\theta = \infty$ $Px(t) = \sum\limits_{l=1}^{N} \langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot)\rangle f_l(t)$. Тогда существует константа $C_2 > 0$ такая, что $P \in \pi(C, C_2 N)$.

Доказательство. Возьмем произвольное множество $K \subset \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d$. В силу неравенств Коши и Гельдера $\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1\right)$

$$\sum_{k\in K} p_{kk} = \sum_{k\in K} \langle \lambda'_k, f'_k\rangle \le \sum_{k\in K} |\lambda'_k|\,|f'_k| \le \|\{\lambda'_k\}\|_{l_\theta(K)} \|\{f'_k\}\|_{l_{\theta'}(K)}. \tag{2.3.11}$$

Поскольку $|f'_k| \le 1$, то при $1 \le \theta < \infty$ и $|K| \ge C_2 N$

$$\sum_{k\in K} p_{kk} \le C_1 N^{\frac{1}{\theta}} |K|^{\frac{1}{\theta'}} \le C_1 C_2^{-\frac{1}{\theta}} |K|,$$

и, значит, $P \in \pi(C, C_2 N)$ при $C_2 = (C_1/C)^\theta$.

Если $\theta = \infty$, то по неравенству 1.1.6 (для средних) из (2.3.11) имеем

$$\sum_{k\in K} p_{kk} \le C_1 |K|^{1/2} \|\{f'_k\}\|_{l_2(K)} \le C_1 |K|^{1/2} N^{1/2} \le C_1 |K| C_2^{-1/2},$$

и, значит, $P \in \pi(C, C_2 N)$ при $C_2 = (C_1/C)^2$. □

Условие В. Н. Темлякова ограниченности линейных операторов ранга N из L_2 в L_2 является частным случаем условия (2.3.10) при $\theta = \infty$.

2.4 Спектральные и проекционные поперечники конечномерных множеств

В этом пункте вводится понятие спектрального поперечника. Определяются точные значения спектральных и проекционных поперечников конечномерных множеств V_k, B_p^m, $B_p^m(r)$ в пространстве l_q^m при $1 \le p, q \le \infty$. Содержание пункта 2. 4 имеется в работах автора [1987c], [1988a], [1988c].

Понятие проекционного поперечника введено В. М. Тихомировым [1976]. Напомним определение. *Проекционным N-поперечником* множества W в линейном нормированном пространстве X называется величина

$$\pi_N(W, X) = \inf_P \sup_{x \in W} \|x - Px\|_X, \tag{2.4.1}$$

где инфимум берется по всем проекторам $P\colon X \to L_N$, отображающим X на линейное подпространство $L_N \subset X$, $\dim L_N = N$.

Если в определении (2.4.1) положить $X = L_q$, а инфимум брать по ортопроекторам ранга N, то получим определение В. Н. Темлякова [1982] ортопроекционного поперечника $d_N^\perp(W, L_q)$ (см. также п. 2.3).

При отыскании ортопроекционных поперечников функциональных классов в работе автора [1988b] оценка снизу сводится к оценке снизу ортопроекционных поперечников конечномерных множеств. Нахождение нижней оценки которых приводит к понятию спектрального поперечника, введенного в работе автора [1987c].

Спектральным N-поперечником множества W в линейном нормированном пространстве X назовем величину

$$\mathrm{tr}_N(W, X) = \inf_T \sup_{x \in W} \|x - Tx\|_X,$$

где инфимум берется по конечномерным линейным непрерывным операторам $T\colon X \to X$, для которых $\operatorname{tr} T = N$. (Конечномерность оператора означает конечномерность области значений.)

Пусть $T\colon X \to L_n$ — конечномерный линейный непрерывный оператор, $L_n = \operatorname{lin}\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ — подпространство размерности n. Тогда существуют функционалы $x_i^* \in X^*$ (X^* — сопряженное к X пространство), $i = 1, \dots, n$, такие, что действие оператора T на произвольный элемент $x \in X$ записывается в виде $Tx = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x_i^*, x \rangle x_i$. Следом оператора T называется сумма $\operatorname{tr} T = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x_i^*, x_i \rangle$. При этом след оператора (см., например, А. Пич [1982, с. 17–18]) не зависит от выбора базиса $x_1, \dots, x_n$ и функционалов $x_1^*, \dots, x_n^*$.

Величина $\operatorname{tr}_N(W, X)$ по структуре похожа на геометрические поперечники (по Колмогорову, Александрову, проекционные, ортопроекционные и т. п.). Ее отличие состоит в том, что она не связана непосредственно с размерностью приближающего подпространства. Более того, N может принимать и нецелые значения. Смысл введения данной величины — дать оценку снизу для ряда геометрических поперечников.

Если $N \in \mathbb{N}$ — натуральное число, то проекторы и ортопроекторы на подпространство $L_N \subset X$ размерности N имеют след равный N (см. И. М. Глазман, Ю. И. Любич [1969, с. 138]), поэтому оценка снизу проекционных и ортопроекционных поперечников сводится к оценке снизу спектральных поперечников:

$$\operatorname{tr}_N(W, X) \le \pi_N(W, X) \le d_N^{\perp}(W, X).$$

Таким образом, след оператора является еще одной характеристикой оператора приближения, знание которого позволяет нам сделать определенные выводы о приближающихся возможностях оператора, не зная даже о размерности приближающего подпространства.

В п. 4 будут найдены точные значения спектральных поперечников эллипсоидов $B_p^m(r)$ в пространстве l_q^m и множества V_k^m ($1 \le k \le m$), являющегося выпуклой оболочкой в $\mathbb{R}^m$ точек, у которых k любых координат равны ± 1, остальные — нули, а также проекционные поперечники некоторых конечномерных множеств. Множества V_k^m играют большую роль при оценке поперечников различных множеств (см. например, работы Е. Д. Глускина [1981a], [1987] и автора [1981], [1990b]).

Теорема 2.4.1 (о точном значении спектрального поперечника множества V_k^m). *Пусть* $1 \le q \le \infty$, $N \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le m$. *Тогда*

$$tr_N(V_k^m, l_q^m) = k^{\frac{1}{q}} \Big|1 - \frac{N}{m}\Big|.$$

Доказательство. Оценка сверху. Возьмем линейный непрерывный оператор $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, действующий по формуле $Te_i = \frac{Ne_i}{m}$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда $\operatorname{tr} T = N$. Поскольку $V_k^m \subset k^{\frac{1}{q}} B_q^m$, то

$$\operatorname{tr}_N(V_k^m, l_q^m) \le k^{\frac{1}{q}} \operatorname{tr}_N(B_q^m, l_q^m).$$

Если $x = (x_1, \ldots, x_m) \in B_q^m$, то

$$\|x - Tx\|_q = \left(\sum_{i=1}^m \Big|x_i\Big(1 - \frac{N}{m}\Big)\Big|^q\right)^{1/q} = \Big|1 - \frac{N}{m}\Big| \, \|x\|_q \le \Big|1 - \frac{N}{m}\Big|$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tr}_N(V_k^m, l_q^m) \le k^{\frac{1}{q}} \Big|1 - \frac{N}{m}\Big|.$$

Оценка снизу. Пусть $T\colon \mathbb{R}^m \to L_n = \operatorname{lin}\{f_1, \ldots, f_n\}$, $Tx = \sum\limits_{l=1}^n \langle \lambda_l, x\rangle f_l$, $f_l = (f_{l1}, \ldots, f_{lm})$, $\lambda_l = (\lambda_{l1}, \ldots, \lambda_{lm})$, $l = 1, \ldots, n$. Отсюда $Te_j = \sum\limits_{l=1}^n \langle \lambda_l, e_j\rangle f_l = \sum\limits_{l=1}^n \lambda_{lj} f_l = \sum\limits_{l=1}^n \sum\limits_{i=1}^m \lambda_{lj} f_{li} e_i = \sum\limits_{i=1}^m a_{ij} e_i$, где $a_{ij} = \sum\limits_{l=1}^n \lambda_{lj} f_{li}$, $a_i := a_{ii}$, при этом $\operatorname{tr} T = \sum\limits_{l=1}^n \sum\limits_{i=1}^m \lambda_{li} f_{li} = \sum\limits_{i=1}^m a_i = N$.

Возьмем произвольное множество $I \subset \{1, 2, \ldots, m\}$, $\operatorname{card} I = k$, и обозначим $\varepsilon = \sum\limits_{i \in I} \varepsilon_i e_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Тогда $\varepsilon \in V_k^m$, $T\varepsilon =$

$\sum\limits_{j\in I}\sum\limits_{i=1}^{m}\varepsilon_j a_{ij} e_i$ и при $1\le q<\infty$

$$\|\varepsilon-T\varepsilon\|_q^q \ge \sum_{i\in I}\Big|\varepsilon_i-\sum_{j\in I}\varepsilon_j a_{ij}\Big|^q=\sum_{i\in I}\Big|\varepsilon_i(1-a_i)-\sum_{j\in I,\, j\ne i}\varepsilon_j a_{ij}\Big|^q.$$

Далее для доказательства теоремы нам понадобится следующее легко доказываемое утверждение.

Лемма 2.4.1. *Если* $1\le q<\infty$, *то* $\frac{1}{2^k}\sum\limits_{\substack{\varepsilon_i=\pm1\\ i=1,\dots,k}}\Big|\sum\limits_{i=1}^{k}\varepsilon_i a_i\Big|^q \ge \max\limits_{i=1,\dots,k}|a_i|^q.$

По лемме 2.4.1

$$\frac{1}{2^k}\sum_{\substack{\varepsilon_i=\pm1\\ i\in I}}\|\varepsilon-T\varepsilon\|_q^q \ge \frac{1}{2^k}\sum_{\substack{\varepsilon_i=\pm1\\ i\in I}}\sum_{i\in I}\Big|\varepsilon_i(1-a_i)-\sum_{\substack{j\in I\\ j\ne i}}\varepsilon_j a_{ij}\Big|^q \ge$$

$$\ge \sum_{i\in I}\max\{|1-a_i|^q,\ |a_{ij}|^q,\ j\in I,\ j\ne i\}\ge\sum_{i\in I}|1-a_i|^q.$$

Усредняя далее по всем множествам $I\subset\{1,2,\dots,m\}$, $\operatorname{card} I=k$, получим

$$\frac{1}{2^k C_m^k}\sum_{\operatorname{card} I=k}\ \sum_{\varepsilon_i=\pm1,ß\in I}\|\varepsilon-T\varepsilon\|_q^q\ge\frac{k}{m}\sum_{i=1}^{m}|1-a_i|^q.$$

В силу неравенства 1.1.9 (для средних)

$$\sum_{i=1}^{m}|1-a_i|^q\ge m^{1-q}\Big(\sum_{i=1}^{m}|1-a_i|\Big)^q\ge m^{1-q}\Big(\sum_{i=1}^{m}(1-a_i)\Big)^q=m^{1-q}|m-N|^q.$$

Значит, существует $\varepsilon\in V_k^m$, для которого

$$\|\varepsilon-T\varepsilon\|_q^q\ge k\Big|1-\frac{N}{m}\Big|^q.$$

Извлекая корень q-ой степени из обеих частей последнего неравенства, получаем оценку снизу при $1\le q<\infty$.

Пусть $q=\infty$. Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = N$, то $\sum\limits_{i=1}^{m}(1-a_i) = m-N$, и, значит, найдется $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ такое, что $|1-a_i|\ge \left|1-\frac{N}{m}\right|$. В этом случае искомая оценка снизу будет достигаться на векторе e_i:

$$\|e_i - Te_i\|_\infty \ge \left|1-\sum_{l=1}^{n}\langle\lambda_l, e_i\rangle f_{li}\right| = \left|1-\sum_{l=1}^{n}\lambda_{li} f_{li}\right| = |1-a_i| \ge \left|1-\frac{N}{m}\right|.$$

□

Теорема 2.4.2 (о точном значении спектрального поперечника множества B_p^m)**.** *Пусть* $1\le p,q\le\infty$*,* $N\in\mathbb{R}$*,* $m\in\mathbb{N}$*. Тогда*

$$tr_N(B_p^m, l_q^m) = \left|1-\frac{N}{m}\right| m^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})_+}.$$

Доказательство. Оценка сверху следует из вложения конечномерных множеств $B_p^m \subset m^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})_+} B_q^m$ и неравенства $\mathrm{tr}_N(B_q^m, l_q^m) \le \left|1-\frac{N}{m}\right|$, доказанного при выводе оценки сверху в теореме 2.4.1.

Оценка снизу. В силу вложения $B_p^m \supset m^{-\frac{1}{p}} B_\infty^m = m^{-\frac{1}{p}} V_m^m$ и теоремы 2.4.1 получаем оценку снизу при $q\le p$

$$\mathrm{tr}_N(B_p^m, l_q^m) \ge m^{-\frac{1}{p}}\mathrm{tr}_N(V_m^m, l_q^m) = m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}|1-N/m|.$$

При $p\le q$ оценка снизу следует из вложения $B_p^m\supset B_1^m = V_1^m$ и теоремы 2.4.1

$$\mathrm{tr}_N(B_p^m, l_q^m) \ge \mathrm{tr}_N(V_1^m, l_q^m) = \left|1-\frac{N}{m}\right|. \qquad \square$$

Теорема 2.4.3 (о точном значении спектрального поперечника $\mathrm{tr}_N(B_p^m(r), l_q^m)$)**.** *Пусть* $r=(r_1,\ldots,r_m)$*,* $r_i>0$*,* $i=1,\ldots,m$*,* $B_p^m(r) = \left\{x\in\mathbb{R}^m \mid \left(\sum\limits_{i=1}^{m}|r_i x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le 1\right\}$*, при* $0<p<\infty$*,* $B_\infty^m(r) = \{x\in\mathbb{R}^m \mid |r_i x_i|\le 1,\ i=1,\ldots,m\}$*,* $1\le p,q\le\infty$*,* $N\in\mathbb{R}$*,* $z=\frac{1}{1-(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})_+}$*. Тогда*

$$tr_N(B_p^m(r), l_q^m) = \frac{|m-N|}{\|r\|_z}.$$

Доказательство. Оценка сверху. А) Пусть $z \neq \infty$, т. е. исключим случай $q = 1$, $p = \infty$. Возьмем линейный непрерывный оператор $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, действующий по формуле $Te_i = (1 - Ar_i^z)e_i$, $i = 1, \ldots, m$, где $A = \dfrac{m-N}{\|r\|_z^z}$. Тогда $\operatorname{tr} T = \sum\limits_{i=1}^{m}(1 - Ar_i^z) = m - A\sum\limits_{i=1}^{m} r_i^z = m - (m - N) = N$.

Если $p \leq q$, то $B_p^m(r) \subset B_q^m(r)$, $z = 1$, и, следовательно,

$$\operatorname{tr}_N(B_p^m(r), l_q^m) \leq \operatorname{tr}_N(B_q^m(r), l_q^m) \leq \sup_{x \in B_q^m(r)} \|x - Tx\|_q =$$

$$= \sup_{x \in B_q^m(r)} \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i A r_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} = |A| = \frac{|m-N|}{\|r\|_1}.$$

Если $p > q$, то $z > 1$. Для $x \in B_p^m(r)$ по неравенству Гельдера при $\theta = \frac{p}{q} > 1$ $\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1\right)$ имеем

$$\|x - Tx\|_q^q = \sum_{i=1}^{m} |x_i|^q |A|^q r_i^{zq} = |A|^q \sum_{i=1}^{m} |x_i r_i|^q r_i^{(z-1)q} \leq$$

$$\leq |A|^q \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i r_i|^{q\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{i=1}^{m} r_i^{(z-1)q\theta'}\right)^{\frac{1}{\theta}'} = |A|^q \|rx\|_p^q \|r\|_z^{\frac{z}{\theta'}}$$

(при вычислениях мы пользуемся тождеством $(z-1)q\theta' = z$). Отсюда

$$\operatorname{tr}_N(B_p^m(r), l_q^m) \leq |A|\, \|r\|_z^{\frac{z}{\theta'}} = |m - N|\, \|r\|_z^{\frac{z}{q\theta'}} z = \frac{|m-N|}{\|r\|_z}.$$

Б) Пусть $z = \infty$, т. е. $q = 1$, $p = \infty$. Предположим для определенности, что $\|r\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,m} r_i = r_1$. В этом случае возьмем оператор, действующий по формуле $Te_1 = (N + 1 - m)e_1$, $Te_i = e_i$, $i = 2, \ldots, m$. Тогда $\operatorname{tr} T = N + 1 - m + m - 1 = N$. Если $x \in B_\infty^m(r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x_k r_k| \leq 1,\ k = 1, \ldots, m\}$, то

$$\|x - Tx\|_1 = |x_1(m - N)| \leq \frac{|m-N|}{r_1} = \frac{|m-N|}{\|r\|_\infty}.$$

Отсюда следует доказываемая оценка сверху.

Оценка снизу. Пусть $T\colon \mathbb{R}^m \to L_n$ — произвольный линейный оператор, $\operatorname{tr} T = N$, $L_n = \operatorname{lin}\{f_1, \dots, f_n\}$, $Tx = \sum\limits_{l=1}^{n} \langle \lambda_l, x\rangle f_l$, $f_l = (f_{l1}, \dots, f_{lm})$, $\lambda_l = (\lambda_{l1}, \dots, \lambda_{lm})$, $l = 1, \dots, n$. Отсюда $Te_j = \sum\limits_{l=1}^{n} \langle \lambda_l, e_j\rangle f_l = \sum\limits_{l=1}^{n} \lambda_{lj} f_l = \sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_{lj} f_{li} e_i = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$, где $a_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{n} \lambda_{lj} f_{li}$, $a_i := a_{ii}$, при этом $\operatorname{tr} T = \sum\limits_{l=1}^{n} \langle \lambda_l, f_l\rangle = \sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_{li} f_{li} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i = N$.

А) Если $q < p$ и $z \neq \infty$ (т. е. исключаем случай $p = \infty$, $q = 1$), то

$$\|x - Tx\|_q^q = \left\| \sum_{i=1}^{m} x_i e_i - T\left(\sum_{j=1}^{m} x_j e_j\right)\right\|_q^q =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{m} x_i e_i - \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i \right\|_q^q = \left\| \sum_{i=1}^{m} e_i \left(x_i - \sum_{j=1}^{m} x_j a_{ij}\right)\right\|_q^q =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left| x_i - \sum_{j=1}^{m} x_j a_{ij}\right|^q = \sum_{i=1}^{m} \left| x_i(1 - a_i) - \sum_{j\neq i} x_j a_{ij}\right|^q .$$

Положим $x_i = \varepsilon_i y_i$, где $y_i = \|r\|_z^{-\frac{z}{p}} r_i^{\frac{z}{p}-1}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, m$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{m} |x_i r_i|^p = \|r\|_z^{-z} \sum\limits_{i=1}^{m} r_i^z = 1$, т. е. $x \in B_p^m(r)$.

По лемме 2.4.1

$$\frac{1}{2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1\\ i=1,\dots,m}} \|x - Tx\|_q^q = \frac{1}{2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1\\ i=1,\dots,m}} \sum_{i=1}^{m} \left| \varepsilon_i y_i (1 - a_i) - \sum_{j \neq i} \varepsilon_j y_j a_{ij}\right|^q \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{m} \max\left\{ |y_i(1 - a_i)|^q,\ |y_j a_{ij}|^q,\ j \neq i\right\} \geq \sum_{i=1}^{m} |y_i(1 - a_i)|^q. \quad (2.4.2)$$

Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = N$, то по неравенству Гельдера

$$|m - N| = \left| \sum_{i=1}^{m} (1 - a_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{m} |1 - a_i| = \sum_{i=1}^{m} |y_i(1 - a_i)|\, |y_i|^{-1} \leq$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i(1-a_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^{-q'}\right)^{\frac{1}{q}'}, \ \frac{1}{q} + \frac{1}{q}' = 1.$$

Отсюда и из (2.4.2)

$$\frac{1}{2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1\\ i=1,\ldots,m}} \|x - Tx\|_q^q \ge \sum_{i=1}^{m} |y_i(1-a_i)|^q \ge |m-N|^q \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^{-q'}\right)^{-\frac{q}{q'}} =$$

$$= |m-N|^q \|r\|_z^{-\frac{zq}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m} r_i^{-(\frac{z}{p}-1)q'}\right)^{-\frac{q}{q'}} = \frac{|m-N|^q}{\|r\|_z^{\frac{zq}{p}+\frac{qz}{q'}}} = \frac{|m-N|^q}{\|r\|_z^q}.$$

Значит, существует $x \in B_p^m(r)$, для которого

$$\|x - Tx\|_q^q \ge \frac{|m-N|^q}{\|r\|_z^q}.$$

Извлекая корень q-ой степени из обеих частей последнего неравенства, получаем оценку снизу при $q < p$ и $z \ne \infty$.

Б) Пусть $z = \infty$, т. е. $p = \infty$, $q = 1$. Будем проводить усреднение по точкам $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $x_i = \varepsilon_i r_i^{-1}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, m$. Ясно, что $x \in B_\infty^m(r)$ и аналогично пункту А) получаем

$$\frac{1}{2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1\\ i=1,\ldots,m}} \|x - Tx\|_1 \ge \sum_{i=1}^{m} \frac{|1-a_i|}{r_i} \ge \sum_{i=1}^{m} \frac{|1-a_i|}{\|r\|_\infty} \ge \frac{|m-N|}{\|r\|_\infty},$$

откуда следует нужная оценка снизу.

В) Пусть $p \le q$. Тогда $B_1^m(r) \subset B_p^m(r)$ и, следовательно,

$$\mathrm{tr}_N(B_p^m(r), l_q^m) \ge \mathrm{tr}_N(B_1^m(r), l_q^m) \ge \mathrm{tr}_N(B_1^m(r), l_\infty^m).$$

Имеем

$$\sup_{x \in B_1^m(r)} \|x - Tx\|_\infty \ge \max_{k=1,\ldots,m} \frac{\|e_k - Te_k\|_\infty}{r_k} \ge \max_{k=1,\ldots,m} \frac{|1-a_k|}{r_k}. \tag{2.4.3}$$

Поскольку

$$|m-N| \le \sum_{i=1}^{m} |1-a_i| = \sum_{i=1}^{m} r_i \frac{|1-a_i|}{r_i} \le \sum_{i=1}^{m} r_i \max_{k=1,\ldots,m} \frac{|1-a_k|}{r_k} \le$$

$$\le \|r\|_1 \max_{k=1,\dots,m} \frac{|1-a_k|}{r_k} \Longrightarrow \max_{k=1,\dots,m} \frac{|1-a_k|}{r_k} \ge \frac{|m-N|}{\|r\|_1}. \quad (2.4.4)$$

то из неравенств (2.4.3) и (2.4.4) сразу следует нужная оценка снизу

$$\mathrm{tr}_N(B_p^m(r), l_q^m) \ge \frac{|m-N|}{\|r\|_1}. \qquad \square$$

Далее приведем две теоремы о проекционных поперечниках конечномерных множеств.

Теорема 2.4.4 (о проекционном поперечнике множества $B(K)$). *Пусть* $K \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *— подмножество из* $\mathbb{R}^2$, $Q = Q(K) = \mathrm{co}\, K + \mathrm{cone}\,\{(-1,0),(1,-1)\}$, $B(K) = \bigcap\limits_{(\frac{1}{p},r)\in K} (2N)^{-r} B_p^{2N}$, $\gamma(\xi) = \max\limits_{(\xi,r)\in Q} r$, $1 \le q \le \infty$. *Тогда*

$$\pi_N(B(K), l_q^{2N}) \asymp N^{-\gamma(\frac{1}{q})}.$$

Доказательство. Оценка сверху. Поскольку $\left(\frac{1}{q}, \gamma(\frac{1}{q})\right) \in Q$, то по теореме 1.2.4 $B := B(K) \subset (2N)^{-\gamma(\frac{1}{q})} B_q^{2N}$. Поэтому

$$\pi_N(B, l_q^{2N}) \le (2N)^{-\gamma(\frac{1}{q})} \pi_N(B_q^{2N}, l_q^{2N}) = (2N)^{-\gamma(\frac{1}{q})}.$$

Оценка снизу. Через точку $\left(\frac{1}{q}, \gamma(\frac{1}{q})\right)$, лежащую на границе выпуклого замкнутого множества Q, проведем к Q опорную прямую. Пусть при этом опорная прямая пересекает прямые $\xi = 0$ и $\xi = 1$ при $\eta = \alpha$ и $\eta = \beta$ соответственно. Из построения множества Q вытекает, что $0 \le \alpha - \beta \le 1$. По теореме 1.2.4 $(2N)^{-\alpha} B_\infty^{2N} \cap (2N)^{-\beta} B_1^{2N} \subset B$. Отсюда

$$\pi_N(B, l_q^{2N}) \ge (2N)^{-\alpha} \pi_N(B_\infty^{2N} \cap (2N)^{\alpha-\beta} B_1^{2N}, l_q^{2N}) \ge$$

$$(2N)^{-\alpha} \pi_N(V_k^{2N}, l_q^{2N}),$$

где $k = [(2N)^{\alpha-\beta}]$. Оценивая проекционный поперечник снизу спектральным поперечником и применяя теорему 2.4.1, имеем

$$\pi_N(B, l_q^{2N}) \gg N^{-\alpha} \mathrm{tr}_N(V_k^{2N}, l_q^{2N}) \asymp N^{-\alpha + \frac{\alpha-\beta}{q}} = N^{-\gamma(\frac{1}{q})}. \qquad \square$$

Теорема 2.4.5 (о точном значении проекционного поперечника октаэдра). *Имеет место следующее равенство*

$$\pi_N(B_1^m, l_\infty^m) = 1 - \frac{N}{m} \quad (N \le m).$$

Доказательство. Оценка сверху. Возьмем L_N — N-мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$, порождаемое ортонормированной системой векторов $f_l = (f_{l1}, \ldots, f_{lm})$, $l = 1, \ldots, N$, такой, что $\langle g_k, g_k \rangle = \|g_k\|^2_{l_2^N} = \frac{N}{m}$, где $g_k = (f_{1k}, \ldots, f_{Nk}) \in \mathbb{R}^N$, $k = 1, \ldots, m$. Построение такой ортонормированной системы имеется в работе А. И. Мальцева [1947]. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — канонический базис в $\mathbb{R}^m$. Обозначим P_{L_N} — ортопроектор (он является и проектором) на подпространство $L_N \subset \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\|e_k - P_{L_N} e_k\|_\infty = \left\| e_k - \sum_{l=1}^N \langle e_k, f_l \rangle f_l \right\|_\infty =$$

$$= \max\left\{ \left| 1 - \sum_{l=1}^N f_{lk}^2 \right|, \left| \sum_{l=1}^N f_{lk} f_{lj} \right|, j \ne k \right\} =$$

$$= \max\{|1 - \langle g_k, g_k \rangle|, |\langle g_k, g_j \rangle|,\ j \ne k\}.$$

Дополним систему $f_1, \ldots, f_N$ векторами $f_{N+1}, \ldots, f_m$ до полной ортонормированной системы в $\mathbb{R}^m$. Обозначим $g'_k = (f_{N+1\,k}, \ldots, f_{m\,k})$, $k = 1, \ldots, m$, тогда $\langle g'_k, g'_k \rangle = 1 - \langle g_k, g_k \rangle = 1 - \frac{N}{m}$ и $\langle g'_k, g'_j \rangle = -\langle g_k, g_j \rangle$, $j \ne k$, поскольку столбцы матрицы $(f_{ij})_{i,j=1}^m$ также будут образовывать ортонормированную систему векторов. Отсюда при $k \ne j$

$$|\langle g_k, g_j \rangle| = |\langle g'_k, g'_j \rangle| \le \min\{\|g_k\|_2 \|g_j\|_2, \|g'_k\|_2 \|g'_j\|_2\} \le \min\{\tfrac{N}{m}, 1 - \tfrac{N}{m}\}.$$

Таким образом, $\|e_k - P_{L_N} e_k\|_\infty \le 1 - \frac{N}{m}$, $k = 1, \ldots, m$. Теперь, если $x = (x_1, \ldots, x_m) \in B_1^m$, т. е. $\sum\limits_{k=1}^m |x_k| \le 1$, то

$$\|x - P_{L_N} x\|_\infty \le \sum_{k=1}^m |x_k|\, \|e_k - P_{L_N} e_k\|_\infty \le \sum_{k=1}^m |x_k| \left(1 - \frac{N}{m}\right) \le 1 - \frac{N}{m}.$$

Оценка снизу следует из теоремы 2.4.1

$$\pi_N(B_1^m, l_\infty^m) \geq \mathrm{tr}_N(B_1^m, l_\infty^m) = 1 - \frac{N}{m}. \qquad \square$$

3 Колмогоровские и линейные поперечники

В этой главе определяются колмогоровские и линейные поперечники классов периодических функций одной и нескольких переменных $W^r_p(\mathbb{T}^d)$, $H^r_p(\mathbb{T}^d)$, $W^\Omega(\mathbb{T}^1)$. Во нескольких случаях вычисление поперечников классов функций сводится к задаче вычисления поперечников конечномерных множеств. При этом мы пользуемся оценками поперечников конечномерных множеств в тех случаях, когда они уже известны. В ряде случаев, когда эти оценки являлись неизвестными, решается задача их вычисления. Приводятся оценки поперечников классов функций нескольких переменных при малых гладкостях.

Колмогоров А. Н. в 1936 году он ввел следующую характеристику приближения центрально-симметричного множества $W \subset X$ из линейного нормированного пространства X:

$$d_n(W, X) = \inf_{L_n} \sup_{x\in W} \inf_{y\in L_n} \|x - y\|,$$

где $\{L_n\}$ — совокупность всех n–мерных подпространств из X.

3.1 Поперечники конечномерных множеств

В этом пункте будет будут доказаны две теоремы о колмогоровских поперечниках конечномерных множеств, а также приведен ряд известных теорем о поперечниках по Колмогорову конечномерных множеств.

Напомним, что через V^m_k мы обозначаем множество, являющееся выпуклой оболочкой в $\mathbb{R}^m$ точек, у которых k любых координат равны ±1, остальные — нули. Формально, $V^m_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{l^m_1} \le k,\ \|x\|_{l^m_\infty} \le 1\}$. Такие множества используются часто при оценках снизу поперечников конечномерных множеств и функциональных классов. Множества V^m_k получаются при пересечении m-мерного куба с растянутым в k раз октаэдром.

Теорема 3.1.1 (Е. Д. Глускин [1981a],[1987]). *Пусть* $1 \le n \le \frac{m}{2}$, $1 \le k \le m$. *Тогда*

$$d_n(V^m_k, l^m_q) \asymp k^{\frac{1}{q}},\ 1 \le q \le 2,$$

$$d_n(V_k^m, l_q^m) \gg \min\left\{k^{\frac{1}{q}}, m^{\frac{1}{q}}\left(\tfrac{k}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right\},\ 2 \le q \le \infty.$$

Теорема 3.1.2 доказана в работах Е. Д. Глускина (при $2 \le q < \infty$ см. [1981a],[1981b]; при $1 \le q \le 2$ см. [1987]). Частные случаи этой теоремы (при $2 \le q \le \infty$, $m = 2N$, $k = [N^\gamma]$, $0 \le \gamma \le 1$), а также равенство $d_N(V_k^m, l_1^m) = \min\{k, m - N\}$) доказывались также автором [1981], [1982a].

Через $B_{p,q}^{n,m}$ обозначим единичный шар нормированного пространства $l_{p,q}^{n,m}$ с нормой

$$\|x\|_{l_{p,q}^{n,m}} = \left(\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{k\in\Delta_s}|x_k|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}},\ 1 \le p, q \le \infty,\ x \in \mathbb{R}^{nm},$$

где $\Delta_s = \left\{k \in \mathbb{N} \mid (s-1)n < k \le sn\right\}$, $s = 1, \ldots, m$. Тогда $B_{1,\infty}^{n,m} = V_1^n \times \ldots \times V_1^n$, $V_{k,\infty}^{n,m} = V_k^n \times \ldots \times V_k^n$.

Теорема 3.1.2. [1985*b*] *Пусть $1 \le p \le \infty$, $2 \le q < \infty$. Тогда существует константа C, зависящая только от q и такая, что при $n \le Cmk$*

$$d_n(B_{p,\infty}^{m,k}, l_q^{mk}) \gg \min\left\{k^{\frac{1}{q}}, k^{\frac{1}{q}+\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{1}{2}}\right\}.$$

Теорема 3.1.3 (А. Пич [1974], М. И. Стесин [1975]). *Пусть $1 \le q \le p \le \infty$, $n < m$. Тогда*

$$d_n(B_p^m, l_q^m) = (m-n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}. \tag{3.1.1}$$

Теорема 3.1.4 (Б. С. Кашин [1977], Е. Д. Глускин [1983]). *Пусть $n < m$, $\beta := (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})/(1 - \frac{2}{q})$. Тогда*

$$d_n(B_p^m, l_q^m) \asymp$$
$$\asymp \begin{cases} \min\left\{1,\ m^{\frac{2\beta}{q}} n^{-\beta}\right\}, & 2 \le p < q < \infty, \\ \max\left\{m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \min\{1, m^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{n}{m}}\}\right\}, & 1 \le p < 2 \le q \le \infty. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Используя вложение пересечения конечномерных множеств $B(K)$, оценки сверху поперечников $d_n(B_p^m, l_q^m)$ по теореме 3.1.4 и оценки снизу поперечников множеств V_k^m по теореме 3.1.2, найдем поперечники пересечения конечномерных множеств.

Теорема 3.1.5 (о поперечнике по Колмогорову пересечения конечномерных множеств)**.** 1988*г Пусть* $K \subset [0,\,1] \times \mathbb{R}$ *— компакт из* $\mathbb{R}^2$*,* $Q = \operatorname{co} K + \operatorname{cone}\{(-1,0),\ (1,-1)\}$*,* $B(K) = \bigcap\limits_{(\frac{1}{p},r)\in K} B_p^r(\mathbb{R}^{2n})$*,* $\Gamma(\xi) = \max\limits_{(\xi,r)\in Q} r$*. Тогда*

$$d_n(B(K), l_q^{2n}) \asymp \begin{cases} n^{-\Gamma(\frac{1}{q})}, & 1 \le q \le 2,\\ n^{-\Gamma(\frac{1}{2})+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}, & 2 \le q \le \infty. \end{cases}$$

Доказательство. Оценка сверху. Множество Q является замкнутым, поскольку выпуклая оболочка компакта есть компакт, и сумма компакта и замкнутого множества есть также замкнутое множество и, следовательно, точка $\left(\frac{1}{q}, \Gamma(\frac{1}{q})\right) \in Q$.

А) Пусть $1 \le q \le 2$. По теореме 1.2.4 $B(K) \subset B_q^{\Gamma(\frac{1}{q})}$ и, значит, в силу теоремы о поперечнике шара (см. В. М. Тихомиров [1976, с. 232])

$$d_n(B(K), l_q^{2n}) \le d_n(B_q^{\Gamma(\frac{1}{q})}, l_q^{2n}) = (2n)^{-\Gamma(\frac{1}{q})}.$$

Б) Пусть $2 \le q \le \infty$. По теореме 1.2.4 $B(K) \subset B_2^{\Gamma(\frac{1}{2})}$ и, значит,

$$d_n(B(K), l_q^{2n}) \le d_n(B_2^{\Gamma(\frac{1}{2})}, l_q^{2n}) \asymp n^{-\Gamma(\frac{1}{2})} d_n(B_2^{2n}, l_q^{2n}) \asymp n^{-\Gamma(\frac{1}{2})+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}.$$

Оценка снизу при $2 \le q \le \infty$ в силу неравенства 1.1.9 (для средних) сводится к случаю $q = 2$

$$d_n(B(K), l_q^{2n}) \ge (2n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} d_n(B(K), l_2^{2n}).$$

Пусть теперь $1 \le q \le 2$. Через точку $\left(\frac{1}{q}, \Gamma(\frac{1}{q})\right)$, лежащую на границе выпуклого множества Q, проведем к Q опорную прямую L. Пусть при этом L пересекает прямые $\xi = 0$ и $\xi = 1$ при $\eta = a$ и $\eta = b$ соответственно. Из построения Q вытекает, что $0 \le a - b \le 1$.

По теореме 1.2.4 для любой точки $\left(\frac{1}{p}, r\right)$, $1 \leq p \leq \infty$, лежащей ниже прямой L, а в частности и для точек $\left(\frac{1}{p}, r\right) \in K$, $B_p^r \supset B_\infty^a \cap B_1^b$. Следовательно, $B(K) \supset B_\infty^a \cap B_1^b = (2n)^{-a}(B_\infty^0 \cap B_1^{b-a})$. С другой стороны, очевидно, что $B_\infty^0 \cap B_1^{b-a} \supset V_k^{2n}$, $k = [(2n)^{a-b}]$. Поэтому

$$d_n(B(K), l_q^{2n}) \geq d_n(B_\infty^a \cap B_1^b, l_q^{2n}) =$$

$$= (2n)^{-a} d_n(B_\infty^0 \cap B_1^{b-a}, l_q^{2n}) \geq (2n)^{-a} d_n(V_k^{2n}, l_q^{2n}).$$

Оценивая последний поперечник по теореме 3.1.2, придем к требуемой оценке

$$d_n(B(K), l_q^{2n}) \gg n^{-a} k^{\frac{1}{q}} \asymp n^{-a+\frac{a-b}{q}} = n^{-\Gamma(\frac{1}{q})}. \qquad \square$$

При вычислении поперечников функциональных классов оценки сверху и снизу часто сводятся к оценкам поперечников конечномерных множеств. Так, например, оценка снизу поперечника по Колмогорову $d_N(H_p^r(\mathbb{T}^d), L_q)$ класса периодических функций нескольких переменных с доминирующей смешанной производной $H_p^r(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q при $1 < p \leq q \leq 2$ сводится к оценке снизу поперечника $d_N(B_{1,\infty}^{n,m}, l_{2,q}^{n,m})$ конечномерного множества $B_{1,\infty}^{n,m}$ в смешанной норме $l_{2,q}^{n,m}$ с помощью теоремы Литтльвуда–Пэли, неравенства В. Н. Темлякова и теоремы Марцинкевича–Зигмунда о дискретизации. И далее вычисляется порядок этого поперечника, то есть доказывается следующая теорема.

Теорема 3.1.6 ([1990b]). *Пусть* $1 < q < \infty$, $N \leq \frac{nm}{2}$. *Тогда*

$$d_N(B_{1,\infty}^{n,m}, l_{2,q}^{n,m}) \asymp m^{\frac{1}{q}}.$$

Изложенное в этой работе доказательство оценки снизу (оценки сверху здесь при всех значениях величины q тривиальны) без изменений проходит и для случая $q = \infty$. При выступлении на семинаре Б. С. Кашина была предложена задача для случая $q = 1$, решение которой требовало новых идей и которые могут быть использованы при нахождении порядков линейных поперечников классов Гельдера–Никольского и классов Бесова. А. Д. Изааку, используя вероятностные методы, удалось получить следующую нетривиальную оценку.

Теорема 3.1.7 (А. Д. Изаак [1994]). *Пусть* $N \le \frac{nm}{2}$. *Тогда*

$$m\frac{\sqrt{\log\log m}}{\log m} \ll d_N(B^{n,m}_{1,\infty}, l^{n,m}_{2,1}) \ll m.$$

Найдем порядок поперечника по Колмогорову $d_N(V^{n,m}_{k,\infty}, l^{n,m}_{p,q})$ множества $V^{n,m}_{k,\infty}$, являющегося обобщением множества $B^{n,m}_{1,\infty}$, в смешанной норме $l^{n,m}_{p,q}$ для $p = 2$, $1 < q \le \infty$ и $1 < p \le \min\{q, 2\}$, $1 < q \le \infty$. Множества $V^{n,m}_{k,\infty}$ появляются, например, при дискретизации задач об оценке снизу поперечников пересечения классов Гельдера–Никольского периодических функций нескольких переменных $H^r_p(\mathbb{T}^d)$.

Для оценки поперечников конечномерных множеств в смешанной норме будем использовать нам два следующих факта.

Теорема 3.1.8. *Пусть* $0 < q < \infty$, $p_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$. *Тогда*

$$A\Bigl(\sum_{i=1}^m |p_i|^2\Bigr)^{\frac12} \le \Bigl(\frac{1}{2^m}\sum_{\varepsilon_i=\pm1}\Bigl|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i p_i\Bigr|^q\Bigr)^{\frac1q} \le B\Bigl(\sum_{i=1}^m |p_i|^2\Bigr)^{\frac12}$$

при некоторых положительных константах A и B, зависящих от q и не зависящих от m,n и векторов p_i.

Теорема 3.1.8 является обобщением известного неравенства Хинчина для векторных величин p_i. Она была доказана в работе автора [1990b], а так же может быть выведена, как замечено Глускиным, из неравенства Кахана (см. например, В. Мильман, Г. Шехтман [1986]) и тождества параллелограмма.

Лемма 3.1.1 (Э. М. Галеев [1995]). *Пусть* $T = \{t = \bigcup\limits_{s=1}^m t_s \mid t_s \subset \triangle_s$, *card* $t_s = k$, $s = 1, \dots, m\}$, $0 \le x_i \le 1$, $i = 1, \dots, mn$, $\sum\limits_{i=1}^{mn} x_i \le n$, $0 < q < \infty$. *Тогда*

$$I = \Bigl(\frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\Bigl(\sum_{i\in t} x_i\Bigr)^q\Bigr)^{\frac1q} \le Ck,$$

где константа C зависит от q и не зависит от k, n, m и набора x_i.

Используя выписанные усреднения и теорему двойственности (см. Н. П. Корнейчук [1976, с. 34] о расстоянии от точки ε до подпространства L_N в пространстве $l_{p,q}^{n,m}$, доказывается следующая теорема.

Теорема 3.1.9 (о поперечнике по Колмогорову множества $V_{k,\infty}^{n,m}$ в смешанной норме (см. Э. М. Галеев [1995])). [1995] *Пусть* $1 < q \leq \infty$, $N \leq \frac{nm}{2}$, $1 \leq k \leq n$. *Тогда*

$$d_N(V_{k,\infty}^{n,m}, l_{p,q}^{n,m}) \asymp k^{\frac{1}{p}} m^{\frac{1}{q}},$$

если $p = 2$ *или* $1 < p \leq \min\{q, 2\}$.

Доказательство. Оценка снизу. Опишем множество вершин в $V_{k,\infty}^{n,m}$. Обозначим $E := \{\varepsilon = \sum\limits_{i \in t} \varepsilon_i e_i \in \mathbb{R}^{mn} \mid \varepsilon_i = \pm 1,\ t \in T\}$, где $e_1, \ldots, e_{mn}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^{mn}$, T — множество из леммы 3.1.5. Тогда $V_{k,\infty}^{n,m} = \operatorname{co} E$, и, следовательно,

$$d_N(V_{k,\infty}^{n,m}, l_{p,q}^{n,m}) = d_B(E, l_{p,q}^{n,m}).$$

Пусть $L_N \subset \mathbb{R}^{mn}$ — произвольное подпространство размерности N, $L_N^{\perp}$ — его ортогональное дополнение. В силу теоремы двойственности (см. Н. П. Корнейчук [1976, с. 34] расстояние от точки ε до подпространства L_N в пространстве $l_{p,q}^{n,m}$ может быть вычислено следующим образом:

$$d\big(\varepsilon, L_N, l_{p,q}^{n,m}\big) = \sup\big\{|\langle z, \varepsilon\rangle| \mid z \in L_N^{\perp} \cap B_{p',q'}^{n,m}\big\},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Обозначим через $P\colon \mathbb{R}^{mn} \to L_N^{\perp}$ ортопроектор на подпространство $L_N^{\perp}$. Положим $z := \dfrac{P\varepsilon}{\|P\varepsilon\|_{p',q'}}$, тогда $z \in L_N^{\perp} \cap B_{p',q'}^{n,m}$ и

$$d\big(\varepsilon, L_N, l_{p,q}^{n,m}\big) \geq \frac{|\langle P\varepsilon, \varepsilon\rangle|}{\|P\varepsilon\|_{p',q'}} \quad \forall\, \varepsilon \in E,\ P\varepsilon \neq 0.$$

Так как

$$\max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right\} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n} \quad \forall\, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0,$$

то

$$d^{q'}\left(E, L_N, l_{p,q}^{n,m}\right) \geq \frac{\sum\limits_{\varepsilon\in E} |\langle P\varepsilon, \varepsilon\rangle|^{q'}}{\sum\limits_{\varepsilon\in E} \|P\varepsilon\|_{p',q'}^{q'}} = \frac{\frac{1}{|E|}\sum\limits_{\varepsilon\in E} |\langle P\varepsilon, \varepsilon\rangle|^{q'}}{\frac{1}{|E|}\sum\limits_{\varepsilon\in E} \|P\varepsilon\|_{p',q'}^{q'}} = \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2},$$

где $|E|$ означает число элементов во множестве E. Оценим снизу величину Σ_1. По неравенству 1.1.9 (для средних)

$$\Sigma_1^{\frac{1}{q'}} = \left(\frac{1}{|E|}\sum_{\varepsilon\in E} |\langle P\varepsilon, \varepsilon\rangle|^{q'}\right)^{\frac{1}{q}'} \geq \frac{1}{|E|}\sum_{\varepsilon\in E} |\langle P\varepsilon, \varepsilon\rangle| \geq \frac{1}{|E|}\sum_{\varepsilon\in E}\langle P\varepsilon, \varepsilon\rangle.$$

Пусть ортопроектор P задается формулой $Pe_i = \sum\limits_{l=1}^{mn} p_{li}e_l$, $i = 1, \ldots, mn$. Возьмем $\varepsilon = \sum\limits_{i\in t}\varepsilon_i e_i$. Тогда

$$P\varepsilon = \sum_{i\in t}\varepsilon_i\sum_{l=1}^{mn} p_{li}e_l = \sum_{l=1}^{mn} e_l\sum_{i\in t}\varepsilon_i p_{li} = \sum_{l=1}^{mn}\langle\varepsilon, p_l\rangle e_l,$$

где $p_l = (p_{l1}, \ldots, p_{lmn})$ и, значит,

$$\langle P\varepsilon, \varepsilon\rangle = \sum_{i,j\in t}\varepsilon_i\varepsilon_j p_{ij}.$$

При усреднении последней суммы по $\varepsilon_i, \varepsilon_j = \pm 1$, слагаемые при $i \neq j$ взаимно уничтожаются. Отсюда

$$\frac{1}{|E|}\sum_{\varepsilon\in E}\langle P\varepsilon, \varepsilon\rangle = \frac{|t|}{mn}\sum_{j=1}^{mn} p_{jj} \overset{|t|=km}{=} \frac{k}{n}\sum_{j=1}^{mn} p_{jj}.$$

Поскольку для ортопроектора $\operatorname{tr} P = \operatorname{rang} P = mn - N \geq \frac{mn}{2}$, то

$$\frac{1}{|E|}\sum_{\varepsilon\in E}\langle P\varepsilon, \varepsilon\rangle \geq \frac{km}{2},$$

и, следовательно, $\Sigma_1 \gg (km)^{q'}$.

А) Оценим сверху величину Σ_2 в случае $p=2$. Имеем

$$\Sigma_2 = \frac{1}{|E|}\sum_{\varepsilon\in E}\|P\varepsilon\|_{2,q'}^{q'} = \frac{1}{|E|}\sum_{\varepsilon\in E}\sum_{s=1}^{m}\Bigl(\sum_{l\in\Delta_s}\langle\varepsilon,p_l\rangle^2\Bigr)^{\frac{q'}{2}}. \qquad (3.1.3)$$

Поскольку

$$\langle\varepsilon,p_l\rangle^2 = \Bigl(\sum_{i\in t}\varepsilon_i p_{li}\Bigr)^2 = \sum_{i,j\in T}\varepsilon_i\varepsilon_i p_{li}p_{lj},$$

то

$$\sum_{l\in\Delta_s}\langle\varepsilon,p_l\rangle^2 = \sum_{i,j\in t}\varepsilon_i\varepsilon_j\langle p_i^s,p_j^s\rangle = \Bigl|\sum_{i\in t}\varepsilon_i p_i^s\Bigr|^2,$$

где $p_i^s = \sum\limits_{l\in\Delta_s} p_{li}e_l$. Отсюда по теореме 3.1.8

$$\frac{1}{|E|}\sum_{\varepsilon\in E}\Bigl(\sum_{l\in\Delta_s}\langle\varepsilon,p_l\rangle^2\Bigr)^{\frac{q'}{2}} = \frac{1}{|E|}\sum_{\varepsilon\in E}\Bigl|\sum_{i\in t}\varepsilon_i p_i^s\Bigr|^{q'} \asymp \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\Bigl(\sum_{i\in t}|p_i^s|^2\Bigr)^{\frac{q'}{2}} =$$

$$= \frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\Bigl(\sum_{i\in t}x_i\Bigr)^{\frac{q'}{2}},\ x_i = |p_i^s|^2,\ i=1,\dots,mn. \qquad (3.1.4)$$

Так как

$$0 \le x_i = |p_i^s|^2 = \sum_{l\in\Delta_s}p_{lj}^2 \le \sum_{l=1}^{mn}p_{li}^2 = |Pe_i|^2 \le 1$$

и

$$\sum_{i=1}^{mn}x_i = \sum_{i=1}^{mn}\sum_{l\in\Delta_s}p_{li}^2 = \sum_{l\in\Delta_s}\sum_{i=1}^{mn}p_{li}^2 = \sum_{l\in\Delta_s}|P^*e_l|^2 = \sum_{l\in\Delta_s}|Pe_l|^2 \le n,$$

то по лемме 3.1.5

$$\frac{1}{|T|}\sum_{t\in T}\Bigl(\sum_{i\in t}x_i\Bigr)^{\frac{q'}{2}} \ll k^{\frac{q'}{2}}. \qquad (3.1.5)$$

Из соотношений (3.1.3)–(3.1.5) следует, что $\Sigma_2 \ll k^{\frac{q'}{2}} m$. Таким образом,

$$d^{q'}\left(E, L_N, l_{2,q}^{n,m}\right) \gg \frac{(km)^{q'}}{k^{\frac{q'}{2}} m} = k^{\frac{q'}{2}} m^{q'-1} \iff$$

$$d\big(E, L_N, l_{2,q}^{n,m}\big) \gg k^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}} \iff d\big(V_{k,\infty}^{n,m}, L_N, l_{2,q}^{n,m}\big) \gg k^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}}.$$

В силу произвольности подпространства L_N получаем оценку снизу колмогоровского поперечника $d_N\big(V_{k,\infty}^{n,m}, l_{p,q}^{n,m}\big)$ в случае $p = 2$.

Б) Оценим сверху величину Σ_2 в случае $1 < p \leq \min\{q, 2\}$. Имеем

$$\Sigma_2 = \frac{1}{|E|} \sum_{\varepsilon \in E} \|P\varepsilon\|_{p',q'}^{q'} = \frac{1}{|E|} \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{s=1}^{m} \Bigg(\sum_{l \in \Delta_s} |\langle \varepsilon, p_l \rangle|^{p'} \Bigg)^{\frac{q'}{p'}}.$$

В силу неравенства 1.1.2 для средних при $\frac{q'}{p'} \leq 1$

$$\Sigma_2 \leq \sum_{s=1}^{m} \Bigg(\frac{1}{|E|} \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{l \in \Delta_s} |\langle \varepsilon, p_l \rangle|^{p'} \Bigg)^{\frac{q'}{p'}} = \sum_{s=1}^{m} \Bigg(\sum_{l \in \Delta_s} \frac{1}{|E|} \sum_{\varepsilon \in E} |\langle \varepsilon, p_l \rangle|^{p'} \Bigg)^{\frac{q'}{p'}}.$$

Далее по неравенству Хинчина (см. теорема 3.1.4)

$$\Sigma_2 \ll \sum_{s=1}^{m} \Bigg(\sum_{l \in \Delta_s} \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} \Bigg(\sum_{i \in t} |p_{li}|^2 \Bigg)^{\frac{p'}{2}} \Bigg)^{\frac{q'}{p'}}.$$

Поскольку $\sum\limits_{i \in t} |p_{li}|^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{mn} |p_{li}|^2 = |P^* e_l|^2 \leq 1$, а $\frac{p'}{2} \geq 1$, то

$$\Sigma_2 \ll \sum_{s=1}^{m} \Bigg(\sum_{l \in \Delta_s} \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} \sum_{i \in t} |p_{li}|^2 \Bigg)^{\frac{q'}{p'}} =$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \Bigg(\sum_{l \in \Delta_s} \sum_{i=1}^{mn} |p_{li}|^2 \frac{km}{mn} \Bigg)^{\frac{q'}{p'}} \leq \sum_{s=1}^{m} \Big(n \frac{k}{n} \Big)^{\frac{q'}{p'}} = mk^{\frac{q'}{p'}}.$$

Таким образом,

$$d^{q'}\big(E, L_N, l_{p,q}^{n,m}\big) \gg (km)^{q'}/(k^{\frac{q'}{p'}} m) = k^{q'(1-\frac{1}{p'})} m^{q'-1} \iff$$
$$d\big(E, L_N, l_{p,q}^{n,m}\big) \gg k^{\frac{1}{p}} m^{\frac{1}{q}} \iff d\big(V_{k,\infty}^{n,m}, L_N, l_{p,q}^{n,m}\big) \gg k^{\frac{1}{p}} m^{\frac{1}{q}}.$$

В силу произвольности подпространства L_N получаем оценку снизу колмогоровского поперечника $d_N\big(V_{k,\infty}^{n,m}, l_{p,q}^{n,m}\big)$ при $1 < p \le \min\{q, 2\}$.

Отметим, что в этом случае оценку снизу можно также доказать, используя неравенство $\|\cdot\|_{l_q^m} \ge \|\cdot\|_{l_p^m} m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$, из которого вытекает, что

$$d_N(V_{k,\infty}^{n,m}, l_{p,q}^{n,m}) \ge d_N(V_{k,\infty}^{n,m}, l_p^{mn}) m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}},$$

и далее по той же методике. При этом оценка снизу величины Σ_2 запишется чуть короче.

Оценка сверху следует из соотношения $V_{k,\infty}^{n,m} = \operatorname{co} E$ и определения поперечника по Колмогорову:

$$d_N(V_{k,\infty}^{n,m}, l_{p,q}^{n,m}) \le \max_{\varepsilon \in E} d\big(\varepsilon, 0, l_{p,q}^{n,m}\big) = \sup_{\varepsilon \in E} \|\varepsilon\|_{l_{p,q}^{n,m}} = k^{\frac{1}{p}} m^{\frac{1}{q}}. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 3.1.9 во многом использует и развивает методы, описанные ранее в работах Глускина [1987] и автора [1990b].

3.2 Сведение поперечников классов функций к поперечников конечномерных множеств

В этом пункте формулируется для периодических функций нескольких переменных аналог теоремы Марцинкевича–Зигмунда о дискретизации. Приводится лемма об оценке приближения функции, заданной на блоке, в норме функционального пространства L_q к оценке приближения множества в норме конечномерного пространства l_p. Выводятся формулы для оценок сверху и снизу поперечников классов функций $B^r_p(\mathbb{T}^d)$, $H^r_p(\mathbb{T}^d)$, $W^r_p(\mathbb{T}^d)$ через поперечники конечномерных множеств.

Теорема 3.2.1 (Марцинкевича–Зигмунда о дискретизации)**.** *Между пространством тригонометрических полиномов вида* $x(t) = \sum\limits_{k\in\square_s} x_k e^{i\langle k,t\rangle}$ *и пространством* $\mathbb{R}^{2^{\langle s,1\rangle}}$ *устанавливается изоморфизм путем сопоставления функции* $x(\cdot)$ *вектора* $x = \{x_m(\tau^j)\} \in \mathbb{R}^{2^{\langle s,1\rangle}}$, $x_m(t) = \sum\limits_{\substack{\operatorname{sign} k_l = m_l\\ l=1,\dots,d}} x_k e^{i\langle k,t\rangle}$, $m = (\pm1,\dots,\pm1) \in \mathbb{R}^d$, $\tau^j = (\pi 2^{2-s_1} j_1, \dots, \pi 2^{2-s_d} j_d)$, $j_i = 1,\dots,2^{s_i-1}$, $i = 1,\dots,d$, *при этом для функций* $x(\cdot), y(\cdot) \in \operatorname{lin}\{e^{i\langle k,t\rangle},\ k \in \square_s\}$ *и числа* $p \in \mathbb{R}$ *выполняются соотношения:*

$$\|x(\cdot)\|_{L_p} \asymp 2^{-\langle s,\frac{1}{p}\rangle} \|x\|_{l_p^{2^{\langle s,1\rangle}}}, \quad 1 < p < \infty, \tag{3.2.1}$$

$$2^{-\langle s,\frac{1}{p}\rangle} \|x\|_{l_p^{2^{\langle s,1\rangle}}} \ll \|x(\cdot)\|_{L_p}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

и

$$\langle x(\cdot), y(\cdot)\rangle = 2^{-\langle s,1\rangle} \langle x, y\rangle.$$

Теорема 3.2.1 была впервые сформулирована автором и использована в работе [1984a], опубликована в работе [1985a]. Она доказывается аналогично теореме Марцинкевича–Зигмунда для функций одной переменной, доказательство которой содержится в монографии А. Зигмунда [1965, т. 2, с. 46].

Для оценки поперечников классов периодических функций нескольких переменных существенным образом используется теорема Литтльвуда–Пэли о выделении блочной системы для подсчета нормы функций в пространствах L_p и L_q, а также оценки нормы функции $x(\cdot) = \sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \delta_s x(\cdot)$ через нормы функций $\delta_s x(\cdot)$ с гармониками из блоков $\square_s$.

При таком подходе оценки сверху и снизу поперечников функциональных классов сводятся к оценкам поперечников в норме конечномерных пространств l_q с помощью теоремы Марцинкевича–Зигмунда для периодических функций нескольких переменных с гармониками на блоке $\square_s$. В дальнейшем такая оценка нормы функции через блочную систему и использование теоремы о дискретизации на блоке для функций нескольких переменных стали одной из стандартных методик перехода от поперечников классов функций к поперечникам дискретных множеств. Такой подход позднее неоднократно использовался в работах Динь Зунга и других математиков.

Отметим, что впервые дискретизация по теореме Марцинкевича–Зигмунда для нахождения колмогоровских поперечников классов функций одной переменной была проведена в работе Кашина [1981].

Для выписывания формул оценок поперечников функциональных классов нам понадобится следующая лемма, которая легко выводится из определения колмогоровского поперечника, теоремы 1.1.2 Литтльвуда–Пэли и теоремы 3.2.1 о дискретизации.

Лемма 3.2.1. [1996] *Пусть* $s \in \mathbb{N}^d$, $\mathcal{T}_s := \operatorname{lin}\{e^{i\langle k,t\rangle} \mid k \in \square_s\}$, $N_s \in \mathbb{Z}_+$, $N_s \le 2^{\langle s,1\rangle}$, $r \in \mathbb{R}^d$, $1 < p,q < \infty$. *Тогда существует линейное подпространство* $L_{N_s} \subset \mathcal{T}_s$ *размерности* N_s *и оператор* $P_{N_s}\colon \mathcal{T}_s \to L_{N_s}$ *такой, что*

$$\|\delta_s x - P_{N_s}\delta_s x\|_{L_q} \ll d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\big) 2^{\langle s,-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\rangle} \|\delta_s x^{(r)}\|_{L_p}. \quad (3.2.2)$$

Выпишем некоторые формулы для оценок сверху поперечников классов функций нескольких переменных.

Представим функцию $x(\cdot)$ в виде $x(\cdot) = \sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \delta_s x(\cdot)$. Возьмем оператор P_N, действующий на функцию $x = \sum\limits_s \delta_s x$ по формуле $P_N x = \sum\limits_s P_{N_s}\delta_s x$, где P_{N_s} и L_{N_s} — соответственно операторы и подпространства из леммы 3.2.1, $L_N = \bigcup\limits_s L_{N_s}$ — линейное подпространство размерности N, т. е. $\sum\limits_s N_s = N$.

Обозначим для краткости записи $q^* := \min\{q,2\}$, $\alpha := r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Тогда

$$\|x - P_N x\|_q = \Big\| \sum_s \left(\delta_s x - P_{N_s}\delta_s x\right)\Big\|_q \overset{(2.1.6)}{\le} \left(\sum_s \|\delta_s x - P_{N_s}\delta_s x\|_q^{q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}} \ll$$

$$\overset{(3.2.2)}{\ll} \left(\sum_s \left(2^{\langle s, -r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\rangle} d_{N_s}(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}) \|\delta_s x^{(r)}\|_p\right)^{q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}}.$$

Применяя для неотрицательных чисел при $\theta \le q^*$ неравенство:

$$\left(\sum_s (a_s b_s)^{q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}} \overset{(1.1.9)}{\le} \left(\sum_s (a_s b_s)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \le (\sup_s a_s)\cdot\left(\sum_s b_s^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}},$$

а при $\theta > q^*$ неравенство Гельдера:

$$\left(\sum_s a_s^{q^*} b_s^{q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}} \overset{(1.4.9)}{\le} \left(\sum_s a_s^{\frac{q^*\theta}{\theta - q^*}}\right)^{\frac{1}{q^*} - \frac{1}{\theta}} \left(\sum_s b_s^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}},$$

имеем

$$\|x - P_N x\|_q \ll$$

$$\begin{cases} \sup\limits_s 2^{-\langle s,\alpha\rangle} d_{N_s}\left(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\right)\left(\sum\limits_s \|\delta_s x^{(r)}\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}, & \theta \le q^*, \\ \left(\sum\limits_s \left(2^{-\langle s,\alpha\rangle} d_{N_s}\left(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\right)\right)^{\frac{q^*\theta}{\theta - q^*}}\right)^{\frac{1}{q^*} - \frac{1}{\theta}} \left(\sum\limits_s \|\delta_s x^{(r)}\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}, & \theta > q^*, \end{cases}$$

Если $x \in B^r_{p,\theta}(\mathbb{T}^d)$, то для поперечника класса функций Бесова получаем оценку

$$d_N(B^r_{p,\theta}, L_q) \ll \begin{cases} \sup\limits_{s\in\mathbb{N}^d} 2^{-\langle s,\alpha\rangle} d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\big), & \theta \le q^*, \\ \left(\sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \left(2^{-\langle s,\alpha\rangle} d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\big)\right)^{\frac{q^*\theta}{\theta-q^*}}\right)^{\frac{1}{q^*}-\frac{1}{\theta}}, & \theta > q^*. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

В частности для классов $H^r_p = B^r_{p,\infty}$ при $1 < p < \infty$

$$d_N(H^r_p, L_q) \ll \left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d} \left(2^{-\langle s,\alpha\rangle} d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\big)\right)^{q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}}. \tag{3.2.4}$$

Поскольку $W^r_p \overset{(2.1.6)}{\subset\subset} B^r_{p,p^{**}}$ $(p^{**} := \max\{p,2\})$, а $\theta = p^{**} \le q^* \Leftrightarrow p \le 2 \le q$, то

$$d_N(W^r_p, L_q) \ll$$
$$\ll \begin{cases} \sup\limits_{s\in\mathbb{N}^d} 2^{-\langle s,\alpha\rangle} d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\big), & p \le 2 \le q, \\ \left(\sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d} \left(2^{-\langle s,\alpha\rangle} d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\big)\right)^{\frac{q^*p^{**}}{p^{**}-q^*}}\right)^{\frac{1}{q^*}-\frac{1}{p^{**}}}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При $2 \le p \le q < \infty$ $(p^{**} := \max\{p,2\} = p,\ q^* := \min\{q,2\} = 2)$ последняя формула приобретает вид

$$d_N(W^r_p, L_q) \ll \left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d} \left(2^{-\langle s,\alpha\rangle} d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\big)\right)^{\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}. \tag{3.2.5}$$

Выведем непосредственно формулу для оценки сверху поперечников классов W_p^r в пространстве L_q при $1 < p \le 2 \le q < \infty$. Имеем:

$$\|x - P_N x\|_q = \Big\| \sum_s \big(\delta_s x - P_{N_s}\delta_s x\big)\Big\|_q \overset{(2.1.6)}{\ll}$$

$$\ll \left(\sum_s \big\|\delta_s x - P_{N_s}\delta_s x\big\|_q^2\right)^{\frac{1}{2}} \overset{(3.1.3)}{\ll}$$

$$\ll \left(\sum_s \Big\|2^{\langle s, -r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\rangle} d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\big)\delta_s x^{(r)}\Big\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sup_s 2^{-\langle s,\alpha\rangle} d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\big)\left(\sum_s \|\delta_s x^{(r)}\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\overset{(2.1.6)}{\ll} \sup_s 2^{-\langle s,\alpha\rangle} d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_p^{2^{\langle s,1\rangle}}\big)\|x^{(r)}\|_p.$$

Таким образом, при $1 < p \le 2 \le q < \infty$

$$d_N(W_p^r, L_q) \ll \sup_{s\in\mathbb{N}^d} 2^{-\langle s,\alpha\rangle} d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}\big). \tag{3.2.6}$$

Выведем еще одну формулу для оценки сверху поперечников классов W_p^r в пространстве L_q при $2 \le p < q < \infty$. Возьмем z такое, что $p < z < q$. Применяя неравенство (2.1.2)

$$\Big\| \sum_s \delta_s x \Big\|_{L_q} \ll \left(\sum_s \Big\| 2^{\langle s, \frac{1}{z} - \frac{1}{q} \rangle} \delta_s x \Big\|_{L_z}^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \le z < q < \infty,$$

имеем:

$$\begin{aligned}
\|x - P_N x\|_q &= \Big\| \sum_s \big(\delta_s x - P_{N_s} \delta_s x\big) \Big\|_q \ll \\
&\ll \left(\sum_s \Big\| 2^{\langle s, \frac{1}{z} - \frac{1}{q} \rangle} \big(\delta_s x - P_{N_s} \delta_s x\big) \Big\|_z^q \right)^{\frac{1}{q}} \overset{(3.2.2)}{\ll} \\
&\ll \left(\sum_s \Big\| 2^{\langle s, \frac{1}{z} - \frac{1}{q} \rangle} 2^{\langle s, -r + \frac{1}{p} - \frac{1}{z} \rangle} d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1 \rangle}}, l_z^{2^{\langle s,1 \rangle}}\big) \delta_s x^{(r)} \Big\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\
&= \left(\sum_s \Big\| 2^{\langle s, -r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \rangle} d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1 \rangle}}, l_z^{2^{\langle s,1 \rangle}}\big) \delta_s x^{(r)} \Big\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \le \\
&\le \sup_s 2^{-\langle s, \alpha \rangle} d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1 \rangle}}, l_z^{2^{\langle s,1 \rangle}}\big) \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \|\delta_s x^{(r)}\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \le \\
&\le \sup_s 2^{-\langle s, \alpha \rangle} d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1 \rangle}}, l_z^{2^{\langle s,1 \rangle}}\big) \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \|\delta_s x^{(r)}\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \overset{(2.1.7)}{\ll} \\
&\ll \sup_{s \in \mathbb{N}^d} 2^{-\langle s, \alpha \rangle} d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1 \rangle}}, l_z^{2^{\langle s,1 \rangle}}\big) \|x^{(r)}\|_p.
\end{aligned}$$

Таким образом, при $2 \le p < z < q < \infty$

$$d_N(W_p^r, L_q) \ll \sup_{s \in \mathbb{N}^d} 2^{\langle s, -r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \rangle} d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1 \rangle}}, l_z^{2^{\langle s,1 \rangle}}\big). \tag{3.2.7}$$

Выпишем формулы для оценок снизу колмогоровских поперечников функциональных классов. Пусть множество $S \subset \mathbb{N}^d$, $K = \bigcup\limits_{s\in S} \square_s$, $\mathcal{T} = \operatorname{lin}\{e^{i\langle k,t\rangle} \mid k \in K\}$. По теореме 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли)

$$d_N(B^r_{p,\theta}, L_q) \geq d_N(B^r_{p,\theta} \cap \mathcal{T}, L_q) \gg d_N(B^r_{p,\theta} \cap \mathcal{T}, L_q \cap \mathcal{T}).$$

Если $x(\cdot) = \sum\limits_{s\in S} \delta_s x(\cdot) \in \mathcal{T}$, то по теореме 3.2.1, с одной стороны,

$$\|x(\cdot)\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_{s\in S} \|\delta_s x^{(r)}\|^\theta_{L_p}\right)^{\frac{1}{\theta}} \overset{(1.1.3)}{\asymp} \left(\sum_{s\in S} \|2^{\langle s,r\rangle}\delta_s x\|^\theta_{L_p}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\overset{(3.2.1)}{\asymp} \left(\sum_{s\in S} \|2^{\langle s,r-\frac{1}{p}\rangle} x_s\|^\theta_{l_p^{2^{\langle s,1\rangle}}}\right)^{\frac{1}{\theta}} = \|x\|_{l_{p,\theta}^{2^{\langle s,1\rangle},|S|}\left(2^{\langle s,r-\frac{1}{p}\rangle}\right)},$$

следовательно,

$$x(\cdot) \in B^r_{p,\theta} \iff x \in C B_{p,\theta}^{2^{\langle s,1\rangle},|S|}\left(2^{\langle s,r-\frac{1}{p}\rangle}\right)$$

для вектора $x = \{x_s,\ s \in S\}$, а с другой стороны,

$$\left\|\sum_{s\in S} \delta_s x\right\|_{L_q} \overset{(2.1.6)}{\gg} \left(\sum_{s\in S} \|\delta_s x\|^{q^{**}}_{L_q}\right)^{\frac{1}{q^{**}}} \overset{(3.2.1)}{\asymp}$$

$$\asymp \left(\sum_{s\in S} \|2^{\langle s,-\frac{1}{q}\rangle} x_s\|^{q^{**}}_{l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}}\right)^{\frac{1}{q^{**}}} = \|x\|_{l_{q,q^{**}}^{2^{\langle s,1\rangle},|S|}\left(2^{\langle s,-\frac{1}{q}\rangle}\right)},$$

$q^{**} := \max\{q, 2\}$. Сводя оценку снизу поперечника функционального класса к оценке снизу поперечника конечномерного множества с помощью изоморфизма между пространством тригонометрических функций $x(\cdot) \in \mathcal{T}$ и конечномерным пространством $\mathbb{R}^{|K|}$, согласно теореме 3.2.1, далее получим:

$$d_N(B^r_{p,\theta}, L_q) \gg d_N\left(B_{p,\theta}^{2^{\langle s,1\rangle},|S|}(2^{\langle s,r-\frac{1}{p}\rangle}), l_{q,q^{**}}^{2^{\langle s,1\rangle},|S|}(2^{\langle s,-\frac{1}{q}\rangle})\right) =$$

$$= d_N\left(B_{p,\theta}^{2^{\langle s,1\rangle},|S|}(2^{\langle s,r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\rangle}), l_{q,q^{**}}^{2^{\langle s,1\rangle},|S|}\right).$$

Пусть $r \in \mathbb{R}^d$, $0 < r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \leq \ldots \leq r_d$. Возьмем $S = \{s = (s_1, \ldots, s_{l+1}, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d \mid \langle s, 1\rangle = m\}$. Тогда $|S| \asymp m^l$ и

$$d_N(B^r_{p,\theta}(, L_q) \gg 2^{-m(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} d_N\big(B^{2^m,m^l}_{p,\theta}, l^{2^m,m^l}_{q,q^{**}}\big). \qquad (3.2.8)$$

Если вместо неравенства (2.1.6) воспользуемся неравенством (2.1.3), то при $q \leq 2$

$$\|x\|_q \overset{(2.1.3)}{\gg} \left(\sum_{s\in S} \|2^{\langle s, \frac{1}{2}-\frac{1}{q}\rangle} \delta_s x\|_2^q\right)^{\frac{1}{q}} \overset{(3.2.1)}{\asymp}$$

$$\asymp \left(\sum_{s\in S} \|2^{q(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} 2^{-\langle s,\frac{1}{2}\rangle} x_s\|^q_{l_2^{2^m}}\right)^{\frac{1}{q}} = 2^{-\frac{m}{q}} \left(\sum_{s\in S} \|x_s\|^q_{l_2^{2^m}}\right)^{\frac{1}{q}} = 2^{-\frac{m}{q}} \|x\|_{l_{2,q}^{2^m,|S|}}.$$

И мы аналогично получим другую формулу для оценки снизу поперечника:

$$d_N(B^r_{p,\theta}, L_q) \gg 2^{-m(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} d_N\big(B^{2^m,m^l}_{p,\theta}, l^{2^m,m^l}_{2,q}\big). \qquad (3.2.9)$$

Поскольку $W^r_p \overset{(2.1.6)}{\supset\supset} B^r_{p,p^*}$ $(p^* := \min\{p, 2\})$, то

$$d_N(W^r_p, L_q) \gg 2^{-m(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} d_N\big(B^{2^m,m^l}_{p,p^*}, l^{2^m,m^l}_{q,q^{**}}\big). \qquad (3.2.10)$$

Полученными формулами (3.2.4)–(3.2.10) будем пользоваться в дальнейшем для вычисления поперечников функциональных классов.

Замечание 3.2.1. *Формулы (3.2.4)-(3.2.10) являются справедливыми не только для колмогоровских поперечников, но и для других поперечников (линейных, проекционных, ортопроекционных и т. д).*

3.3 Поперечники классов функций одной переменной

В этом пункте формулируется теорема о порядке поперечника по Колмогорову $d_N(W^r_p, L_q)$ и определяется порядок $d_N(W^\Omega(\mathbb{T}^1), L_q)$. А также формулируется теорема, уточняющая для критического показателя оценки поперечников в работе Е. Д. Куланина [1983].

Теорема 3.3.1. *Имеет место оценка*

$$d_N(W^r_p(\mathbb{T}^1), L_q) \asymp \begin{cases} N^{-r}, & 1 \le q \le p \le \infty,\ r > 0, \\ N^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 < p \le q < 2,\ r > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \\ N^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 < p \le 2 \le q \le \infty,\ r > \frac{1}{p}, \\ N^{-r}, & 2 \le p \le q < \infty,\ r > \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{1-\frac{2}{q}}. \end{cases}$$

Укажем основные вехи истории нахождения колмогоровских поперечников $d_N(W^r_p(\mathbb{T}^1), L_q)$. При $p = q = 2$ точные значения получил А. Н. Колмогоров [1936], для $p = 1$, $q = 2$ и $p = q = \infty$ порядок найден С. Б. Стечкиным [1954], при $p = q = \infty$ точные значения определены В. М. Тихомировым [1960], при $1 \le p = q < \infty$ порядки найдены С. Б. Бабаджановым и В. М. Тихомировым [1967], $1 \le q \le p \le \infty$ — Ю. И. Маковоз [1972], $1 = p < q \le 2$ — М. З. Соломяк и В. М. Тихомиров [1969], $1 \le p \le q \le 2$ — Р. С. Исмагилов [1962],[1974], $p = 1$, $q > 2$ — Е. Д. Глускин [1978], в остальных случаях при $1 \le p \le q \le \infty$, $q \ge 2$ — Б. С. Кашин [1977].

Используя вложение пересечения классов $W^\Omega(\mathbb{T}^1)$, оценки сверху поперечников для $d_N(W^r_p(\mathbb{T}^1), L_q)$ по теореме 3.3.1, дискретизацию и оценки снизу поперечников пересечения конечномерных шаров по теореме 3.1.5, найдем поперечники пересечения функциональных классов.

Теорема 3.3.2. [1990*b*] *Пусть* $W^{\Omega}(\mathbb{T}^1) = \bigcap\limits_{(\frac{1}{p},r)\in\Omega} W_p^r(\mathbb{T}^1)$, $\Omega = \left\{\left(\frac{1}{p^i}, r^i\right) \subset (0,\,1)\times\mathbb{R} \mid i = 1,\ldots,m\right\}$, $G = \operatorname{co}\Omega + \operatorname{cone}\{(-1,-1),(1,0)\}$, $\gamma(\xi) = \sup\limits_{(\xi,r)\in G} r$. *Тогда*

$$d_N(W^{\Omega}(\mathbb{T}^1), L_q) \asymp \begin{cases} N^{-\gamma(\frac{1}{q})}, & \gamma\big(\frac{1}{q}\big) > 0,\ 1 \le q \le 2,\\ N^{-\gamma(\frac{1}{2})}, & \gamma\big(\frac{1}{2}\big) > \frac{1}{2},\ 2 < q \le \infty. \end{cases}$$

Доказательство. Оценки сверху. Оценка при $1 \le q \le 0$ следует из вложения $W^{\Omega} \subset\subset W_q^{\gamma(\frac{1}{q})}$ по теореме 1.3.5 (заметим, что это вложение остается справедливым и при $q = 1$, как видно из доказательства теоремы 1.3.5 при $d = 1$) и оценки поперечника $d_N(W_q^{\gamma(\frac{1}{q})}, L_q)$ при $1 \le q \le 2$ по теореме 3.3.1

$$d_N(W^{\Omega}, L_q) \ll d_N(W_q^{\gamma(\frac{1}{q})}, L_q) \asymp N^{-\gamma(\frac{1}{q})}.$$

Оценка сверху при $2 \le q \le \infty$ следует из вложения $W^{\Omega} \subset\subset W_2^{\gamma(\frac{1}{2})}$ по теореме 1.3.5 и оценки поперечника класса $W_2^{\gamma(\frac{1}{2})}$ в пространстве L_q при $\gamma\big(\frac{1}{2}\big) > \frac{1}{2}$ по теореме 3.3.1

$$d_N(W^{\Omega}, L_q) \le d_N(W_2^{\gamma(\frac{1}{2})}, L_q) \asymp N^{-\gamma(\frac{1}{2})}.$$

Оценка снизу. Рассмотрим случай $1 \le q \le 2$. Проведем через точку $\big(\frac{1}{q}, \gamma(\frac{1}{q})\big)$, лежащую на границе выпуклого замкнутого множества G, опорную к G прямую. Пусть $y = a + bx$ — уравнение этой прямой. Из построения множества G следует, что $0 \le b \le 1$. Тогда для любой точки $\big(\frac{1}{p}, r\big)$, лежащей ниже этой прямой (в том числе и для точек $\big(\frac{1}{p}, r\big) \in \Omega$) будет выполняться неравенство

$$r - \frac{b}{p} \le \gamma\Big(\frac{1}{q}\Big) - \frac{b}{q}. \tag{3.3.1}$$

Положим $\mathcal{T} = \operatorname{lin}\{e^{ikt},\ k = N+1,\ldots,3N\}$. По теореме 3.2.1 между функциями $x(\cdot) \in \mathcal{T}$ и пространством $\mathbb{R}^{2N}$ устанавливается изоморфизм, согласно которому и теореме Литтльвуда–Пэли

$$\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_p} \asymp N^r \|x(\cdot)\|_{L_p} \asymp N^{r-\frac{1}{p}} \|x\|_{l_p^{2N}}.$$

Поэтому

$$d_N(W^\Omega, L_q) \gg d_S(W^\Omega \cap \mathcal{T}, L_q \cap \mathcal{T}) \asymp d_N(B, l_q^{2N}),$$

где $B = \bigcap\limits_{(\frac{1}{p},r)\in\Omega} B_p^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$. Как и в теореме 3.1.3 обозначим $Q = \mathrm{co}\left\{\left(\frac{1}{p}, r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) \mid \left(\frac{1}{p}, r\right) \in \Omega\right\} + \mathrm{cone}\{(-1,0),(1,-1)\}$, $\Gamma(\xi) = \sup\limits_{(\xi,r)\in Q} r$. Тогда нетрудно видеть, что $\Gamma\left(\frac{1}{q}\right) = \gamma\left(\frac{1}{q}\right)$. По теореме 3.1.5

$$d_N(W^\Omega, L_q) \gg d_N(B, l_q^{2N}) \asymp N^{-\Gamma(\frac{1}{q})} \asymp N^{-\gamma(\frac{1}{q})}.$$

Если $2 \le q \le \infty$, то уже по доказанному

$$d_N(W^\Omega, L_q) \ge d_N(W^\Omega, L_2) \asymp N^{-\gamma(\frac{1}{2})}. \qquad \square$$

Приведем теорему, уточняющую для критического показателя оценки поперечников работы Е. Д. Куланина [1983].

Теорема 3.3.3 (о поперечнике по Колмогорову класса Соболева при критических гладкостях)**.** [1990*b*] *Имеют место соотношения:*

а) *при* $2 \le p < q < \infty$, $r = \beta := \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)/\left(1 - \frac{2}{q}\right)$

$$N^{-r} \ll d_N(W_p^r, L_q) \ll N^{-r}(\log N)^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}};$$

б) *при* $1 < p \le 2 < q < \infty$, $r = \frac{1}{p}$

$$N^{-\frac{1}{2}} \ll d_N(W_p^r, L_q) \ll N^{-\frac{1}{2}}(\log N)^{\frac{1}{2}}.$$

В работе Куланина степени логарифма равны соответственно $r+1$ и $\frac{3}{2}$.

Доказательство. Оценки сверху. а) Пусть $2 \le p < q < \infty$, $r = \frac{1}{p}$. Положим $N_s = \begin{cases} \min\left\{2^s, \left[\frac{N}{\mu}\right]\right\}, & s \le \mu, \\ 0, & s > \mu, \end{cases}$ где $\mu = \frac{q}{2}\log_2 N$. Тогда $\sum\limits_{s\in\mathbb{N}} N_s \le [\mu]\cdot\left[\frac{N}{\mu}\right] \ll N$.

Сводя оценку сверху поперечников функциональных классов к оценке сверху поперечников конечномерных множеств, и пользуясь равенством $\left(\alpha := r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \overset{r=\beta}{=} \beta - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \overset{\text{тождество}}{=} \frac{2\beta}{q}\right)$, получим

$$d_N(W_p^r, L_q) \overset{(3.2.5)}{\ll} \left(\sum_{s\in\mathbb{N}}\left(2^{-s\alpha} d_{N_s}\left(B_p^{2^s}, l_q^{2^s}\right)\right)^{\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \overset{(3.1.2)}{\asymp}$$

$$\left(\text{при } 2^s \le \left[\tfrac{N}{\mu}\right] \Leftrightarrow s \le \log_2\left[\tfrac{N}{\mu}\right] \quad N_s = 2^s \Rightarrow d_{N_s}\left(B_p^{2^s}, l_q^{2^s}\right) = 0\right)$$

$$\asymp \left(\sum_{\log_2\left[\frac{N}{\mu}\right] < s \le \mu}\left(2^{-s\alpha}2^{\frac{2s\beta}{q}}N_s^{-\beta}\right)^{\frac{2p}{p-2}} + \sum_{s>\mu}\left(2^{s\left(-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\right)^{\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \asymp$$

$\big(\alpha = \frac{2\beta}{q},\ -r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2\beta}{q} < 0\big)$

$$\asymp \left(\mu\Big(\Big(\frac{N}{\mu}\Big)^{-\beta}\Big)^{\frac{2p}{p-2}} + 2^{\mu(-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\mu^{1-\frac{2p\beta}{p-2}} N^{-\frac{2p\beta}{p-2}} + 2^{-\frac{2\mu\beta}{q}\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \asymp \left(\mu^{1+\frac{2p\beta}{p-2}} N^{-\frac{2p\beta}{p-2}} + N^{-\frac{2p\beta}{p-2}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \asymp$$

$$\asymp \mu^{\beta+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} N^{-\beta} \asymp N^{-r} \log^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} N.$$

$$\asymp N^{-r} \mu^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \asymp N^{-r} \log^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} N.$$

b) Оценка сверху при $p \le 2 < q$, $r = \frac{1}{p}$, вытекает из вложения $W_p^r \subset\subset W_2^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} = W_2^{\frac{1}{2}}$ по теореме 1.3.2 и уже найденной в п. a) оценки сверху для $d_N(W_2^{\frac{1}{2}}, L_q)$:

$$d_N(W_p^r, L_q) \ll d_N(W_2^{\frac{1}{2}}, L_q) \ll N^{-\frac{1}{2}} (\log_2 N)^{\frac{1}{2}}.$$

Оценка снизу следует из неравенства (1.3.1) и известной оценки снизу для согласованных норм:

$$d_N(W_p^r, L_q) \ge d_N(W_p^r, L_p) \asymp N^{-r}. \qquad \square$$

3.4 Поперечники классов функций нескольких переменных

В этом пункте находятся поперечники по Колмогорову классов периодических функций нескольких переменных $W_p^r(\mathbb{T}^d)$ и $H_p^r(\mathbb{T}^d)$ в пространстве $L_q(\mathbb{T}^d)$ при $1 < p, q < \infty$.

Исследования поперечников классов периодических функций нескольких переменных начаты К. И. Бабенко [1960] a,b] и продолжены в работах Б. С. Митягина [1962], С. А. Теляковского, Я. С. Бугрова, Н. С. Никольской, Э. М. Галеева, Динь Зунга, В. Н. Темлякова и других.

Теорема 3.4.1 (о поперечнике по Колмогорову класса Соболева)**.** *Пусть* $r \in \mathbb{R}^d$, $r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \le \ldots \le r_d$, $2 < p, q < \infty$. *Тогда*

$$d_N(W^r_p(\mathbb{T}^d), L_q) \asymp \begin{cases} \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1}, & q \le p,\ r_1 > 0; \quad \text{(a)} \\ \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}, & p \le q \le 2,\ r_1 > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}; \quad \text{(b)} \\ \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}}, & p \le 2 < q,\ r_1 > \dfrac{1}{p}; \quad \text{(c)} \\ \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1}, & 2 \le p < q,\ r_1 > \dfrac{1}{2}; \quad \text{(d)} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \ll d_N(W^r_p, L_q) \ll \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{\frac{l}{2} - \frac{l}{p}} N,$$
$$2 \le p < q,\ \beta := \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \Big/ \left(1 - \frac{2}{q}\right) < r_1 < \frac{1}{2}. \quad \text{(d}')$$

Доказательство. Оценки сверху. Обозначим $\alpha := r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$. В случаях (a)–(b) оценки сверху следуют из приближения класса $W^r_p(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q оператором Фурье $S_N := S^\alpha_\mu$, содержащем порядка N гармоник из ступенчатого гиперболического креста при $\mu^l 2^{\frac{\mu}{\alpha_1}} = N$ по теореме 2.2.7:

$$d_N(W^r_p, L_q) \ll d(W^r_p, S_N, L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\alpha_1}.$$

c) Пусть $p \le 2 < q$, $r_1 > \frac{1}{p}$. Для $s \in \mathbb{N}^d$ положим $N_s = \begin{cases} 2^{\langle s,1\rangle}, & \langle s,r\rangle \le \mu, \\ \min\left\{2^{\langle s,1\rangle}, \left[2^{\frac{\mu}{r_1}(1+\varepsilon\alpha_1)-\varepsilon\langle s,\alpha\rangle}\right]\right\}, & \langle s,r\rangle > \mu, \end{cases}$ где величина μ выбирается из условия $\mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N$, константа $\varepsilon > 0$ достаточно мала. Тогда

$$\sum_{s\in\mathbb{N}^d} N_s \le \sum_{\langle s,r\rangle\le\mu} 2^{\langle s,1\rangle} + \sum_{\langle s,r\rangle>\mu} 2^{\frac{\mu}{r_1}(1+\varepsilon\alpha_1)-\varepsilon\langle s,\alpha\rangle} \overset{(4.1.3),(4.1.4)}{\asymp}$$

$\Big($поскольку $\frac{1}{r_1} = \ldots = \frac{1}{r_{l+1}} > \frac{1}{r_{l+1}} \ge \ldots \ge \frac{1}{r_d}$ и для $\frac{\alpha_i}{r_i} = \frac{r_i - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{r_i} = 1 - \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}{r_i}$ выполняется соотношение $\frac{\alpha_1}{r_1} = \ldots = \frac{\alpha_{l+1}}{r_{l+1}} < \frac{\alpha_{l+2}}{r_{l+2}} \le \ldots \le \frac{\alpha_d}{r_d}\Big)$

$$\asymp \mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} + 2^{\frac{\mu}{r_1}(1+\varepsilon\alpha_1)} \mu^l 2^{-\frac{\mu}{r_1}\varepsilon\alpha_1} \asymp \mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N.$$

Подставляя оценки конечномерных поперечников по теореме 3.1.4 в формулу (3.2.6), оценки сверху поперечников классов W^r_p, получим

$$d_N(W^r_p, L_q) \ll \sup_{s\in\mathbb{N}^d} 2^{\langle s,-\alpha\rangle} d_{N_s}(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}}) \asymp$$

$$\asymp \sup_{\langle s,r\rangle>\mu} 2^{\langle s,-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\rangle} 2^{\langle s,\frac{1}{q}\rangle} N_s^{-\frac{1}{2}} \le \sup_{\langle s,r\rangle>\mu} 2^{\langle s,-r+\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon\alpha}{2}\rangle - \frac{\mu}{r_1}(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon\alpha_1}{2})} \le$$

$\Big($поскольку $r - \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon\alpha}{2} > 0$ и для $\frac{r_i - \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon\alpha_i}{2}}{r_i} = 1 - \frac{\frac{1}{p} + \frac{\varepsilon\alpha_i}{2}}{r_i}$ выполняется $\frac{r_1 - \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon\alpha_1}{2}}{r_1} = \ldots = \frac{r_{l+1} - \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon\alpha_{l+1}}{2}}{r_{l+1}} < \frac{r_{l+2} - \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon\alpha_{l+2}}{2}}{r_{l+2}} \le \ldots \le \frac{r_d - \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon\alpha_d}{2}}{r_d}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0\Big)$

$$\le 2^{\frac{\mu}{r_1}(-r_1+\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}) - \frac{\mu}{r_1}(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon\alpha_1}{2})} = 2^{\frac{\mu}{r_1}(-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}.$$

d) Пусть $2 \le p < q$, $r_1 > \frac{1}{2}$. Оценка сверху вытекает из вложения $W^r_p \subset W^r_2$ по теореме 1.3.1 и оценки сверху в п. (b) при $p = 2$ и $r_1 > \frac{1}{2}$:

$$d_N(W^r_p, L_q) \le d_N(W^r_2, L_q) \ll \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1}.$$

d′) Пусть $2 \le p < q$, $\beta < r_1 < \frac{1}{2}$. Положим

$N_s = \begin{cases} 2^{\langle s,1\rangle}, & \langle s,r\rangle \le \mu, \\ \min\left\{\left[2^{\varepsilon(\frac{\mu}{r_1}-\langle s,1\rangle)+\frac{\mu}{r_1}}\right]\right\}, & \langle s,r\rangle > \mu, \end{cases}$ где величина μ выбирается из условия $\mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N$, а константа $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\sum_{s\in\mathbb{N}^d} N_s = \sum_{\langle s,r\rangle\le\mu} N_s + \sum_{\langle s,r\rangle>\mu} N_s \le$$

$$\le \sum_{\langle s,r\rangle\le\mu} 2^{\langle s,1\rangle} + \sum_{\langle s,r\rangle>\mu} 2^{\varepsilon(\frac{\alpha_1\mu}{r_1}-\langle s,\alpha\rangle)+\frac{\mu}{r_1}} \overset{(4.1.3),(4.1.4)}{\asymp} \mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N$$

$\Big($поскольку $\frac{1}{r_1} = \ldots = \frac{1}{r_{l+1}} > \frac{1}{r_{l+2}} \ge \ldots \ge \frac{1}{r_d}$, $\alpha > 0 \Leftrightarrow r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 0$ $\Leftrightarrow r > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ — верно, т. к. $r > \beta = \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{1-\frac{2}{q}} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$
и для $\frac{\alpha_i}{r_i} = \frac{r_i - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{r_i} = 1 - \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{r_i}$ выполняется соотношение
$\frac{\alpha_1}{r_1} = \ldots = \frac{\alpha_{l+1}}{r_{l+1}} < \frac{\alpha_{l+2}}{r_{l+2}} \le \ldots \le \frac{\alpha_d}{r_d}\Big)$.

Подставляя оценки конечномерных поперечников по теореме 3.1.4 в формулу (3.2.5) и проводя суммирование, получим

$$d_N(W^r_p, L_q) \overset{(3.2.5)}{\ll} \left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d}\left(2^{\langle s,-\alpha\rangle} d_{N_s}(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}})\right)^{\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{\langle s,r\rangle>\mu}\left(2^{\langle s,-\alpha\rangle} 2^{\langle s,\frac{2\beta}{q}\rangle} N_s^{-\beta}\right)^{\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{\langle s,r\rangle>\mu}\left(2^{\langle s,-\alpha+\frac{2\beta}{q}+\beta\varepsilon\rangle-\frac{\beta\mu\varepsilon}{r_1}-\frac{\beta\mu}{r_1}}\right)^{\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \asymp$$

$\big($поскольку $-\alpha + \frac{2\beta}{q} + \beta\varepsilon = -r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta}{q} + \beta\varepsilon = -r + \beta + \beta\varepsilon$ в силу тождества $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta}{q} = \beta\big)$

$$\asymp \left(\sum_{\langle s,r\rangle>\mu}\left(2^{\langle s,-r+\beta+\beta\varepsilon\rangle-\frac{\beta\mu\varepsilon}{r_1}-\frac{\beta\mu}{r_1}}\right)^{\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \overset{(4.1.4)}{\asymp}$$

$\big($поскольку $r-\beta-\beta\varepsilon>0$ при $0<\varepsilon<\frac{r-\beta}{\beta}$ и для $\frac{r_1-\beta-\beta\varepsilon}{r_1}=\ldots=\frac{r_{l+1}-\beta-\beta\varepsilon}{r_{l+1}}<\frac{r_{l+2}-\beta-\beta\varepsilon}{r_{l+2}}\leq\ldots\leq\frac{r_d-\beta-\beta\varepsilon}{r_d}\big)$

$$\asymp\left(\mu^l\Big(2^{\frac{\mu}{r_1}(-r_1+\beta+\beta\varepsilon)-\frac{\beta\mu\varepsilon}{r_1}-\frac{\beta\mu}{r_1}}\Big)^{\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\asymp$$

$$\asymp\Big(\mu^l 2^{-\mu\frac{2p}{p-2}}\Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\asymp\left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\log^{\frac{l}{2}-\frac{l}{p}}N.$$

d$'$) Пусть $2 \le p < q$, $\beta < r_1 < \frac{1}{2}$. Положим $N_s = \begin{cases} \min\left\{2^{\langle s,1\rangle}, \left[2^{\varepsilon(\langle s,1\rangle - \frac{\mu}{r_1}) + \frac{\mu}{r_1}}\right]\right\}, & \langle s,r\rangle \le \mu, \\ 0, & \langle s,r\rangle > \mu, \end{cases}$ где величина μ выбирается из условия $\mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N$, а константа $\varepsilon > 0$ достаточно мала. Тогда

$$\sum_{s\in\mathbb{N}^d} N_s = \sum_{\langle s,r\rangle\le\mu} N_s \le \sum_{\langle s,r\rangle\le\mu} 2^{\varepsilon(\langle s,1\rangle - \frac{\mu}{r_1}) + \frac{\mu}{r_1}} \overset{(4.1.3)}{\asymp} \mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N,$$

поскольку $\frac{1}{r_1} = \ldots = \frac{1}{r_{l+1}} > \frac{1}{r_{l+2}} \ge \ldots \ge \frac{1}{r_d}$.

Подставляя оценки конечномерных поперечников по теореме 3.1.4 в формулу (3.2.5) и проводя суммирование, получим

$$d_N(W_p^r, L_q) \overset{(3.2.5)}{\ll} \left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d}\left(2^{\langle s,-\alpha\rangle} d_{N_s}(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}})\right)^{\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{\langle s,r\rangle\le\mu}\left(2^{\langle s,-\alpha\rangle} 2^{\langle s,\frac{2\beta}{q}\rangle} N_s^{-\beta}\right)^{\frac{2p}{p-2}} + \sum_{\langle s,r\rangle>\mu}\left(2^{\langle s,-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\rangle}\right)^{\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{\langle s,r\rangle\le\mu}\left(2^{\langle s,-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{2\beta}{q}-\beta\varepsilon\rangle + \frac{\beta\mu\varepsilon}{r_1} - \frac{\beta\mu}{r_1}}\right)^{\frac{2p}{p-2}} + \mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}(-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \asymp$$

(поскольку $-r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta}{q} - \beta\varepsilon = -r + \beta - \beta\varepsilon$ в силу тождества $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta}{q} = \beta$; $\frac{-r_1+\beta-\beta\varepsilon}{r_1} = \ldots = \frac{-r_{l+1}+\beta-\beta\varepsilon}{r_{l+1}} > \frac{-r_{l+2}+\beta-\beta\varepsilon}{r_{l+2}} \ge \ldots \ge \frac{-r_d+\beta-\beta\varepsilon}{r_d}$ и $-r_1 + \beta - \beta\varepsilon > 0$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$)

$$\asymp \left(\mu^l\left(2^{\frac{\mu}{r_1}(-r_1+\beta-\beta\varepsilon) + \frac{\beta\mu\varepsilon}{r_1} - \frac{\beta\mu}{r_1}}\right)^{\frac{2p}{p-2}} + \mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}(-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \asymp$$

$$\asymp \left(\mu^l 2^{-\mu\frac{2p}{p-2}}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \log^{\frac{l}{2}-\frac{l}{p}} N.$$

Оценки снизу. а) Пусть $q \le p$, $r_1 > 0$. В силу неравенства $\|\cdot\|_q \ge \|\cdot\|_\lambda$ при $q \ge \lambda$ и вложения $W^r_p \supset W^r_\nu$ при $\nu \ge p$ по теореме 1.3.1 оценку снизу достаточно доказать для $1 < q \le 2 \le p < \infty$:

$$d_N(W^r_p, L_q) \ge d_N(W^r_p, L_\lambda) \ge d_N(W^r_\nu, L_\lambda).$$

Обозначим $S = \{s = (s_1, \ldots, s_{l+1}, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d \mid \langle s, 1\rangle = m\}$, $K = \bigcup\limits_{s \in S} \square_s$. Тогда $|S| \asymp m^l$, $|K| = \sum\limits_{s\in S} |\square_s| = \sum\limits_{s\in S} 2^{\langle s,1\rangle} = |S|2^m \asymp m^l 2^m$. Величина $m \in \mathbb{N}$ выбирается таким образом, чтобы число гармоник во множестве K было порядка N и не менее $2N$, т. е. $|K| \ge C_1 m^l 2^m \ge 2N$. Поэтому $N \asymp m^l 2^m$.

По формуле (3.2.10) ($p^* := \min\{p, 2\} = 2$, $q^{**} := \max\{q, 2\} = 2$)

$$d_N(W^r_p, L_q) \gg 2^{-m(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} d_N\bigl(B^{2^m, m^l}_{p,p^*}, l^{2^m, m^l}_{q,q^{**}}\bigr) = \\ = 2^{-m(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} d_N\bigl(B^{2^m, m^l}_{p,2}, l^{2^m, m^l}_{q,2}\bigr). \quad (3.4.1)$$

Поскольку по неравенству 1.1.6 (для средних)
$\|\cdot\|_{l_2^{|S|}} \ge |S|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \|\cdot\|_{l_q^{|S|}}$ при $q \le 2$, а $B_2^{|S|} \supset |S|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} B_p^{|S|}$ при $p \ge 2$, то

$$d_N\bigl(B^{2^m, |S|}_{p,2}, l^{2^m, |S|}_{q,2}\bigr) \ge |S|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} d_N\bigl(B^{2^m, |S|}_{p,2}, l^{2^m |S|}_{q}\bigr) \ge \\ \ge |S|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |S|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} d_N\bigl(B^{2^m |S|}_{p}, l^{2^m |S|}_{q}\bigr) = |S|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} d_N(B^{|K|}_p, l^{|K|}_q),$$

и в силу теоремы 3.1.3

$$d_N(B^{2^m, |S|}_{p,2}, l^{2^m, |S|}_{q,1}) \ge |S|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} (|K| - N)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \asymp \\ \asymp |S|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} N^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \asymp (m^l)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} (m^l 2^m)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} = 2^{m(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})}.$$

Подставляя полученную оценку поперечника конечномерного множества в (3.4.1), приходим к искомой оценке снизу поперечника функционального класса:

$$d_N(W^r_p, L_q) \gg 2^{m(-r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} 2^{m(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} = 2^{-mr_1} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1}.$$

b) Пусть $p \le q \le 2$, $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Возьмем множество S то же самое, что и в пункте a). По формуле (3.2.10) ($p^* := \min\{p, 2\} = p$, $q^{**} := \max\{q, 2\} = 2$)

$$d_N(W^r_p, L_q) \gg 2^{-m(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} d_N\big(B^{2^m, m^l}_{p,p^*}, l^{2^m, m^l}_{q,q^{**}}\big) = \\ = 2^{-m(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} d_N\big(B^{|K|}_p, l^{2^m, |S|}_{q,2}\big). \quad (3.4.2)$$

В силу вложения $B^{|K|}_p \supset B^{|K|}_1$ при $p \ge 1$ имеем

$$d_N\big(B^{|K|}_p, l^{2^m, |S|}_{q,2}\big) \ge d_N\big(B^{|K|}_1, l^{2^m, |S|}_{q,2}\big) \overset{(1.4.2)}{\ge} d_N\big(B^{|K|}_1, l^{|K|}_2\big) \overset{(?)}{\asymp} 1.$$

Подставляя полученную оценку поперечника конечномерного множества в (3.4.2), приходим к искомой оценке снизу поперечника функционального класса:

$$d_N(W^r_p, L_q) \gg 2^{-m(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}.$$

c) Пусть $p \le 2 < q$, $r_1 > \frac{1}{p}$. В этом случае оценка снизу в силу неравенства $\|\cdot\|_q \overset{(1.3.4)}{\ge} \|\cdot\|_2$ сводится к уже доказанной в пункте b) оценке снизу при $q = 2$:

$$d_N(W^r_p, L_q) \gg d_N(W^r_p, L_2) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}}.$$

d–d$'$) Пусть $2 \le p < q$, $r_1 > \beta$. В этом случае оценка снизу в силу вложения $W^r_p \supset W^r_q$ сводится к уже доказанной в пункте a) оценке снизу при $p = q$:

$$d_N(W^r_p, L_q) \ge d_N(W^r_q, L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1}. \qquad \square$$

Теорема 3.4.1 при $2 \le q \le p$ содержится в работе автора [1977], $q = p$ [1978]; Темлякова $p < q \le 2$ [1980a]; $p < q$, $q \ge 2$ [1982].

Теорема 3.4.2 (о поперечнике по Колмогорову класса Гельдера–Никольского)**.** *Пусть* $r \in \mathbb{R}^d$, $r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \leq \ldots \leq r_d$, $H_p^u = H_p^r(\mathbb{T}^d)$, $1 < p, q < \infty$, $\beta := \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) / \left(1 - \frac{2}{q}\right)$. *Тогда*

$$d_N(H_p^r, L_q) \asymp \begin{cases} \log^{\frac{l}{2}} N \left(\dfrac{\log^l N}{N} \right)^{r_1}, & p \geq \max\{q, 2\},\ r_1 > 0; \quad \text{(a)} \\ \log^{\frac{l}{q}} N \left(\dfrac{\log^l N}{N} \right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}, & p \leq q \leq 2,\ r_1 > \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}; \quad \text{(b)} \\ \log^{\frac{l}{2}} N \left(\dfrac{\log^l N}{N} \right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}}, & p \leq 2 < q,\ r_1 > \dfrac{1}{p}; \quad \text{(c)} \\ \log^{\frac{l}{2}} N \left(\dfrac{\log^l N}{N} \right)^{r_1}, & 2 \leq p < q,\ r_1 > \beta. \quad \text{(d)} \end{cases}$$

Доказательство. Оценки сверху. В случаях a)–b) оценки сверху следуют из приближения класса $H_p^r(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q оператором Фурье $S_N := S_\mu^{r'}$, содержащем порядка N гармоник из расширенного ступенчатого гиперболического креста при $\mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N$ по теореме 2.2.5:

$$d_N(H_p^r, L_q) \ll d(H_p^r, S_N, L_q) \asymp \begin{cases} \left(\dfrac{\log^l N}{N} \right)^{r_1} \log^{\frac{l}{2}} N, & p \geq \max\{q, 2\}, \\ \left(\dfrac{\log^l N}{N} \right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \log^{\frac{l}{q}} N, & p \leq q \leq 2. \end{cases}$$

c) При $p \leq 2 < q$, $r_1 > \frac{1}{p}$, оценка сверху сводится к случаю d) при $p = 2$ в силу вложения $H_p^r \subset\subset H_2^{r - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}}$ $\left(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} > \beta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow r_1 > \frac{1}{p}\right)$:

$$d_N(H_p^r, L_q) \ll d_N(H_2^{r - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}}, L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}} \log^{\frac{l}{2}} N.$$

d) Пусть $2 \le p < q$, $r_1 > \beta$. Доказательство оценки сверху проводится в этом случае как и в теореме 3.4.1.

Положим $N_s = \begin{cases} 2^{\langle s,r\rangle}, \langle s,r\rangle \le \mu, \\ \min\left\{2^{\langle s,r\rangle}, \left[2^{\frac{\mu}{r_1}(1+\varepsilon\alpha_1)-\varepsilon\langle s,\alpha\rangle}\right]\right\}, \langle s,r\rangle > \mu, \end{cases}$

где $\alpha := r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, величина μ выбирается из условия $\mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N$, а константа $\varepsilon > 0$ достаточно мала. Тогда (см. доказательство п. с) теоремы 3.4.1) $\sum\limits_{s\in\mathbb{N}^d} N_s \le N$.

Подставляя оценки конечномерных поперечников по теореме 3.1.4 в формулу (3.2.4) ($q^* = 2$), получим

$$d_N(H_p^r, L_q) \ll \left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d}\left(2^{\langle s,-\alpha\rangle} d_{N_s}(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}})\right)^{q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\langle s,r\rangle>\mu}\left(2^{\langle s,-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\rangle} 2^{\langle s,\frac{2\beta}{q}\rangle} N_s^{-\beta}\right)^2\right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{\langle s,r\rangle>\mu}\left(2^{\langle s,-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{2\beta}{q}+\beta\varepsilon\alpha\rangle-\frac{\mu}{r_1}(\beta+\beta\varepsilon\alpha_1)}\right)^2\right)^{1/2} =$$

(в силу тождества $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta}{q} = \beta$, которое проверяется непосредственно вычислением)

$$= \left(\sum_{\langle s,r\rangle>\mu}\left(2^{\langle s,-r+\beta+\beta\varepsilon\alpha\rangle-\frac{\mu}{r_1}(\beta+\beta\varepsilon\alpha_1)}\right)^2\right)^{1/2} \overset{(4.1.4)}{\asymp}$$

(поскольку $r - \beta - \beta\varepsilon\alpha > 0$ и $\frac{r_1-\beta-\beta\varepsilon\alpha_1}{r_1} = \ldots = \frac{r_{l+1}-\beta-\beta\varepsilon\alpha_{l+1}}{r_{l+1}} < \frac{r_{l+2}-\beta-\beta\varepsilon\alpha_{l+2}}{r_{l+2}} \le \ldots \le \frac{r_d-\beta-\beta\varepsilon\alpha_d}{r_d}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$)

$$\asymp \left(\mu^l\left(2^{\frac{\mu}{r_1}(-r_1+\beta+\beta\varepsilon\alpha)-\frac{\mu}{r_1}(\beta+\beta\varepsilon\alpha_1)}\right)^2\right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp \left(\mu^l(2^{-\mu})^2\right)^{1/2} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{\frac{l}{2}} N.$$

Оценки снизу. а) Пусть $q \le p$, $r_1 > 0$. В силу неравенства $\|\cdot\|_q \ge \|\cdot\|_\lambda$ при $q \ge \lambda$ и вложения $H_p^r \supset W_\nu^r$ при $\nu \ge p$ по теореме 1.3.1 оценку снизу достаточно доказать для $1 < q \le 2 \le p < \infty$:

$$d_N(H_p^r, L_q) \ge d_N(H_p^r, L_\lambda) \ge d_N(H_\nu^r, L_\lambda).$$

Обозначим $S = \{s = (s_1, \dots, s_{l+1}, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d \mid \langle s, 1\rangle = m\}$, $K = \bigcup\limits_{s\in S} \square_s$. Тогда $|S| \asymp m^l$, $|K| = \sum\limits_{s\in S} |\square_s| = \sum\limits_{s\in S} 2^{\langle s,1\rangle} = |S|2^m \asymp m^l 2^m$. Величина $m \in \mathbb{N}$ выбирается таким образом, чтобы число гармоник во множестве K было порядка N и не менее $2N$, т. е. $|K| \ge C_1 m^l 2^m \ge 2N$. Поэтому $N \asymp m^l 2^m$. По формуле (3.2.8) ($\theta = \infty$, $q^{**} := \max\{q, 2\} = 2$)

$$d_N(H_p^r, L_q) \gg 2^{-mr_1 + \frac{m}{p} - \frac{m}{q}} d_N(B_{p,\infty}^{2^m,|S|}, l_{q,2}^{2^m,|S|}). \tag{3.4.3}$$

Поскольку по неравенству 1.1.6 (для средних) $\|\cdot\|_{l_2^{|S|}} \ge |S|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \|\cdot\|_{l_q^{|S|}}$ при $q \le 2$, а $\|x\|_{l_p^{2^m}} \le 2^{\frac{m}{p}} \|x\|_{l_\infty^{2^m}}$ то $B_p^{2^m} \supset 2^{-\frac{m}{p}} B_\infty^{2^m}$ и, значит, $B_{p,\infty}^{2^m,|S|} \supset 2^{-\frac{m}{p}} B_\infty^{2^m|S|} = 2^{-\frac{m}{p}} B_\infty^{|K|}$. Отсюда имеем в силу теоремы 3.1.3:

$$\begin{aligned} d_N(B_{p,\infty}^{2^m,|S|}, l_{q,2}^{2^m,|S|}) &\ge |S|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} 2^{-\frac{m}{p}} d_N(B_\infty^{|K|}, l_q^{|K|}) = \\ &= |S|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} 2^{-\frac{m}{p}} (|K| - N)^{\frac{1}{q}} = |S|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} 2^{-\frac{m}{p}} |S|^{\frac{1}{q}} 2^{\frac{m}{q}} = |S|^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{m}{q}-\frac{m}{p}}. \end{aligned}$$

Подставляя полученную оценку поперечника конечномерного множества в (3.4.3), приходим к оценке снизу поперечника функционального класса:

$$\begin{aligned} d_N(H_p^r, L_q) &\gg 2^{m(-r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} |S|^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{m}{q}-\frac{m}{p}} = |S|^{\frac{1}{2}} 2^{-mr_1} \asymp \\ &\asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{\frac{l}{2}} N. \end{aligned}$$

b) Пусть $p \le q \le 2$, $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Пользуясь обозначениями п. a) аналогично имеем по формуле (3.2.9) и вложению $B^{2^m,|S|}_{p,\infty} \supset B^{2^m,|S|}_{1,\infty}$

$$d_N(H^r_p, L_q) \gg 2^{m(-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} d_N(B^{2^m,|S|}_{p,\infty}, l^{2^m,|S|}_{2,q}) \ge \\ \ge 2^{m(-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} d_N(B^{2^m,|S|}_{1,\infty}, l^{2^m,|S|}_{2,q}).$$

Подставляя оценку поперечника множества $B^{2^m,|S|}_{1,\infty}$ по теореме 3.1.9, получим

$$d_N(H^r_p, L_q) \gg 2^{m(-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} |S|^{\frac{1}{q}} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \log^{\frac{l}{q}} N.$$

c) Пусть $p \le 2 < q$, $r_1 > \frac{1}{p}$. В этом случае оценка снизу в силу неравенства $\|\cdot\|_q \overset{(1.3.1)}{\ge} \|\cdot\|_2$ при $q \ge 2$ сводится к уже доказанной в пункте b) оценке снизу при $q = 2$:

$$d_N(H^r_p, L_q) \overset{(1.3.1)}{\ge} d_N(H^r_p, L_2) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} \log^{\frac{l}{2}} N.$$

d) Пусть $2 \le p < q$, $r_1 > \beta$. В этом случае оценка снизу в силу вложения $H^r_p \supset H^r_q$ сводится к уже доказанной в пункте a) оценки снизу при $p = q$:

$$d_N(H^r_p, L_q) \ge d_N(H^r_q, L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{\frac{l}{2}} N. \qquad \square$$

Определение порядков колмогоровских поперечников $d_N(W^r_p(\mathbb{T}^d), L_q)$ при $1 < q \le p < \infty$ и $d_N(H^r_p(\mathbb{T}^d), L_q)$ при $1 < q \le 2 \le p < \infty$ в работах автора позволило для классов $W^r_p(\mathbb{T}^d)$ (вместе с работами Темлякова для $q \ge p$) завершить определение порядков $d_N(W^r_p(\mathbb{T}^d), L_q)$ при всех $2 < p, q < \infty$. Величина же $d_N(H^r_p(\mathbb{T}^d), L_q)$ остается неизвестной при $1 < q < p < 2$.

Теорема 3.4.2 при $p = q \le 2$ содержится в работе Темлякова [1988a] (там же содержится оценка снизу при $p = \infty$, $q = 2$, что является основной частью при вычислении поперечника в случае $2 \le q \le p$); $p \le q$, $q \ge 2$ — [1982], [1985a]; Динь Зунг $2 \le q \le p$ [1983], [1984a]; автора — $q < 2 \le p$ [1984a]–[1984d], [1985a]; $2 \le p \le q$, $\beta < r_1 \le \frac{1}{2}$ [1985a]; $p \le q \le 2$ [1990b].

Теоремы 3.4.1–3.4.2 в следующем пункте обобщаются на случай поперечников по Колмогорову классов периодических функций нескольких переменных $W^A_p(\mathbb{T}^d)$ и $H^A_p(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q с использованием техники обобщения на пересечение классов.

3.5 Поперечники пересечения классов функций нескольких переменных

В этом пункте определяются порядки поперечников по Колмогорову классов периодических функций нескольких переменных $W_p^A(\mathbb{T}^d)$ и $H_p^A(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q.

Теорема 3.5.1 (о поперечнике по Колмогорову класса $W_p^A(\mathbb{T}^d)$ [1985a]). *Пусть* $W_p^A(\mathbb{T}^d) = \bigcap\limits_{r\in A} W_p^r(\mathbb{T}^d)$, $A = \{r^i \subset \mathbb{R}^d \mid i = 1,\dots,m\}$, $1 < p, q < \infty$, $\operatorname{conv} A \cap \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^d_+ \neq \emptyset$. *Тогда*

$$d_N(W_p^A(\mathbb{T}^d), L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{1}{M}},$$

где M — решение, а l — размерность аффинной оболочки множества решений задачи:

$$\langle s, 1\rangle \to \sup; \quad \langle s, b\rangle \le 1 \quad \forall\ b \in B, \quad s \in \mathbb{R}^d_+,$$

$$B = \begin{cases} A, & q \le p;\ 2 \le p < q,\ \frac{1}{M} > \frac{1}{2}; \\ A - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, & p \le q \le 2; \\ A - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}, & p \le 2 \le q,\ \frac{1}{M} > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Теорема 3.5.2 (о поперечнике по Колмогорову класса $H_p^A(\mathbb{T}^d)$). *Пусть* $H_p^A(\mathbb{T}^d) = \bigcap\limits_{r\in A} H_p^r(\mathbb{T}^d)$, $A = \{r^i \subset \mathbb{R}^d \mid i = 1,\dots,m\}$, $1 < p, q < \infty$, $\operatorname{conv} A \cap \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^d_+ \neq \emptyset$, $\beta = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)/\left(1 - \frac{2}{q}\right)$. *Тогда*

$$d_N(H_p^A(\mathbb{T}^d), L_q) \asymp \log^{\frac{l}{a}} N \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{1}{M}},$$

где M — решение, а l — размерность аффинной оболочки множества решений задачи:

$$\langle s, 1\rangle \to \sup; \quad \langle s, b\rangle \le 1 \quad \forall\ b \in B, \quad s \in \mathbb{R}^d_+,$$

$$B = \begin{cases} A, & q \le p;\ p \ge 2,\ a = 2; \\ A, & 2 \le p \le q,\ \frac{1}{M} > \beta,\ p, q \in \mathbb{R},\ a = 2; \\ A - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, & p \le q \le 2,\ \frac{1}{M} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q},\ p, q \in \mathbb{R},\ a = q; \\ A - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}, & p \le 2 < q,\ \frac{1}{M} > \frac{1}{p},\ p \in \mathbb{R},\ a = 2. \end{cases}$$

Теоремы 3.5.1–3.5.2 доказываются как и теоремы 3.4.1–3.4.2 с использованием техники обобщения на пересечение классов.

Теорема 3.5.2 при $p \le q = 2$ и при $2 \le q \le p$ содержится в работах Динь Зунга [1983], [1984a]; и автора при $q < 2 \le p$ [1984d], [1985a]; при $q \le p < 2$ [1990b].

3.6 Поперечники классов функций нескольких переменных при малых гладкостях

В этом пункте даются двусторонние оценки колмогоровских поперечников классов периодических функций нескольких переменных W^r_p и H^r_p в пространстве L_q при малых гладкостях.

Кашину [1981] принадлежит открытие изменения асимптотики поперечника при малых гладкостях. В его работах и в работах его ученика Е. Д. Куланина [1983] исследуются поперечники при малых гладкостях.

Теорема 3.6.1 (о поперечнике по Колмогорову класса Соболева при малых гладкостях)**.** *Пусть* $r \in \mathbb{R}^d$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \le \ldots \le r_d$, $1 < p, q < \infty$, $\beta := \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)/\left(1 - \frac{2}{q}\right)$, $W^r_p = W^r_p(\mathbb{T}^d)$. *Тогда*

$$\left(\frac{\log^{\frac{2l}{q}} N}{N}\right)^{\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} \ll d_N(W^r_p, L_q) \ll$$

$$\ll \begin{cases} \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} \log^{\frac{l}{2} - \frac{l}{p}} N, & 2 \le p < q,\ r_1 < \beta, \\ \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}, & p \le 2 < q,\ r_1 < \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Доказательство. Оценки сверху. Пусть $2 \le p < q$, $r_1 < \beta$. Положим $N_s = \begin{cases} \min\left\{2^{\langle s,1\rangle}, \left[2^{\varepsilon(\langle s,1\rangle - \frac{\mu}{r_1}) + \frac{2\mu}{qr_1}}\right]\right\}, & \langle s, r\rangle \le \mu, \\ 0, & \langle s, r\rangle > \mu, \end{cases}$ где величина μ выбирается из условия $\mu^l 2^{\frac{2\mu}{qr_1}} = N$, а константа $\varepsilon > 0$ достаточно мала. Тогда

$$\sum_{s \in \mathbb{N}^d} N_s = \sum_{\langle s,r\rangle \le \mu} N_s \le \sum_{\langle s,r\rangle \le \mu} 2^{\varepsilon(\langle s,1\rangle - \frac{\mu}{r_1}) + \frac{2\mu}{qr_1}} \overset{(4.1.3)}{\asymp} \mu^l 2^{\frac{2\mu}{qr_1}} = N,$$

поскольку $\frac{1}{r_1} = \ldots = \frac{1}{r_{l+1}} > \frac{1}{r_{l+2}} \ge \ldots \ge \frac{1}{r_d}$.

Возьмем оператор $P_N \colon L_q \to L_N$, действующий на функцию $x(\cdot) = \sum\limits_{s \in \mathbb{N}^d} \delta_s x(\cdot)$ по формуле $P_N x(\cdot) = \sum\limits_{s \in \mathbb{N}^d} P_{N_s} \delta_s x(\cdot)$, где P_{N_s} и

L_{N_s} — соответственно операторы и подпространства из леммы 3.2.1, $L_N = \bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}^d} L_{N_s}$.

A) Пусть $2 < p < q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 < \beta$. Рассмотрим функцию $\beta(x) = \frac{\frac{1}{p} - x}{1-2x}$ на отрезке $0 \le x \le \frac{1}{p}$. На этом промежутке функция $\beta(\cdot)$ непрерывна и монотонно убывает. Действительно, $\beta'(x) = \frac{-1+2x+\frac{2}{p}-2x}{(1-2x)^2} = \frac{\frac{2}{p}-1}{(1-2x)^2} < 0$ при $0 \le x \le \frac{1}{p}$.

По условию гладкости $r_1 < \beta \Leftrightarrow -r_1 + \beta > 0 \Leftrightarrow -r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta}{q} > 0$ $\big($мы использовали тождество $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta}{q} = \beta$, которое проверяется непосредственно вычислением$\big)$. Поскольку $r_1 < \beta = \beta\big(\frac{1}{q}\big)$, то можно выбрать точку $x = \frac{1}{z}$, для которой $\frac{1}{q} < \frac{1}{z} < \frac{1}{p}$ $(\Leftrightarrow p < z < q)$ и для $\beta_z = \beta\big(\frac{1}{z}\big)$, $r_1 < \beta_z < \beta$, по-прежнему выполняется неравенство $-r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta_z}{q} > 0$.

Подставляя оценки конечномерных поперечников по теореме 3.1.4: $d_n(B_p^m, l_z^m) \asymp \min\big\{1, m^{\frac{2\beta_z}{z}} n^{-\beta_z}\big\}$, $2 \le p < z < \infty$, в формулу оценки сверху поперечников классов $W_p^r(\mathbb{T}^d)$, получим

$$d_N(W_p^r(\mathbb{T}^d), L_q) \overset{(3.2.7)}{\ll} \sup_{s \in \mathbb{N}^d} 2^{\langle s, -r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\rangle} d_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_z^{2^{\langle s,1\rangle}}\big) \ll$$

$$\ll \max\left\{\max_{\langle s,r\rangle \le \mu} 2^{\langle s, -r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\rangle} 2^{\langle s, \frac{2\beta_z}{q}\rangle} N_s^{-\beta_z}, \max_{\langle s,r\rangle > \mu} 2^{\langle s, -r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\rangle}\right\} \ll$$

$\big($так как $r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 0$ и
$\frac{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{r_1} = \ldots = \frac{r_{l+1} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{r_{l+1}} < \frac{r_{l+2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{r_{l+2}} \le \ldots \le \frac{r_d - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{r_d}\big)$

$$\ll \max\left\{\max_{\langle s,r\rangle \le \mu} 2^{\langle s, -r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta_z}{q} - \beta_z\varepsilon\rangle - \frac{\mu}{r_1}(\frac{2\beta_z}{q} - \beta_z\varepsilon)}, 2^{\frac{\mu}{r_1}(-r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})}\right\} \le$$

$\Big($поскольку $-r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta_z}{q} - \beta_z\varepsilon > 0$ и $\frac{-r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta_z}{q} - \beta_z\varepsilon}{r_1} = \ldots = \frac{-r_{l+1} + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta_z}{q} - \beta_z\varepsilon}{r_{l+1}} > \frac{-r_{l+2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta_z}{q} - \beta_z\varepsilon}{r_{l+2}} \ge \ldots \ge \frac{-r_d + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta_z}{q} - \beta_z\varepsilon}{r_d}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0\Big)$

$$\le \max\left\{2^{\frac{\mu}{r_1}(-r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta_z}{q} - \beta_z\varepsilon) - \frac{\mu}{r_1}(\frac{2\beta_z}{q} - \beta_z\varepsilon)}, 2^{\frac{\mu}{r_1}(-r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})}\right\} =$$

$$= 2^{\frac{\mu}{r_1}(-r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}.$$

B) Пусть $2 = p < q < \infty$. Тогда $\beta = \beta_z = \frac{1}{2}$, а условие на гладкость также выполняется в силу условия $r_1 < \beta = \frac{1}{2}$:

$$-r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2b_z}{q} > 0 \iff -r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{q} + \frac{1}{q} > 0 \iff r_1 < \frac{1}{2}.$$

C) Оценка сверху при $p \leq 2 < q$, $r_1 < \frac{1}{p}$, вытекает из вложения $W^r_p \overset{(1.3.3)}{\subset\subset} W_2^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}$ и уже найденной оценки сверху для $d_N(W_2^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}, L_q)$ при $p = 2$ и $r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} < \beta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow r_1 < \frac{1}{p}$ $\big(\beta = \frac{1}{2}$ при $p = 2\big)$:

$$d_N(W^r_p, L_q) \ll d_N(W_2^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}, L_q) \ll$$
$$\ll \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{q})} = \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}.$$

Оценки снизу. Докажем вначале для $1 < p \le 2$. Обозначим $S = \{s = (s_1, \dots, s_{l+1}, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d \mid \langle s, 1 \rangle = m\}$, $K = \bigcup\limits_{s \in S} \Box_s$. Величина $m \in \mathbb{N}$ выбирается из условия $N^{\frac{q}{2}} \asymp m^l 2^m$. Тогда $|S| \asymp m^l$, $|K| = \sum\limits_{s \in S} |\Box_s| = \sum\limits_{s \in S} 2^{\langle s, 1 \rangle} = |S| 2^m \asymp m^l 2^m \asymp N^{\frac{q}{2}}$.

Подставляя оценки конечномерных поперечников по теореме 3.1.4 в формулу (3.2.10) ($p^* := \min\{p, 2\} = p$, $q^{**} := \max\{q, 2\} = q$), получим

$$d_N(W^r_p, L_q) \gg 2^{-m(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} d_N\big(B^{2^m, m^l}_{p, p^*}, l^{2^m, m^l}_{q, q^{**}}\big) =$$
$$= 2^{m(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} d_N(B^{|K|}_p, l^{|K|}_q) \asymp 2^{m(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} |K|^{\frac{1}{q}} N^{-\frac{1}{2}} \asymp$$
$$\asymp 2^{m(-r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \asymp \left(\frac{\log^{\frac{2l}{q}} N}{N}\right)^{\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}.$$

Оценка снизу для $2 \le p < \infty$ следует из вложения $W_2^{r + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \subset\subset W^r_p$ уже найденной оценки снизу для $d_N(W_2^{r + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}, L_q)$:

$$d_N(W^r_p, L_q) \gg d_N(W_2^{r + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}, L_q) \asymp$$
$$\asymp \left(\frac{\log^{\frac{2l}{q}} N}{N}\right)^{\frac{q}{2}(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{q})} = \left(\frac{\log^{\frac{2l}{q}} N}{N}\right)^{\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}. \qquad \Box$$

Теорема 3.6.2 (о поперечнике по Колмогорову класса Гельдера–Никольского при малых гладкостях)**.** *Пусть* $r \in \mathbb{R}^d$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \le \ldots \le r_d$, $1 < p, q < \infty$, $\beta := \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)/\left(1 - \frac{2}{q}\right)$, $H_p^r = H_p^r(\mathbb{T}^d)$. *Тогда при* $2 \le p < q$, $r_1 < \beta$, *или при* $p \le 2 < q$, $r_1 < \frac{1}{p}$,

$$\log^{\frac{l}{q}} N \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})} \ll d_N(H_p^r, L_q) \ll \log^{\frac{l}{2}} N \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}.$$

Доказательство. Оценки сверху. Оценка при $2 \le p < q$ доказывается как и в п. d$'$) теоремы 3.4.1. Положим $N_s = \begin{cases} \min\left\{2^{\langle s,1\rangle}, \left[2^{\varepsilon(\langle s,1\rangle - \frac{\mu}{r_1}) + \frac{\mu}{r_1}}\right]\right\}, & \langle s, r\rangle \le \mu, \\ 0, & \langle s, r\rangle > \mu, \end{cases}$ где величина μ выбирается из условия $\mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N$, а константа $\varepsilon > 0$ достаточно мала. Тогда

$$\sum_{s \in \mathbb{N}^d} N_s = \sum_{\langle s, r\rangle \le \mu} N_s \le \sum_{\langle s, r\rangle \le \mu} 2^{\varepsilon(\langle s,1\rangle - \frac{\mu}{r_1}) + \frac{\mu}{r_1}} \overset{(4.1.3)}{\asymp} \mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N,$$

поскольку $\frac{1}{r_1} = \ldots = \frac{1}{r_{l+1}} > \frac{1}{r_{l+2}} \ge \ldots \ge \frac{1}{r_d}$.

Подставляя оценки конечномерных поперечников по теореме 3.1.4 в формулу (3.2.4) ($q^* := \min\{q, 2\} = 2$) и проводя суммирование, получим

$$d_N(H_p^r, L_q) \ll \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \left(2^{\langle s, -\alpha\rangle} d_{N_s}(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s,1\rangle}})\right)^{q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{\langle s,r\rangle \le \mu} \left(2^{\langle s, \frac{2\beta}{q}\rangle} 2^{\langle s, -r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\rangle} N_s^{-\beta}\right)^2 + \sum_{\langle s,r\rangle > \mu} 2^{2\langle s, -r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\rangle}\right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\langle s,r\rangle \le \mu} \left(2^{\langle s, -r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta}{q} - \beta\varepsilon\rangle + \frac{\mu}{r_1}(\beta\varepsilon - \frac{2\beta}{q})}\right)^2 + \mu^l 2^{\frac{2\mu}{r_1}(-r_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})}\right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

(поскольку $-r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta}{q} - \beta\varepsilon = -r + \beta - \beta\varepsilon$ в силу тождества $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{2\beta}{q} = \beta$; $\frac{-r_1 + \beta - \beta\varepsilon}{r_1} = \ldots = \frac{-r_{l+1} + \beta - \beta\varepsilon}{r_{l+1}} > \frac{-r_{l+2} + \beta - \beta\varepsilon}{r_{l+2}} \ge \ldots \ge$

$\frac{-r_d+\beta-\beta\varepsilon}{r_d}$ и $-r+\beta-\beta\varepsilon>0$ при достаточно малых $\varepsilon>0\Big)$

$$\overset{(4.1.3)}{\asymp}\left(\mu^l\Big(2^{\frac{\mu}{r_1}(-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\Big)^2+\mu^l 2^{\frac{2\mu}{r_1}(-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\right)^{\frac{1}{2}}\asymp$$
$$\asymp\mu^{\frac{l}{2}}2^{\frac{\mu}{r_1}(-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\asymp\log^{\frac{l}{2}}N\left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{q}{2}(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}.$$

Оценка сверху при $p\le 2<q$ вытекает из вложения $H_p^r\overset{(1.1.4)}{\subset\subset}H_2^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}$ и уже найденной оценки сверху для $d_N(H_2^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}},L_q)$ при $p=2$ и $r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}<\beta=\frac{1}{2}\Leftrightarrow r_1<\frac{1}{p}$ $\big(\beta=\frac{1}{2}$ при $p=2\big)$:

$$d_N(H_p^r,L_q)\ll d_N(H_2^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}},L_q)\ll$$
$$\ll\log^{\frac{l}{2}}N\left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{q}{2}\left(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}\right)}=\log^{\frac{l}{2}}N\left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\frac{q}{2}\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}.$$

Оценка снизу. Обозначим $S = \{s = (s_1, \dots s_{l+1}, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d \mid \langle s, 1\rangle = m\}$, где $m \in \mathbb{N}$ выбрано из условия $m^l 2^{\frac{2m}{q}} \asymp N$. Тогда $\|S\| = |S|2^m \asymp m^l 2^m$. По формуле (3.2.8) ($\theta = \infty$, $q^{**} := \max\{q, 2\} = q$) и теореме 3.1.2

$$d_N(H_p^r, L_q) \gg 2^{-mr_1 + \frac{m}{p} - \frac{m}{q}} d_N(B_{p,\infty}^{2^m, m^l}, l_{q,q^{**}}^{m^l 2^m}) =$$

$$= 2^{-mr_1 + \frac{m}{p} - \frac{m}{q}} d_N(B_{p,\infty}^{2^m, m^l}, l_q^{m^l 2^m}) \gg$$

$$\gg 2^{-mr_1 + \frac{m}{p} - \frac{m}{q}} m^{\frac{l}{q}} \asymp \log^{\frac{l}{q}} N \left(\frac{\log^l N}{N} \right)^{\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}. \qquad \square$$

Замечание. *Если при доказательстве оценки сверху величину* μ *выбираем из условия* $\mu^{l(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} + \beta)} 2^{\frac{2\beta\mu}{q}} = N^\beta$, *то оценки сверху в теореме 3.6.2 можно несколько улучшить:*

a) при $2 \le p < q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 < \beta$,

$$d_N(H_p^r(\mathbb{T}^d), L_q(\mathbb{T}^d)) \ll \log^{\frac{l}{q}} N \left(\frac{\log^{\frac{l}{\beta}(\beta + \frac{1}{2} - \frac{1}{q})} N}{N} \right)^{\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}.$$

b) при $1 < p \le 2 < q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 < \frac{1}{p}$,

$$d_N(H_p^r(\mathbb{T}^d), L_q(\mathbb{T}^d)) \ll \log^{\frac{l}{q}} N \left(\frac{\log^{l(2 - \frac{2}{q})} N}{N} \right)^{\frac{q}{2}(r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}.$$

Теоремы 3.6.1, 3.6.2 приводятся впервые. Более слабые (по степени $\log N$) оценки d_N сверху и снизу содержатся в работах автора [1987a], [1986a]. Еще более слабые (по степени $\log N$) оценки $d_N(W_p^r, L_q)$ сверху и снизу содержатся в кандидатской диссертации Куланина [1985].

3.7 Линейные поперечники функциональных классов

В этом пункте определяются линейные поперечников классов периодических функций одной и нескольких переменных $W^r_p(\mathbb{T}^d)$ и $H^r_p(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q.

Линейный поперечник был введен В. М. Тихомировым [1960]. Напомним, что *линейным N-поперечником* множества W в линейном нормированном пространстве X называется величина

$$\lambda_N(W, X) = \inf_P \sup_{x \in W} \|x - Px\|_X,$$

где инфимум берется по всем действующим в X линейным непрерывным операторам ранга N.

Сформулируем некоторые известные результаты, которые нам понадобятся при выводе порядков линейных поперечников функциональных классов.

Р. С. Исмагиловым доказана следующая теорема двойственности.

Теорема 3.7.1 (Исмагилова о двойственности [1974]). *Пусть BX, BY — единичные шары в банаховых пространствах соответственно X и Y, $(BX)^\circ, (BY)^\circ$ — поляры этих множеств. Пространство Y^* вложено в пространство X. Тогда*

$$\lambda_N((BY)^\circ, X) = \lambda_N((BX)^\circ, Y). \tag{3.7.1}$$

Нам понадобятся также оценки Е. Д. Глускина линейных поперечников конечномерных множеств.

Теорема 3.7.2 (Глускин [1983]). *Пусть $1 \le p < 2 \le q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1$, $N < m$. Тогда*

$$\lambda_N(B^m_p, l^m_q) \asymp \max\left\{ m^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}, \min\left\{1, m^{\frac{1}{q}} N^{-\frac{1}{2}}\right\} \sqrt{1 - \tfrac{N}{m}} \right\}. \tag{3.7.2}$$

Случай $p = 1$, $q > 2$ теоремы 3.7.2 следует из работы Б. С. Кашина [1980], в которой вычисляется колмогоровский поперечник октаэдра B^m_1 в пространстве l^m_q, поскольку для октаэдра, как нетрудно заметить, линейный поперечник совпадает с колмогоровским.

Перейдем к линейным поперечникам классов функций. Вначале сформулируем теорему о линейных поперечниках $\lambda_N(W^r_p, L_q)$ классов периодических функций одной переменной.

Теорема 3.7.3 (о линейном поперечнике класса Соболева $W^r_p(\mathbb{T}^1)$). *Пусть* $1 < p, q < \infty$, $r > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$. *Тогда*

$$\lambda_N(W^r_p(\mathbb{T}^1), L_q) \asymp \begin{cases} N^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}, & q \le 2 \text{ или } 2 \le p; \\ N^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \ge 1,\ q > 2,\ r > \frac{1}{p}; \\ N^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}, & \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \le 1,\ p < 2,\ r > 1-\frac{1}{q}. \end{cases}$$

Теорема 3.7.3 была доказана Исмагиловым [1974] при $q \le 2$ или $p \ge 2$; В. Е. Майоровым [1978], [1980] при $1 < p \le 2 \le q$ и так же К. Хеллигом [1979].

Сформулируем и докажем теорему о линейных поперечниках классов $W^r_p(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q.

Теорема 3.7.4 (о линейном поперечнике класса $W^r_p(\mathbb{T}^d)$ [1987b]). *Пусть* $r \in \mathbb{R}^d$, $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+ < r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \le \ldots \le r_d$, $1 < p, q < \infty$, $W^r_p = W^r_p(\mathbb{T}^d)$. *Тогда*

$$\lambda_N(W^r_p, L_q) \asymp \begin{cases} \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}, & q \le 2 \text{ или } 2 \le p; \quad \text{(a)} \\ \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}, & \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} \ge 1,\ q > 2,\ r_1 > \dfrac{1}{p}; \quad \text{(b)} \\ \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}, & \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} \le 1,\ p < 2,\ r_1 > 1-\dfrac{1}{q}. \quad \text{(c)} \end{cases}$$

Доказательство. а) *Оценка сверху* следует их приближения класса W^r_p в пространстве L_q оператором Фурье $S_N := S^\alpha_\mu$, $\alpha = r - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$, содержащем порядка N гармоник из ступенчатого гиперболического креста при $\mu^l 2^{\frac{\mu}{\alpha_1}} = N$ по теореме 2.2.2:

$$d_N(W^r_p, L_q) \ll d(W^r_p, S_N, L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}.$$

Оценка снизу сводятся к найденному в теореме 3.4.1 колмогоровскому поперечнику:

$$\lambda_N(W^r_p, L_q) \geq d_N(W^r_p, L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}.$$

b) Пусть $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq 1$, $q \geq 2$ ($\Rightarrow p \leq 2$), $r_1 > \frac{1}{p}$. *Оценка сверху* здесь доказывается как и в пункте в) теоремы 3.4.1, поскольку в этом случае оценки колмогоровских и линейных поперечников конечномерных множеств (см. теоремы 3.1.4 и 3.7.3) совпадают.

Оценка снизу сводится к уже доказанному в (a) случаю $q = 2$:

$$\lambda_N(W^r_p, L_q) \overset{(1.3.1)}{\geq} \lambda_N(W^r_p, L_2) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}.$$

c) Соотношение (c) выводится из (b) в силу двойственности по теореме Исмагилова. Поскольку $p < 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \leq 1$, то для сопряженных метрик $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'} \geq 1$, $p' > 2$, следовательно, применим уже доказанный случай (b). Поэтому имеем при $r_1 > \frac{1}{q'} = 1-\frac{1}{q}$

$$\lambda_N(W^r_p, L_q) = \lambda_N(W^r_{q'}, L_{p'}) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{q'}+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}.$$

$\square$

Сформулируем далее и докажем теорему о линейных поперечниках классов $H^r_p(\mathbb{T}^d)$ в пространстве L_q.

Теорема 3.7.5 (о линейном поперечнике класса Гельдера–Никольского [1987b], [1996])**.** *Пусть* $r \in \mathbb{R}^d$, $0 < r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \leq \ldots \leq r_d$, $1 < p, q < \infty$, $H^r_p = H^r_p(\mathbb{T}^d)$. *Тогда*

1) *при* $p \geq \max\{q, 2\}$

$$\lambda_N(H^r_p, L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{\frac{l}{2}} N;$$

2) *при* $q \leq p \leq 2$

$$\left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{\frac{l}{2}} N \ll \lambda_N(H^r_p, L_q) \ll \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{\frac{l}{p}} N;$$

3) *при* $p \le q \le 2,\ r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$

$$\lambda_N(H_p^r, L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \log^{\frac{l}{q}} N;$$

4) *при* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1,\ q \ge 2,\ r_1 > \frac{1}{p}$

$$\lambda_N(H_p^r, L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}} \log^{\frac{l}{2}} N;$$

5) *при* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1,\ p \le 2,\ r_1 > 1 - \frac{1}{q}$

$$\frac{\sqrt{\log\log\log N}}{\log\log N} \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}} \log^{\frac{l}{q}} N \ll \lambda_N(H_p^r, L_q) \ll$$

$$\ll \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}} \log^{\frac{l}{q}} N;$$

6) *при* $2 \le p < q,\ r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$

$$\frac{\sqrt{\log\log\log N}}{\log\log N} \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \log^{\frac{l}{q}} N \ll \lambda_N(H_p^r, L_q) \ll$$

$$\ll \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \log^{\frac{l}{q}} N.$$

Доказательство. 1)–3). *Оценки сверху* в этих случаях следуют из приближения класса H_p^r в пространстве L_q оператором Фурье $S_N := S_\mu^{r'}$, содержащем порядка N гармоник из расширенного ступенчатого гиперболического креста при $\mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N$ по теореме 2.2.5:

$$\lambda_N(H_p^r, L_q) \ll d(H_p^r, S_N, L_q) \asymp \begin{cases} \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{\frac{l}{2}} N, & p \ge \max\{q, 2\}, \\ \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{\frac{l}{p}} N, & 2 > p \ge q, \\ \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \log^{\frac{l}{q}} N, & p \le q \le 2. \end{cases}$$

Оценки снизу в п.п. 1, 3 сводятся к найденным в теореме 3.4.2 колмогоровским поперечникам:

$$\lambda_N(H_p^r, L_q) \geq d_N(H_p^r, L_q) \asymp \begin{cases} \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{\frac{l}{2}} N, & p \geq \max\{q, 2\}, \\ \left(\dfrac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \log^{\frac{l}{q}} N, & p \leq q \leq 2. \end{cases}$$

Оценка снизу в п. 2 в силу вложения $H_p^r \overset{(1.3.1)}{\supset} H_2^r$ при $p \leq 2$ сводится к п. 1, когда $p = 2$:

$$\lambda_N(H_p^r, L_q) \geq \lambda_N(H_2^r, L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1} \log^{\frac{l}{2}} N.$$

4) Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, $q \geq 2$, $r_1 > \frac{1}{p}$. *Оценка сверху.* Положим $N_s = \begin{cases} 2^{\langle s, r\rangle}, \langle s, r\rangle \leq \mu, \\ \min\left\{2^{\langle s, r\rangle}, \left[2^{\frac{\mu}{r_1}(1+\varepsilon\alpha_1) - \varepsilon\langle s, \alpha\rangle}\right]\right\}, \langle s, r\rangle > \mu, \end{cases}$ где $\alpha := r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, величина μ выбирается из условия $\mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N$, а константа $\varepsilon > 0$ достаточно мала. Тогда

$$\sum_{s \in \mathbb{N}^d} N_s \leq \sum_{\langle s, r\rangle \leq \mu} 2^{\langle s, 1\rangle} + \sum_{\langle s, r\rangle > \mu} 2^{\frac{\mu}{r_1}(1+\varepsilon\alpha_1) - \varepsilon\langle s, \alpha\rangle} \overset{(4.1.3),(4.1.4)}{\asymp}$$

$\Big($поскольку $\frac{1}{r_1} = \ldots = \frac{1}{r_{l+1}} > \frac{1}{r_{l+1}} \geq \ldots \geq \frac{1}{r_d}$ и для $\frac{\alpha_i}{r_i} = \frac{r_i - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{r_i} = 1 - \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}{r_i}$ выполняется соотношение $\frac{\alpha_1}{r_1} = \ldots = \frac{\alpha_{l+1}}{r_{l+1}} < \frac{\alpha_{l+2}}{r_{l+2}} \leq \ldots \leq \frac{\alpha_d}{r_d}\Big)$

$$\asymp \mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} + 2^{\frac{\mu}{r_1}(1+\varepsilon\alpha_1)} \mu^l 2^{-\frac{\mu}{r_1}\varepsilon\alpha_1} \asymp \mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N.$$

Сводя оценку сверху поперечников функциональных классов к оценке сверху поперечников конечномерных множеств, и подставляя эти оценки по теореме 3.7.2 (Глускина) $\lambda_{N_s}(B_p^{2^{\langle s, 1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s, 1\rangle}}) \ll 2^{\langle s, \frac{1}{q}\rangle} N_s^{-\frac{1}{2}}$ $\big(q^* = \min\{q, 2\} = 2\big)$, получим

$$\lambda_N(H_p^r, L_q) \overset{(3.2.4)}{\ll} \left(\sum_{\langle s, r\rangle > \mu} \left(2^{\langle s, -r + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\rangle} \lambda_{N_s}(B_p^{2^{\langle s, 1\rangle}}, l_q^{2^{\langle s, 1\rangle}})\right)^{q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}} \ll$$

$$\overset{(3.7.2)}{\ll} \left(\sum_{\langle s,r\rangle>\mu} \left(2^{\langle s,-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\rangle} 2^{\langle s,\frac{1}{q}\rangle} N_s^{-\frac{1}{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{\langle s,r\rangle>\mu} \left(2^{\langle s,-r+\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon\alpha}{2}\rangle-\frac{\mu(1+\varepsilon\alpha_1)}{2r_1}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \overset{(??)}{\asymp} \mu^{\frac{l}{2}} 2^{\frac{\mu}{r_1}(-r_1+\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon\alpha_1}{2})-\frac{\mu(1+\varepsilon\alpha_1)}{2r_1}} =$$

$\Big($поскольку $r-\frac{1}{p}-\frac{\varepsilon\alpha}{2}>0$, и для $\frac{r_i-\frac{1}{p}-\frac{\varepsilon\alpha_i}{2}}{r_i}=1+\frac{-\frac{1}{p}-\frac{\varepsilon\alpha_i}{2}}{r_i}$ выполняется соотношение $\frac{r_1-\frac{1}{p}-\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}}{r_1}=\ldots=\frac{r_{l+1}-\frac{1}{p}-\frac{\varepsilon\alpha_{l+1}}{2}}{r_{l+1}}<\frac{r_{l+2}-\frac{1}{p}-\frac{\varepsilon\alpha_{l+2}}{2}}{r_{l+2}}\leq \ldots \leq \frac{r_d-\frac{1}{p}-\frac{\varepsilon\alpha_d}{2}}{r_d}$ для достаточно малых $\varepsilon>0\Big)$

$$= \mu^{\frac{l}{2}} 2^{\mu(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} \log^{\frac{l}{2}} N.$$

Оценка снизу сводится к уже доказанному в п. 3 случаю $q=2$:

$$\lambda_N(H_p^r, L_q) \overset{(1.3.1)}{\geq} \lambda_N(H_p^r, L_2) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} \log^{\frac{l}{2}} N.$$

5) Пусть $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$, $p\le 2$, $r_1>1-\frac{1}{q}$. *Оценка сверху.* Возьмем N_s те же, что и в п. 4. Пусть p' определяется из равенства $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Отметим, что из неравенства $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$ при $p\le 2$ следует, что $\frac{1}{q}<\frac{1}{p'}$ и $p'<q$. Поэтому в силу неравенства

$$\Big\|\sum_s \delta_s x\Big\|_{L_q} \overset{(2.1.2)}{\ll} \Big(\sum_s \|2^{\langle s,\frac{1}{p'}-\frac{1}{q}\rangle}\delta_s x\|^q_{L_{p'}}\Big)^{\frac{1}{q}}$$

имеем следующую оценку сверху поперечников функциональных классов через оценки поперечников конечномерных множеств

$$\lambda_N(H^r_p,L_q) \overset{(3.2.2)}{\ll} \Big(\sum_{\langle s,r\rangle>\mu}\Big(2^{\langle s,\frac{1}{p'}-\frac{1}{q}\rangle+\langle s,-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\rangle}\lambda_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}},l_{p'}^{2^{\langle s,1\rangle}}\big)\Big)^q\Big)^{\frac{1}{q}} =$$

$$=\Big(\sum_{\langle s,r\rangle>\mu}\Big(2^{\langle s,-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\rangle}\lambda_{N_s}\big(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}},l_{p'}^{2^{\langle s,1\rangle}}\big)\Big)^q\Big)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$\Big($по теореме 3.7.2 (Глускина) $\lambda_{N_s}(B_p^{2^{\langle s,1\rangle}},l_{p'}^{2^{\langle s,1\rangle}})\ll 2^{\langle s,\frac{1}{p'}\rangle}N_s^{-\frac{1}{2}}\Big)$

$$\overset{(3.7.2)}{\ll}\Big(\sum_{\langle s,r\rangle>\mu}\Big(2^{\langle s,-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\rangle}2^{\langle s,\frac{1}{p'}\rangle}N_s^{-\frac{1}{2}}\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp\Big(\sum_{\langle s,r\rangle>\mu}\Big(2^{\langle s,-r+1-\frac{1}{q}+\frac{\varepsilon\alpha}{2}\rangle-\frac{\mu(1+\varepsilon\alpha_1)}{2r_1}}\Big)^q\Big)^{\frac{1}{q}} \overset{(??)}{\asymp}$$

$\Big($поскольку $r-1+\frac{1}{q}-\frac{\varepsilon\alpha}{2}>0$, и для $\frac{r_i-\frac{1}{p}-\frac{\varepsilon\alpha_i}{2}}{r_i}=1+\frac{-\frac{1}{p}-\frac{\varepsilon\alpha_i}{2}}{r_i}$ выполняется соотношение $\frac{r_1-1+\frac{1}{q}-\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}}{r_1}=\ldots=\frac{r_{l+1}-\frac{1}{p}-\frac{\varepsilon\alpha_{l+1}}{2}}{r_{l+1}}<\frac{r_{l+2}-1+\frac{1}{q}-\frac{\varepsilon\alpha_{l+2}}{2}}{r_{l+2}}\le\ldots\le\frac{r_d-1+\frac{1}{q}-\frac{\varepsilon\alpha_d}{2}}{r_d}$ для достаточно малых $\varepsilon>0\Big)$

$$\asymp \mu^{\frac{l}{q}}2^{\frac{\mu}{r_1}(-r_1+1-\frac{1}{q}+\frac{\varepsilon\alpha_1}{2})-\frac{\mu(1+\varepsilon\alpha_1)}{2r_1}} = \mu^{\frac{l}{q}}2^{\mu(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\log^{\frac{l}{q}} N.$$

Оценка снизу. Обозначим $S = \{s = (s_1, \ldots, s_{l+1}, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d \mid \langle s, 1\rangle = m\}$, $K = \bigcup\limits_{b\in S} \square_s$. Тогда $|S| \asymp m^l$, $|K| = \sum\limits_{s\in S} |\square_s| = \sum\limits_{s\in S} 2^{\langle s,1\rangle} = |S|2^m \asymp m^l 2^m$. Величина $m \in \mathbb{N}$ выбирается таким образом, чтобы число гармоник во множестве K было порядка N и не менее $2N$, т. е. $|K| \geq C_1 m^l 2^m \geq 2N$. Поэтому $N \asymp m^l 2^m$.

По формуле (3.2.8) ($\theta = \infty$, $q^{**} := \max\{q, 2\} = q$)

$$\lambda_N(H^r_p, L_q) \gg 2^{m(-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \lambda_N(B^{2^m,|S|}_{p,\infty}, l^{|K|}_q). \tag{3.7.3}$$

Поскольку по неравенству 1.1.9 (для средних) $\|\cdot\|_{l^{2^m}_p} \leq \|\cdot\|_{l^{2^m}_2} 2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}$ при $p \leq 2$, а $\|\cdot\|_{l^{|S|}_q} \geq \|\cdot\|_{l^{|S|}_1} |S|^{\frac{1}{q}-1}$ при $q \geq 1$ и $\|\cdot\|_{l^{2^m}_q} \geq \|\cdot\|_{l^{2^m}_\infty}$ при $q \leq \infty$, то $B^{2^m}_p \supset 2^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} B^{2^m}_2$ и, значит, $B^{2^m,|S|}_{p,\infty} \supset 2^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} B^{2^m,|S|}_{2,\infty}$, $\|\cdot\|_{l^{2^m,|S|}_q} \geq \|\cdot\|_{l^{2^m,|S|}_{\infty,1}} |S|^{\frac{1}{q}-1}$. Поэтому из (3.7.3) имеем:

$$\lambda_N(H^r_p, L_q) \gg 2^{m(-r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \lambda_N(B^{2^m,|S|}_{2,\infty}, l^{|K|}_q) =$$

$$= 2^{m(-r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \lambda_N(B^{2^m,|S|}_{2,\infty}, l^{|K|}_q) \geq |S|^{\frac{1}{q}-1} 2^{m(-r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \lambda_N\big(B^{2^m,|S|}_{2,\infty}, l^{2^m,|S|}_{\infty,1}\big).$$

Далее по теореме 3.7.1 (Исмагилова) о двойственности

$$\lambda_N(H^r_p, L_q) \gg |S|^{\frac{1}{q}-1} 2^{m(-r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \lambda_N(B^{2^m,|S|}_{1,\infty}, l^{2^m,|S|}_{2,1}).$$

Подставляя оценку линейного поперечника конечномерного множества по теореме 3.1.7 (Изаака), приходим к искомой оценке снизу линейного поперечника функционального класса:

$$\lambda_N(H^r_p, L_q) \gg |S|^{\frac{1}{q}-1} 2^{m(-r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \frac{|S|\sqrt{\log\log|S|}}{\log|S|} \asymp$$

$$\asymp \frac{\sqrt{\log\log\log N}}{\log\log N} \log^{\frac{l}{q}} N \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}.$$

6) Пусть $2 \le p < q < \infty$, $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. *Оценка сверху* вытекает из приближения класса H_p^r в пространстве L_q оператором Фурье $S_N := S_\mu^{r'}$, содержащем порядка N гармоник из расширенного ступенчатого гиперболического креста при $\mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N$ по теореме 2.2.4:

$$\lambda_N(H_p^r, L_q) \ll d(H_p^r, S_N, L_q) \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \log^{\frac{l}{q}} N.$$

Оценка снизу следует из вложения $H_p^r \supset\supset H_2^{r - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}}$ при $p \ge 2$ (вложений выполняется в силу неравенства разных метрик С. М. Никольского для тригонометрических полиномов) и уже найденной в п. 5 оценки снизу для $p = 2$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} < 1 \Leftrightarrow q > 2$ (отметим, что оценка снизу там доказывалась без ограничений на гладкость функционального класса):

$$\lambda_N(H_p^r, L_q) \gg \lambda_N(H_2^{r - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}}, L_q) \gg$$
$$\gg \frac{\sqrt{\log\log\log N}}{\log\log N} \log^{\frac{l}{q}} N \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}. \qquad \square$$

Отметим, что если $n = 1$, то $l = 0$ и при оценке снизу в п. 5 $|S| = 1$, следовательно,

$$\lambda_N\big(B_{1,\infty}^{2^m,|S|}, l_{2,1}^{2^m,|S|}\big) = \lambda_N(B_1^{2^m}, l_2^{2^m}) \asymp 1.$$

Поэтому в п. 5, а значит и в п. 6, мы имеем точные оценки:

$$\lambda_N(H_p^r(\mathbb{T}^1), L_q) \asymp \begin{cases} N^{r - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}}, & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1,\ p \le 2,\ r > 1 - \frac{1}{q}; \\ N^{r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}, & 2 \le p < q,\ r > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}. \end{cases}$$

Оценки снизу также могут быть выведены из вложения $H_p^r \supset\supset W_p^r$ и оценок порядков $\lambda_N(W_p^r(\mathbb{T}^1), L_q)$ по теореме 3.7.3. Нетрудно видеть, что $\lambda_N(H_p^r(\mathbb{T}^1), L_q) \asymp \lambda_N(W_p^r(\mathbb{T}^1), L_q)$ при всех значениях p, q и r, рассматриваемых в теореме 3.7.3.

Теоремы 3.7.4 и 3.7.5 можно обобщить на случай классов $W_p^A(\mathbb{T}^d) = \bigcap\limits_{r \in A} W_p^r(\mathbb{T}^d)$ и $H_p^A(\mathbb{T}^d) = \bigcap\limits_{r \in A} H_p^r(\mathbb{T}^d)$, $A = \{r^i \subset \mathbb{R}^d \mid i = 1, \dots, m\}$.

4 Порядки некоторых величин, используемых при приближении

В этой главе определяются порядки норм производных ядер Дирихле и Фавара функций одной и нескольких переменных в векторной норме с гармониками внутри и вне ступенчатого гиперболического креста. Отыскиваются порядки норм производных ядер Дирихле и Фавара, являющихся минимальными по выбору N гармоник. Находится в ряде случаев порядок константы в неравенстве Бернштейна–Никольского, являющейся минимальной по выбору N гармоник. Вычисляются точные значения поперечников по Бернштейну бесконечномерных эллипсоидов и порядки поперечников по Бернштейну функциональных классов. Все эти величины оказываются взаимосвязаны друг с другом и могут быть использованы при аппроксимации классов периодических функций многих переменных.

Содержание пунктов 4. 1–4. 2 имеется в работе автора [1982b].

4.1 Нормы производных ядер Дирихле и Фавара

В этом пункте приводятся оценки конечных и бесконечных сумм, теоремы о порядках ядер Дирихле и Фавара периодических функций одной и нескольких переменных.

4.1.1 Предварительные сведения и вспомогательные результаты

В этом пункте приводятся известные, а также ряд новых вспомогательных результатов об оценках различных конечных и бесконечных сумм. Доказываются две теоремы о порядках ядер Дирихле и Фавара периодических функций одной переменной.

При нахождении норм ядер Дирихле и Фавара нам понадобятся некоторые оценки функции $\delta_s(t) := \sum\limits_{k\in\square_s} e^{i\langle k,t\rangle}$. Функция одной переменной $\delta_s(t)$ приводится к следующему виду:

$$\delta_s(t) = \sum_{k\in\square_s} e^{ikt} = \sum_{2^{s-1}\le|k|<2^s} e^{ikt} = 2\sum_{2^{s-1}\le|k|<2^s} \cos kt =$$

$$= \frac{2\sin 2^{s-2}t\cos 2^{-1}(3\cdot 2^{s-1}-1)t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Из оценки $\dfrac{2t}{\pi} \le \sin t \le t$ при $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, пользуясь тем, что число слагаемых во множестве $\square_s$ равно 2^s, получаем, что

$$\frac{2^{s+1}}{\pi}\cos\frac{3\pi}{8} \le |\delta_s(t)| \le 2^s,\ t\in T_k,\ s<k, \tag{4.1.1}$$

$$|\delta_s(t)| \le \frac{2\pi}{t} \le 2^{k+2},\ t\in T_k, \tag{4.1.2}$$

где $T_k = \{t\in\mathbb{R} \mid \pi 2^{-k-1} < |t| \le \pi 2^{-k}\}$, $k\ge 0$.

Докажем две теоремы об оценках производных норм ядер Дирихле и Фавара функций одной переменной. Основные идеи доказательств этих оценок будут использованы и при выводе таких оценок для функций многих переменных.

Теорема 4.1.1 (о норме производной одномерного ядра Дирихле [1982b])**.** *Пусть* $\alpha\in\mathbb{R}$, $1<p<\infty$, $D_N(t) = \sum\limits_{|k|\le N} e^{ikt}$. *Тогда*

$$\|D_N^{(\alpha)}\|_{L_p} \asymp \begin{cases} N^{\alpha+1-\frac{1}{p}}, & \alpha+1-\frac{1}{p}>0,\\ \log^{\frac{1}{p}} N, & \alpha+1-\frac{1}{p}=0,\\ 1, & \alpha+1-\frac{1}{p}<0. \end{cases}$$

Доказательство. Оценка сверху. По неравенству треугольника для норм

$$\|D_N^{(\alpha)}\|_p = \left\|\sum_{s\le n}\delta_s^{(\alpha)} + f^{(\alpha)}\right\|_p \le \left\|\sum_{s\le n}\delta_s^{(\alpha)}\right\|_p + \left\|f^{(\alpha)}\right\|_p,$$

где $n=[\log_2 N]$, $f(t) = \sum\limits_{k=2^n}^{N} e^{ikt}$. Из леммы 1.3.1 следует, что $\|f^{(\alpha)}(\cdot)\|_p \ll N^{\alpha+1-\frac{1}{p}}$, и поэтому второе слагаемое удовлетворяет оценке сверху теоремы и, следовательно, для завершения оценки сверху достаточно оценить первое слагаемое.

Предположим, что $\alpha+1-\frac{1}{p}\neq 0$. Тогда по неравенству треугольника для норм и в силу оценки леммы 1.3.1

$$\Big\|\sum_{s\le n}\delta_s^{(\alpha)}\Big\|_p\le\sum_{s\le n}\|\delta_s^{(\alpha)}\|_p\asymp\sum_{s\le n}2^{s(\alpha+1-\frac{1}{p})}.$$

Суммируя по s, в зависимости от знака $\alpha+1-\frac{1}{p}$, получаем в этом случае искомую оценку сверху.

Пусть $\alpha+1-\frac{1}{p}=0$. В силу теоремы 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли) и неравенства (1.1.9) (используем, что $\|\cdot\|_{l_2}\le\|\cdot\|_{l_1}$)

$$\Big\|\sum_{s\le n}\delta_s^{(\alpha)}\Big\|_p\asymp\Big\|\Big(\sum_{s\le n}|2^{\alpha s}\delta_s|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p\le\Big\|\sum_{s\le n}|2^{\alpha s}\delta_s|\Big\|_p.$$

Разбивая отрезок интегрирования $\mathbb{T}$ на области T_k, $k\ge 0$, и пользуясь неравенством (1.1.10), получаем, что

$$\Big\|\sum_{s\le n}\delta_s^{(\alpha)}\Big\|_p\asymp\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{s\in\mathbb{N}}|2^{\alpha s}\delta_s|\Big)^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}\asymp\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{T_k}\Big(\sum_{s}|2^{\alpha s}\delta_s|\Big)^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le\Big(\sum_{k\le n}\int\limits_{T_k}\Big(\sum_{s}|2^{\alpha s}\delta_s|\Big)^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{k>n}\int\limits_{T_k}\Big(\sum_{s}|2^{\alpha s}\delta_s|\Big)^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}\ll$$

$$\ll\Big(\sum_{k\le n}\int\limits_{T_k}\Big(\sum_{s<k}|2^{\alpha s}\delta_s|\Big)^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{k\le n}\int\limits_{T_k}\Big(\sum_{k\le s<n}|2^{\alpha s}\delta_s|\Big)^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\Big(\sum_{k>n}\int\limits_{T_k}\Big(\sum_{s\le n}|2^{\alpha s}\delta_s|\Big)^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}\ll$$

(Используем для первого и третьего слагаемого оценку $|\delta_s|\le 2^s$, а для второго $|\delta_s(t)|\le 2^{k+2}\ \forall\ t\in T_k$ (см. неравенства (4.1.3) и (4.1.4)), и то, что длина отрезка интегрирования T_k имеет порядок

2^{-k}.)

$$\ll \left(\sum_{k\le n} 2^{-k}\left(\sum_{s<k} 2^{(\alpha+1)s}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k\le n} 2^{k(p-1)}\left(\sum_{k\le s<n} 2^{\alpha s}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left(\sum_{k>n} 2^{-k}\left(\sum_{s\le n} 2^{(\alpha+1)s}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \ll \left(\sum_{k\le n} 2^{-k}2^{(\alpha+1)kp}\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left(\sum_{k\le n} 2^{k(p-1)}2^{\alpha kp}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k>n} 2^{-k}2^{(\alpha+1)np}\right)^{\frac{1}{p}} \asymp$$

(Суммируем по s и учитываем, что $\alpha+1-\frac{1}{p} = 0$, а значит, $\alpha+1=\frac{1}{p}>0$, $\alpha=\frac{1}{p}-1<0$.)

$$\asymp \left(\sum_{k\le n} 2^{kp(\alpha+1-\frac{1}{p})}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(2^{np(\alpha+1-\frac{1}{p})}\right)^{\frac{1}{p}} \asymp \left(\sum_{k\le n} 1\right)^{\frac{1}{p}} + 1 \asymp \log^{\frac{1}{p}} N.$$

Оценка сверху полностью доказана.

Оценка снизу. В силу теоремы 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли), разбивая отрезок интегрирования на области T_k, и в сумме по s беря только слагаемое с $s=k$, выводим, что

$$\|D_N^{(\alpha)}\|_p \overset{(1.1.3)}{\asymp} \left\|\left(\sum_{s\le n} |2^{\alpha s}\delta_s|^2 + |2^{\alpha n} f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \ge$$

$$\ge \left(\sum_{k\le n}\int\limits_{T_{k+1}} |2^{\alpha k}\delta_k(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \overset{(4.1.3)}{\gg} \left(\sum_{k\le n} 2^{kp(\alpha+1-\frac{1}{p})}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Оценивая последнюю сумму в зависимости от знака $\alpha+1-\frac{1}{p}$, получаем оценку снизу в теореме 4.1.1. $\square$

Замечание 4.1.1. *Для функции* $D_{\alpha,\mu}(t) = \sum\limits_{s\alpha\le\mu} \delta_s(t)$ *утверждение теоремы выглядит следующим образом:*

$$\|D_{\alpha,\mu}^{(\beta)}\|_{L_p} \asymp \begin{cases} 2^{\mu\gamma}, & \gamma>0,\\ \mu^{\frac{1}{p}}, & \gamma=0,\\ 1, & \gamma<0. \end{cases}$$

где $\gamma = \left(\beta + 1 - \frac{1}{p}\right)/\alpha$, $1 < p < \infty$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Теорема 4.1.2 (о норме производной одномерного ядра Фавара [1982b])**.** *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $F_N(t) \sim \sum\limits_{|k|>N} e^{ikt}$. *Тогда функция* $F_N^{(\alpha)} \in L_p(\mathbb{T}^1)$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha + 1 - \frac{1}{p} < 0$. *И если* $\alpha + 1 - \frac{1}{p} < 0$, *то*

$$\|F_N^{(\alpha)}\|_{L_p} \asymp N^{\alpha + 1 - \frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Оценка сверху. Представим функцию $F_N(t) \sim \sum\limits_{|k|>N} e^{ikt}$ в виде $F_N(t) \sim f + \sum\limits_{s>n} \delta_s$, где $n = [\log_2 N] + 1$, $f(\cdot) = \sum\limits_{k=N+1}^{2^n - 1} e^{ik\cdot}$. По неравенству треугольника для норм

$$\|F_N^{(\alpha)}\|_p = \left\| f^{(\alpha)} + \sum_{s>n} \delta_s^{(\alpha)} \right\|_p \leq \|f^{(\alpha)}\|_p + \sum_{s>n} \|\delta_s^{(\alpha)}\|_p$$

где $n = [\log_2 N] + 1$, $f(\cdot) = \sum\limits_{k=N+1}^{2^n - 1} e^{ik\cdot}$. В силу леммы 1.3.1

$$\|F_N^{(\alpha)}\|_p \ll \sum_{s \geq n} 2^{s(\alpha + 1 - \frac{1}{p})} \asymp 2^{n(\alpha + 1 - \frac{1}{p})} \asymp N^{\alpha + 1 - \frac{1}{p}}.$$

Оценка снизу. В силу теоремы 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли), разбивая отрезок интегрирования на области T_k и в сумме по s беря только слагаемое с $s = k$, получаем, что

$$\|F_N^{(\alpha)}\|_p \asymp \left\| \left(|f^{(\alpha)}|^2 + \sum_{s>n} |\delta_s^{(\alpha)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \geq \|\delta_{n+1}^{(\alpha)}\|_p \asymp$$

$$\asymp 2^{(n+1)(\alpha + 1 - \frac{1}{p})} \asymp N^{\alpha + 1 - \frac{1}{p}}.$$

Оценка снизу. В силу теоремы 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли), разбивая отрезок интегрирования на области T_k и в сумме по s беря только слагаемое с $s = k$, получаем, что

$$\|F_N^{(\alpha)}\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{s>n} |2^{\alpha s} \delta_s|^2 + |2^{\alpha n} f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \gg$$

$$\gg \left(\sum_{k>n}\int\limits_{T_{k+1}} |2^{\alpha k}\delta_k(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \overset{(4.1.3)}{\gg} \left(\sum_{k>n} 2^{kp(\alpha+1-\frac{1}{p})}\right)^{\frac{1}{p}} \asymp N^{\alpha+1-\frac{1}{p}}.$$

Если $\alpha+1-\frac{1}{p}\geq 0$, то из последнего соотношения видно, что тогда $F_N^{(\alpha)}(\cdot)\notin L_p$. $\square$

Замечание 4.1.2. *Для функции $F_{\alpha,\mu}(t)\sim\sum\limits_{\alpha s>\mu}\delta_s(t)$ утверждение теоремы выглядит следующим образом:*

Функция $F_{\alpha,\mu}^{(\beta)}\in L_p(\mathbb{T}^1)$ тогда и только тогда, когда $\gamma<0$. И если $\gamma<0$, то

$$\|F_{\alpha,\mu}^{(\beta)}(\cdot)\|_p\asymp 2^{\mu\gamma},$$

где $\gamma=\left(\beta+1-\frac{1}{p}\right)/\alpha$, $1<p<\infty$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$.

Приведем несколько лемм об оценках конечных и бесконечных сумм, которые потребуются для оценки норм производных ядер Дирихле и Фавара.

Лемма 4.1.1. *Пусть $\alpha\in\mathbb{R}^d$, $r\in\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^d_+$, $\frac{\alpha_1}{r_1}=\ldots=\frac{\alpha_{l+1}}{r_{l+1}}>\frac{\alpha_{l+2}}{r_{l+2}}\geq\ldots\geq\frac{\alpha_d}{r_d}$, $\mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}}=N$. Тогда*

$$\sum_{\langle s,r\rangle\leq\mu}2^{\langle s,\alpha\rangle}\asymp\begin{cases}\mu^l 2^{\frac{\alpha_1}{r_1}\mu}, \\ \mu^{l+1}, \\ 1,\end{cases}\asymp\begin{cases}\left(\dfrac{N}{\log^l N}\right)^{\alpha_1}\log^l N, & \alpha_1>0,\\ \log^{l+1}N, & \alpha_1=0,\\ 1, & \alpha_1<0.\end{cases} \tag{4.1.3}$$

Лемма 4.1.2. *Пусть $r,\alpha\in\overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^d_+$, $\frac{\alpha_1}{r_1}=\ldots=\frac{\alpha_{l+1}}{r_{l+1}}<\frac{\alpha_{l+2}}{r_{l+2}}\leq\ldots\leq\frac{\alpha_d}{r_d}$, $\mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}}=N$. Тогда*

$$\sum_{\langle s,r\rangle>\mu}2^{-\langle s,\alpha\rangle}\asymp\mu^l 2^{-\frac{\alpha_1}{r_1}\mu}\asymp\left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{\alpha_1}. \tag{4.1.4}$$

Доказательства лемм 4.1.1 и 4.1.2 содержатся в работе [1982b] и здесь мы их не приводим.

Лемма 4.1.3. *Пусть* $K \subset \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d$, $|K| = N$, $N_s = |\square_s \cap K|$, $s \in \mathbb{N}^d$, $r \in \mathbb{R}^d$, $r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \leq \ldots \leq r_d$, $\theta > 0$. *Тогда*

$$I := \sum_s N_s^\theta 2^{\langle s,r\rangle} \gg \frac{N^{r_1+\theta}}{\log^{l(r_1+\theta-1)_+} N},\ \theta > 1,\ r_1 > 0 \text{ или } \theta \leq 1,\ r_1 \geq 0.$$

Доказательство. а) Пусть $\theta \geq 1,\ r_1 > 0$. Обозначим через $\beta \in \mathbb{R}^d$ вектор с координатами $\beta_i = r_i$, $i = 1, \ldots, l+1$; $\beta_1 < \beta_i < r_i$, $i = l+2, \ldots, d$. Выберем величину $\mu > 0$ так, чтобы

$$\sum_{\langle s,\beta\rangle \leq \mu} N_s \leq \sum_{\langle s,\beta\rangle \leq \mu} 2^{\langle s,1\rangle} \leq C\mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} \leq \frac{N}{2} \text{ и } N \asymp \mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}}.$$

По неравенству 1.1.2 (Гельдера для сумм) при $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$

$$\frac{N}{2} \leq \sum_{\langle s,\beta\rangle > \mu} N_s = \sum_{\langle s,\beta\rangle > \mu} N_s 2^{\frac{\langle s,r\rangle}{\theta}} 2^{-\frac{\langle s,r\rangle}{\theta}} \leq$$
$$\leq \Bigg(\sum_{\langle s,\beta\rangle > \mu} N_s^\theta 2^{\langle s,r\rangle}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \Bigg(\sum_{\langle s,\beta\rangle > \mu} 2^{-\frac{\langle s,r\rangle\theta'}{\theta}}\Bigg)^{\frac{1}{\theta'}} \ll I^{\frac{1}{\theta}} \mu^{\frac{l}{\theta'}} 2^{-\frac{\mu}{\theta}}.$$

Отсюда получаем нужную оценку для I:

$$I \gg N^\theta \mu^{-\frac{l\theta}{\theta'}} 2^\mu \asymp \frac{N^{r_1+\theta}}{\log^{l(r_1+\theta-1)_+} N}.$$

б) Пусть $0 < \theta \leq 1$, $r_1 > 1 - \theta$. Тогда, поскольку $N_s \leq 2^{\langle s,1\rangle}$, то по доказанному

$$I = \sum_s N_s 2^{\langle s,r\rangle} N_s^{\theta-1} \geq \sum_s N_s 2^{\langle r+\theta-1,s\rangle} \overset{a)}{\gg} \frac{N^{r_1+\theta}}{\log^{l(r_1+\theta-1)_+} N}.$$

в) Пусть $\theta \leq 1,\ 0 \leq r_1 \leq 1 - \theta$. Тогда, поскольку $2^{\langle s,1\rangle} \geq N_s$, то

$$I \geq \sum_s N_s^\theta 2^{r_1\langle s,1\rangle} \geq \sum_s N_s^{\theta+r_1} \geq \Big(\sum_s N_s\Big)^{\theta+r_1} = N^{\theta+r_1}. \qquad \square$$

Лемма 4.1.4. *Пусть* $K \subset \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d$, $|K| = N$, $N_s = |\square_s \cap K|$ $(N_s \in \mathbb{Z}_+$, $N_s \le 2^{\langle s,1\rangle}$ $\forall\ s \in \mathbb{N}^d)$, $r \in \mathbb{R}^d$, $r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \le \ldots \le r_d$, $\mu > 0$, $N_1 = \sum\limits_{\langle s,1\rangle \le \mu} N_s$, $N_2 = \sum\limits_{\langle s,1\rangle > \mu} N_s$, $\theta > 1$. *Тогда*

$$I_1 := \sum_{\langle s,1\rangle \le \mu} N_s^\theta 2^{\langle s,r\rangle} \gg \begin{cases} N_1^\theta \mu^{l(1-\theta)} 2^{r_1\mu}, & r_1 < 0, \\ N_1^\theta \mu^{(l+1)(1-\theta)}, & r_1 = 0; \end{cases}$$

$$I_2 := \sum_{\langle s,1\rangle > \mu} N_s^\theta 2^{\langle s,r\rangle} \gg N_2^\theta \mu^{l(1-\theta)} 2^{r_1\mu},\ r_1 > 0.$$

Доказательство. Оценки следуют из неравенства Гельдера и лемм 4.1.1 и 4.1.2:

$$1)\ N_1 = \sum_{\langle s,1\rangle \le \mu} N_s = \sum_{\langle s,1\rangle \le \mu} N_s 2^{\langle s,r\rangle\theta} 2^{-\frac{\langle s,r\rangle}{\theta}} \le$$

$$\le \Bigg(\sum_{\langle s,1\rangle \le \mu} N_s^\theta 2^{\langle s,r\rangle}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \Bigg(\sum_{\langle s,1\rangle \le \mu} 2^{-\frac{\langle s,r\rangle\theta'}{\theta}}\Bigg)^{\frac{1}{\theta'}} \ll I_1^{\frac{1}{\theta}} \times \begin{cases} \mu^{\frac{l}{\theta'}} 2^{-\frac{r_1\mu}{\theta}}, & r_1 < 0, \\ \mu^{\frac{l+1}{\theta'}}, & r_1 = 0, \end{cases} \tag{4.1.5}$$

$\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$. Отсюда получаются нужные неравенства для I_1.

$$2)\ N_2 = \sum_{\langle s,1\rangle > \mu} N_s = \sum_{\langle s,1\rangle > \mu} N_s 2^{\frac{\langle s,r\rangle}{\theta}} 2^{-\frac{\langle s,r\rangle}{\theta}} \le$$

$$\le \Bigg(\sum_{\langle s,1\rangle > \mu} N_s^\theta 2^{\langle s,r\rangle}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \Bigg(\sum_{\langle s,1\rangle > \mu} 2^{-\frac{\langle s,r\rangle\theta'}{\theta}}\Bigg)^{\frac{1}{\theta'}} \ll I_2^{\frac{1}{\theta}} \mu^{\frac{l}{\theta'}} 2^{-\frac{r_1\mu}{\theta}},\ r_1 > 0, \tag{4.1.6}$$

$\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$, откуда $I_2 \gg N_2^\theta \mu^{l(1-\theta)} 2^{r_1\mu}$. $\square$

Лемма 4.1.5. *Пусть* $N_s \in \mathbb{Z}_+$, $N_s \le 2^{\langle s,1\rangle}$ $\forall\ s \in \mathbb{N}^d$, $\sum\limits_s N_s = N$, $r \in \mathbb{R}^d$, $r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \le \ldots \le r_d$, $q > 0$. *Тогда*

$$I := \sup_s N_s^{\frac{1}{q}} 2^{\langle s,r\rangle} \gg \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{\frac{1}{q}+r_1}.$$

Доказательство. Обозначим через $\beta \in \mathbb{R}^d$ вектор с координатами $\beta_i = r_i$, $i = 1, \dots, l+1$; $\beta_1 < \beta_i < r_i$, $i = l+2, \dots, d$. Выберем величину $\mu > 0$ так, чтобы

$$\sum_{\langle s,\beta\rangle \le \mu} N_s \le \sum_{\langle s,\beta\rangle \le \mu} 2^{\langle s,1\rangle} \le C\mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} \le \frac{N}{2} \text{ и } N \asymp \mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}}.$$

Поскольку $I \ge N_s^{\frac{1}{q}} 2^{\langle s,r\rangle}$, то $N_s \le I^q 2^{-q\langle s,r\rangle}$ и, следовательно,

$$\frac{N}{2} \le \sum_{\langle s,\beta\rangle > \mu} N_s \le I^q \sum_{\langle s,\beta\rangle > \mu} 2^{-q\langle s,r\rangle} \ll I^q \mu^l 2^{-q\mu}.$$

Отсюда получаем нужную оценку снизу для I:

$$I \gg N^{\frac{1}{q}} \mu^{-\frac{l}{q}} 2^{\mu} \asymp \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{\frac{1}{q}+r_1}. \qquad \square$$

4.1.2 Нормы производных ядер Дирихле и Фавара

В этом пункте, используя методы вычислений норм ядер одномерного случая, определяются порядки норм производных ядер Дирихле в многомерном случае $D^{(\beta)}_{\alpha,\mu}(t) = \sum\limits_{\langle s,\alpha\rangle \le \mu} \delta^{(\beta)}_s(t)$ и Фавара $F^{(\beta)}_{\alpha,\mu}(t) = \sum\limits_{\langle s,\alpha\rangle > \mu} \delta^{(\beta)}_s(t)$, $\delta_s(t) = \sum\limits_{k \in \square_s} e^{i\langle k,t\rangle}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^d$, в пространстве с векторной нормой $L_p(\mathbb{T}^d)$, $p = (p_1, \dots, p_d)$.

Теорема 4.1.3 (о норме производной многомерного ядра Дирихле [1982b]). *Пусть* $\alpha, \beta, p \in \mathbb{R}^d$, $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, $\gamma_i = \big(\beta_i + 1 - \frac{1}{p_i}\big)/\alpha_i$, $i = 1, \dots, d$, $\gamma_{i_1} = \dots = \gamma_{i_{l+1}} > \gamma_{i_{l+2}} \ge \dots \ge \gamma_{i_d}$, $i_1 < \dots < i_{l+1}$, $\gamma = \gamma(\alpha,\beta,p) = \gamma_{i_1}$, $\delta = \delta(\alpha,\beta,p) = \sum\limits_{j=2}^{l+1} \frac{1}{p_{i_j}}$, $\sigma = \sigma(\alpha,\beta,p) = \sum\limits_{j=1}^{l+1} \frac{1}{p_{i_j}}$. *Тогда*

$$\big\|D^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\big\|_{L_p} \asymp \begin{cases} \mu^\delta 2^{\mu\gamma}, & \gamma > 0, \\ \mu^\sigma, & \gamma = 0, \\ 1, & \gamma < 0, \end{cases} \asymp \begin{cases} \log^\delta N \left(\dfrac{N}{\log^{l'} N}\right)^{\beta_i + 1 - \frac{1}{p_i}}, & \gamma > 0, \\ \log^\sigma N, & \gamma = 0, \\ 1, & \gamma < 0, \end{cases}$$

где $\alpha_{j_1} = \ldots = \alpha_{j_{l'+1}} < \alpha_{j_{l'+2}} \le \ldots \le \alpha_{j_d}$, $\mu^{l'} 2^{\frac{\mu}{\alpha_{j_1}}} = N$ — *порядок числа гармоник в ядре Дирихле.*

Доказательство. Доказательство теоремы проведем по индукции. При $d = 1$ утверждение верно в силу замечания к теореме 4.1.1. Предположим, что оно выполняется для размерности $d-1$. Выведем отсюда утверждение теоремы для d, строя доказательство, как и в теореме 4.1.1.

Оценка сверху. В силу теоремы 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли)

$$\|D^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\|_p \asymp \Big\|\Big(\sum_{\langle s,\alpha\rangle\le\mu} |2^{\langle s,\beta\rangle}\delta_s|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p =$$

$$= \Big\|\Big(\sum_{\alpha_d s_d\le\mu} |2^{\beta_d s_d}\delta_{s_d}(t_d)|^2 \sum_{\langle\alpha',s'\rangle\le\mu-\alpha_d s_d} |2^{\langle\beta',s'\rangle}\delta_{s'}(t')|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p,$$

где штрих означает, что рассматриваются соответствующие векторы с$(d-1)$-й первыми координатами. Пользуясь последовательно неравенством 1.1.6, неравенством Минковского и теоремой 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли) получаем, что

$$\|D^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\|_p \ll \Big\|\sum_{\alpha_d s_d\le\mu} |2^{\beta_d s_d}\delta_{s_d}|\Big(\sum_{\langle\alpha',s'\rangle\le\mu-\alpha_d s_d} |2^{\langle\beta',s'\rangle}\delta_{s'}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p \le$$

$$\le \Big\|\sum_{\alpha_d s_d\le\mu} |2^{\beta_d s_d}\delta_{s_d}|\Big\|\Big(\sum_{\langle\alpha',s'\rangle\le\mu-\alpha_d s_d} |2^{\langle\beta',s'\rangle}\delta_{s'}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{p'}\Big\|_{p_d} \asymp$$

$$\asymp \Big\|\sum_{\alpha_d s_d\le\mu} |2^{\beta_d s_d}\delta_{s_d}|\Big\|D_{\alpha',\mu-\alpha_d s_d}\|_{p'}\Big\|_{p_d} = \Big\|\sum_{\alpha_d s_d\le\mu} f_{s_d}\Big\|_{p_d}. \quad (4.1.7)$$

Отметим, что в силу неравенства треугольника для норм и в силу оценки леммы 1.3.1

$$\|D^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\|_p \ll \sum_{\langle s,\alpha\rangle\le\mu} \|\delta^{(\beta)}_s\|_p \asymp \sum_{\langle s,\alpha\rangle\le\mu} 2^{\langle s,\beta+1-\frac{1}{p}\rangle}.$$

По лемме 4.1.1 из этого соотношения следуют оценки сверху при $\gamma > 0$, $\delta = 0$ и при $\gamma < 0$.

Из соотношения (4.1.7) в силу неравенства треугольника и в силу оценки леммы 1.3.1 вытекает, что

$$\|D^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\|_p \ll \sum_{\alpha_d s_d \le \mu} 2^{\alpha_d s_d \gamma_d} \|D^{(\beta')}_{\alpha',\mu-\alpha_d s_d}(t')\|_{p'}. \qquad (4.1.8)$$

Если $\gamma' > 0$, то по предположению индукции из соотношения (4.1.8) следует, что

$$\|D^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\|_p \ll \sum_{\alpha_d s_d \le \mu} \left((\mu - \alpha_d s_d)^{\delta'} + 1\right) 2^{\mu\gamma' + \alpha_d s_d(\gamma_d - \gamma')}.$$

Отсюда, суммируя по s_d, получаем оценку сверху для случая $\gamma_d < \gamma'$ $(\delta = \delta')$.

Если $\gamma' = 0$, то по предположению индукции из неравенства (4.1.8) вытекает, что

$$\|D^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\|_p \ll \sum_{\alpha_d s_d \le \mu} \left((\mu - \alpha_d s_d)^{\sigma'} + 1\right) 2^{\alpha_d s_d \gamma_d}.$$

Отсюда, суммируя по s_d, получаем оценку сверху для случая $\gamma_d < \gamma' = 0$ $(\sigma = \sigma')$.

Рассмотрим оставшиеся случаи. Из соотношения (4.1.7), разбивая отрезок интегрирования по переменной t_d на области T_k и пользуясь неравенством для средних (1.1.10), выводим, что

$$\|D^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\|_p \ll \left(\sum_{k \le \mu/\alpha_d} \int_{T_k} \left(\sum_{s_d < k} f_{s_d}(t_d) \right)^{p_d} dt_d \right)^{\frac{1}{p_d}} +$$

$$+ \left(\sum_{k \le \frac{\mu}{\alpha_d}} \int_{T_k} \left(\sum_{k \le s_d \le \frac{\mu}{\alpha_d}} f_{s_d}(t_d) \right)^{p_d} dt_d \right)^{\frac{1}{p_d}} + \left(\sum_{k > \frac{\mu}{\alpha_d}} \int_{T_k} \left(\sum_{s_d \le \frac{\mu}{\alpha_d}} f_{s_d}(t_d) \right)^{p_d} dt_d \right)^{\frac{1}{p_d}}.$$

Интегрируя по t_d, используя оценки (4.1.3) и (4.1.4), получаем, что

$$\left\|D^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\right\|_p \ll \left(\sum_{k\le\mu/\alpha_d} 2^{-k}\left(\sum_{s_d<k} 2^{s_d(\beta_d+1)}\left\|D^{(\beta')}_{\alpha',\mu-\alpha_d s_d}(t')\right\|_{p'}\right)^{p_d}\right)^{\frac{1}{p_d}} +$$

$$+\left(\sum_{k\le\mu/\alpha_d} 2^{k(p_d-1)}\left(\sum_{k\le\alpha_d s_d\le\mu} 2^{s_d\beta_d}\left\|D^{(\beta')}_{\alpha',\mu-\alpha_d s_d}(t')\right\|_{p'}\right)^{p_d}\right)^{\frac{1}{p_d}} +$$

$$+\left(\sum_{k>\mu/\alpha_d} 2^{-k}\left(\sum_{\alpha_d s_d\le\mu} 2^{s_d(\beta_d+1)}\left\|D^{(\beta')}_{\alpha',\mu-\alpha_d s_d}(t')\right\|_{p'}\right)^{p_d}\right)^{\frac{1}{p_d}}.$$

Заметим, что третье слагаемое в последнем соотношении не превышает первого.

1) Пусть $\gamma>0$, $\delta\ne 0$, $\gamma_d\ge\gamma'$. Тогда $\gamma=\gamma_d=\gamma'>0$, $\delta=\delta'+\frac{1}{p_d}$ и по предположению индукции

$$\|D^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\|_p \ll \left(\sum_{k\le\mu/\alpha_d} 2^{-k}\left(\sum_{s_d<k}((\mu-\alpha_d s_d)^{\delta'}+1)2^{\mu\gamma'+s_d/p_d}\right)^{p_d}\right)^{\frac{1}{p_d}} +$$

$$+\left(\sum_{k\le\mu/\alpha_d} 2^{k(p_d-1)}\left(\sum_{k\le\alpha_d s_d\le\mu}((\mu-\alpha_d s_d)^{\delta'}+1)^{\mu\gamma'-s_d(1-\frac{1}{p_d})}\right)^{p_d}\right)^{\frac{1}{p_d}}.$$

Заменяя величину $\mu-\alpha_d s_d$ большей величиной μ и суммируя по s_d, получаем для обоих слагаемых одинаковую оценку, и следовательно,

$$\left\|D^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\right\|_p \ll \left(\sum_{k\le\mu/\alpha_d} \mu^{\delta' p_d} 2^{\mu\gamma p_d}\right)^{\frac{1}{p_d}} \asymp \mu^{\delta}2^{\mu\gamma}.$$

2) Пусть $\gamma=0$.

а) Предположим, что $\gamma'=0$. Тогда осталось рассмотреть случай $\gamma_d=0$, и следовательно, $\sigma=\sigma'+\frac{1}{p_d}$. По предположению индукции

$$\left\|D_{\alpha,\mu}^{(\beta)}\right\|_p \ll \left(\sum_{k\le\mu/\alpha_d} 2^{-k}\left(\sum_{s_d<k}((\mu-\alpha_d s_d)^{\sigma'}+1)2^{s_d/p_d}\right)^{p_d}\right)^{\frac{1}{p_d}}+$$

$$+\left(\sum_{k\le\mu/\alpha_d} 2^{k(p_d-1)}\left(\sum_{k\le\alpha_d s_d\le\mu}((\mu-\alpha_d s_d)^{\sigma'}+1)2^{s_d(\frac{1}{p_d}-1)}\right)^{p_d}\right)^{\frac{1}{p_d}}.$$

Заменяя величину $\mu-\alpha_d s_d$ большей величиной μ и суммируя по s_d, получим для обоих слагаемых одинаковую оценку, и поэтому

$$\left\|D_{\alpha,\mu}^{(\beta)}\right\|_p \ll \left(\sum_{k\le\mu/\alpha_d}\mu^{\sigma' p_d}\right)^{\frac{1}{p_d}} \asymp \mu^{\sigma}.$$

б) Предположим, что $\gamma'<0$, тогда $\gamma=\gamma_d=0$, $\beta_d<0$, $\sigma=\frac{1}{p_d}$, и по предположению индукции

$$\left\|D_{\alpha,\mu}^{(\beta)}\right\|_p \ll \left(\sum_{k\le\mu/\alpha_d} 2^{-k}\left(\sum_{s_d<k}2^{s_d/p_d}\right)^{p_d}\right)^{\frac{1}{p_d}}+$$

$$+\left(\sum_{k\le\mu/\alpha_d} 2^{k(p_d-1)}\left(\sum_{k\le\alpha_d s_d\le\mu}2^{-s_d\beta_d}\right)^{p_d}\right)^{\frac{1}{p_d}}.$$

Суммируя по s_d, получаем для обоих слагаемых одинаковую оценку, следовательно,

$$\left\|D_{\alpha,\mu}^{(\beta)}\right\|_p \ll \left(\sum_{k\le\mu/\alpha_d}1\right)^{\frac{1}{p_d}} \asymp \mu^{\frac{1}{p_d}}.$$

Оценка снизу. По теореме 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли)

$$\left\|D_{\alpha,\mu}^{(\beta)}\right\|_p \gg \left\|\delta_d^{(\beta_{i_d})}\left(\sum_{\langle\alpha'',s''\rangle\ge\mu-\alpha_{i_d}}|\delta_{s''}^{(\beta'')}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \asymp \|D_{\alpha'',\mu-\alpha_{i_d}}^{(\beta'')}\|_{p''},$$

где два штриха означают, что рассматриваются соответствующие вектора без i_d-й координаты. По предположению индукции отсюда следуют оценки снизу при $\gamma_{i_d}<\gamma$ и при $\gamma<0$.

Осталось рассмотреть случай, когда $\gamma_1 = \ldots = \gamma_d = \gamma$. В силу теоремы 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли)

$$\left\|D_{\alpha,\mu}^{(\beta)}\right\|_p \asymp \left\|\left(\sum_{\langle s,\alpha\rangle\le\mu} |2^{\langle s,\beta\rangle}\delta_s|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p.$$

Разобьем отрезок интегрирования по переменной t_d на области $_k$ и в сумме по s возьмем только слагаемые с $s_d = k$. Тогда

$$\left\|D_{\alpha,\mu}^{(\beta)}\right\|_p \gg \left(\sum_{k\le\mu/\alpha_d}\int_{T_{k+1}} \left\|2^{\beta_d k}\delta_k\left(\sum_{\langle\alpha',s'\rangle\le\mu-\alpha_d k} |2^{\langle\beta',s'\rangle}\delta_{s'}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{p'}^{p_d} dt_d\right)^{\frac{1}{p_d}}.$$

Используя оценку (4.1.4) и теорему 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли), получаем, что

$$\left\|D_{\alpha,\mu}^{(\beta)}\right\|_p \gg \left(\sum_{k\le\mu/\alpha_d} 2^{kp_d\alpha_d\gamma}\|D_{\alpha',\mu-\alpha_{i_d}k}^{(\beta')}\|_{p'}^{p_d}\right)^{\frac{1}{p_d}}.$$

1) Пусть $\gamma > 0$. Следовательно, по предположению индукции

$$\left\|D_{\alpha,\mu}^{(\beta)}\right\|_p \gg \left(\sum_{k\le\mu/\alpha_d} (\mu-\alpha_d k)^{\delta' p_d} 2^{\mu p_d\gamma}\right)^{\frac{1}{p_d}}.$$

Суммируя по k, приходим к искомой оценке снизу.

2) Пусть $\gamma = 0$. Тогда по предположению индукции

$$\left\|D_{\alpha,\mu}^{(\beta)}\right\|_p \gg \left(\sum_{k\le\mu/\alpha_d} (\mu-\alpha_d k)^{\sigma' p_d}\right)^{\frac{1}{p_d}}.$$

Суммируя по k, приходим к искомой оценке снизу. Оценка снизу, а вместе с ней и теорема 4.1.3 полностью доказаны. □

Теорема 4.1.4 (о норме производной многомерного ядра Фавара [1982b]). *Пусть* $\alpha, \beta, p \in \mathbb{R}^d$, $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, $\gamma_i = \left(\beta_i + 1 - \frac{1}{p_i}\right)/\alpha_i$, $i = 1, \ldots, d$, $\gamma_{i_1} = \ldots = \gamma_{i_{l+1}} > \gamma_{i_{l+2}} \ge \ldots \ge \gamma_{i_d}$, $i_1 <$

$\ldots < i_{l+1}$, $\gamma = \gamma(\alpha,\beta,p) = \gamma_{i_1}$, $\delta = \delta(\alpha,\beta,p) = \sum\limits_{j=2}^{l+1} \frac{1}{p_{i_j}}$. Функция $F^{(\beta)}_{\alpha,\mu} \in L_p(\mathbb{T}^d)$ тогда и только тогда, когда $\gamma < 0$. И если $\gamma < 0$, то

$$\left\|F^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\right\|_{L_p} \asymp \mu^{\delta} 2^{\mu\gamma} \asymp \log^{\delta} N \left(\frac{N}{\log^{l'} N}\right)^{\beta_i+1-\frac{1}{p_i}},$$

где $\alpha_{j_1} = \ldots = \alpha_{j_{l'+1}} < \alpha_{j_{l'+2}} \leq \ldots \leq \alpha_{j_d}$, $\mu^{l'} 2^{\frac{\mu}{\alpha_{j_1}}} = N$ — порядок числа гармоник вне ядра Фавара.

Доказательство. Доказательство теоремы при $\gamma < 0$ проведем по индукции. При $d = 1$ утверждение теоремы верно в силу замечания к теореме 4.1.2. Предположим, что оно выполняется для размерности $d-1$. Выведем отсюда утверждение теоремы для d.

Оценка сверху. В силу неравенства треугольника для норм

$$\left\|F^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\right\|_p = \left\|\sum_{\langle s,\alpha\rangle>\mu} \delta^{(\beta)}_s\right\|_p = \left\|\sum_{\substack{s_d\leq\mu/\alpha_d \\ \langle\alpha',s'\rangle>\mu-\alpha_d s_d}} \delta^{(\beta)}_s + \sum_{\substack{s_d>\mu/\alpha_d \\ s'>0'}} \delta^{(\beta)}_s\right\|_p \leq$$

$$\leq \left\|\sum_{\substack{s_d\leq\mu/\alpha_d \\ \langle\alpha',s'\rangle>\mu-\alpha_d s_d}} \delta^{(\beta)}_s\right\|_p + \left\|\sum_{s_d>\mu/\alpha_d} \delta^{(\beta_d)}_{s_d}\right\|_{p_d} \prod_{i=1}^{d-1} \Big\|\sum_{s_i>0} \delta^{(\beta_i)}_{s_i}\Big\|_{p_i} = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Так как $\gamma_i < 0$, $i = 1,\ldots,d$, то по теореме 4.1.2 $\sum\limits_{s_i>0} \delta^{(\beta_i)}_{s_i}(\cdot) \in L_{p_i}$ и $\Big\|\sum\limits_{s_d>\mu/\alpha_d} \delta^{(\beta_d)}_{s_d}(t_d)\Big\|_{p_d} \asymp 2^{\mu\gamma_d}$, $\gamma_d \leq \gamma$. Поэтому Σ_2 удовлетворяет искомой оценке сверху.

В силу неравенства треугольника для норм, оценки леммы 1.3.1 и предположения индукции

$$\Sigma_1 \ll \sum_{s_d\leq\mu/\alpha_d} \left\|\delta^{(\beta_d)}_{s_d}(t_d)\right\|_{p_d} \left\|F^{(\beta')}_{\alpha',\mu-\alpha_d s_d}(t')\right\|_{p'} \ll$$

$$\ll \sum_{s_d\leq\mu/\alpha_d} ((\mu-\alpha_d s_d)^{\delta'}+1) 2^{\mu\gamma'+\alpha_d s_d(\gamma_d-\gamma')}).$$

Если $\gamma_d > \gamma'$, то $\gamma = \gamma_d$, $\delta = 0$ и, суммируя по s_d, приходим к искомой оценке сверху для Σ_1. Если $\gamma_d < \gamma'$, то $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$, $\mu - \alpha_d s_d \le \mu$ и, суммируя по s_d, получим правильную оценку для Σ_1. Если $\gamma_d = \gamma'$, то, поступая точно так же, как и при доказательстве оценки сверху в теореме 4.1.3, приходим к искомой оценке сверху.

Оценка снизу. По теореме 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли)

$$\|F^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\|_p \asymp \Bigg\|\Bigg(\sum_{\langle s,\alpha\rangle>\mu} |2^{\langle s,\beta\rangle}\delta_s|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg\|_p.$$

Разобьем отрезок интегрирования по переменной t_d на области $_k$ и в сумме по s возьмем только слагаемые с $s_d = k$. Тогда

$$\|F^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\|_p \gg \Bigg(\sum_{k\le\frac{\mu}{\alpha_d}} \int_{T_{k+1}} \Bigg\|2^{\beta_d k}\delta_k(t_d)\Bigg(\sum_{\langle\alpha',s'\rangle>\mu-\alpha_d k} |2^{\langle\beta',s'\rangle}\delta_{s'}(t')|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg\|^{p_d}_{p'} dt_d\Bigg)^{\frac{1}{p_d}}.$$

Используя оценку (4.1.4) и теорему 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли), получим, что

$$\|F^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\|_p \gg \Bigg(\sum_{k\le\mu/\alpha_d} 2^{kp_d\alpha_d\gamma_d}\|F^{(\beta')}_{\alpha',\mu-\alpha_d k_d}\|^{p_d}_{p'}\Bigg)^{\frac{1}{p_d}}.$$

По предположению индукции

$$\|F^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\|_p \gg \Bigg(\sum_{k\le\mu/\alpha_d} (\mu-\alpha_d k)^{\delta' p_d} 2^{\mu p_d\gamma' + kp_d\alpha_d(\gamma_d-\gamma')}\Bigg)^{\frac{1}{p_d}}.$$

Если $\gamma_d > \gamma'$, то $\gamma = \gamma_d$, $\delta = 0$, и оценка снизу получается при одном слагаемом с $k = [\mu/\alpha_d] - 1$. Если $\gamma_d = \gamma'$, то $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta' + \frac{1}{p_d}$, $\mu - \alpha_d k \ge \mu/2$ при $k \le \mu/(2\alpha_d)$ и, суммируя по $k \le \mu/(2\alpha_d)$, вновь получаем искомую оценку снизу. Если $\gamma_d < \gamma'$, то $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$, и оценка снизу получается при одном слагаемом с $k = 0$.

Предположим $\gamma \ge 0$. Тогда утверждение, что $F^{(\beta)}_{\alpha,\mu} \notin L_p$, с помощью теоремы Литтльвуда-Пэли легко выводится из своего одномерного случая. Теорема 4.1.4 полностью доказана. $\square$

В пространстве $L_\infty(\mathbb{T}^d)$ нормы производных ядер Дирихле и Фавара будут найдены для функций $\widehat{D}_{\alpha,\mu} = \sum\limits_{\langle s,\alpha\rangle\le\mu} \widehat{\delta}_s$ и $\widehat{F}_{\alpha,\mu} = \sum\limits_{\langle s,\alpha\rangle>\mu} \widehat{\delta}_s$ соответственно, $\widehat{\delta}_s(t) = \sum\limits_{k\in\widehat{\square}_s} e^{i\langle k,t\rangle}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^d$, $\widehat{\square}_s = \{k \in \square_s \mid k > 0\}$.

Теорема 4.1.5. *Пусть $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^d$, $\alpha>0$, $\gamma_i = (\beta_i+1)/\alpha_i$, $i = 1,\dots,d$, $\gamma = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{l+1} > \gamma_{l+2} \ge \ldots \ge \gamma_d$. Тогда*

$$\|\widehat{D}^{(\beta)}_{\alpha,\mu}(\cdot)\|_\infty \asymp \begin{cases} \mu^l 2^{\mu\gamma}, & \gamma>0,\\ \mu^{l+1}, & \gamma=0,\\ 1, & \gamma<0.\end{cases}$$

Доказательство. Доказательство теоремы следует из определения функции $\widehat{D}^{(\beta)}_{\alpha,\mu}$ и леммы 4.1.1:

$$\|\widehat{D}^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\|_\infty = \Bigg|\sum_{\langle s,\alpha\rangle\le\mu}\sum_{k\in\widehat{\square}_s}(ik)^\beta\Bigg| = \Bigg|\sum_{\langle s,\alpha\rangle\le\mu}\sum_{k\in\widehat{\square}_s}k^\beta e^{i\langle\beta,1\rangle\pi/2}\Bigg| =$$

$$= \sum_{\langle s,\alpha\rangle\le\mu}\sum_{k\in\widehat{\square}_s}k^\beta \asymp \sum_{\langle s,\alpha\rangle\le\mu}\sum_{k\in\widehat{\square}_s}2^{\langle s,\beta\rangle} \asymp \sum_{\langle s,\alpha\rangle\le\mu}2^{\langle\beta+1,s\rangle}. \qquad \square$$

Теорема 4.1.6. *Пусть $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^d$, $\alpha>0$, $\gamma_i = (\beta_i+1)/\alpha_i$, $i = 1,\dots,d$, $\beta<-1$, $\gamma = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{l+1} > \gamma_{l+2} \ge \ldots \ge \gamma_d$. Тогда*

$$\|\widehat{F}^{(\beta)}_{\alpha,\mu}(\cdot)\|_\infty \asymp \mu^l 2^{\mu\gamma}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы следует из определения функции $\widehat{F}^{(\beta)}_{\alpha,\mu}$ и леммы 4.1.1:

$$\|\widehat{F}^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\|_\infty = \Bigg|\sum_{\langle s,\alpha\rangle>\mu}\sum_{k\in\widehat{\square}_s}(ik)^\beta\Bigg| \asymp \sum_{\langle s,\alpha\rangle>\mu}2^{\langle\beta+1,s\rangle} \asymp \mu^l 2^{\mu\gamma}. \qquad \square$$

Отметим работы Темлякова [1983?], [1980a]–[1980c], в которых определяется величина близкая к $\|F^{(\beta)}_{\alpha,\mu}\|$ в скалярной метрике L_p,а также работы А. А. и В. А. Юдиных [1977] и Э. С. Белинского [1977], [1989] о нормах ядер Дирихле в метрике L_1.

4.2 Минимальные нормы ядер Дирихле и Фавара

В этом пункте определяются порядки величин

$$L_N(r,q) = \inf_{K_N} \left\| \left(\sum_{k \in K_N} e^{i\langle k,\cdot\rangle} \right)^{(r)} \right\|_q,$$

$$F_N(r,q) = \inf_{K_N} \left\| \left(\sum_{k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d \setminus K_N} e^{i\langle k,\cdot\rangle} \right)^{(-r)} \right\|_q,$$

где $r \in \mathbb{R}^d$, $1 < q < \infty$, $K_N \subset \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d$, $\operatorname{card} K_N = N$, являющихся нормами многомерных ядер Дирихле и Фавара минимальных по выбору N гармоник.

Для функций одной переменной величина $L_N(r,q)$ была введена В. Е. Майоровым [1986], [1990] и найдена им при $1 \le q \le 2$, $r \ge 0$; $2 < q < \infty$, $r > \frac{1}{q}$; $q = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < r < \frac{1}{q}$. Отметим также работу Э. С. Белинского [1991], в которой определяется величина $L_N(r,q)$ при $2 < q < \infty$, $r \le \frac{1}{q}$. Случай $2 < q < \infty$, $r < \frac{1}{q}$, одновременно с Белинским независимо получен С. В. Конягиным.

Для функций многих переменных величина $L_N(r,q)$ при больших гладкостях (случаи а) и б) теоремы 4.2.1) определена в работах Галеева [1987c], [1991b], для малых гладкостей (случаи в) и г)) — в совместной работе Белинского и Галеева [1991]. Оценки сверху доказаны Белинским, оценки снизу — Галеевым.

Для случая больших гладкостей в теоремах 4.2.1 и 4.2.2 оптимальным является набор гармоник соответственно внутри и вне ступенчатого гиперболического креста. Нормы ядер Дирихле и Фавара в этих случаях подсчитаны в п. 4.2. Основной трудностью в этих теоремах является доказательство оценок снизу.

Теорема 4.2.1 (о норме производной многомерного ядра Дирихле, минимальной по выбору гармоник). *Пусть* $r \in \mathbb{R}^d$, $r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \le \ldots \le r_d$, $1 < q < \infty$. *Тогда* $L_N(r, q) = 0$ *при* $r_1 < 0$, *и если* $r_1 \ge 0$, *то*

$$L_N(r,q) \asymp \begin{cases} \dfrac{N^{r_1+1-\frac{1}{q}}}{\log^{l(r_1+1-\frac{2}{q})_+} N}, & q > 2,\ r_1 > \frac{1}{q},\ \text{(а)} \\ & q \le 2,\ r_1 \ge 0;\ \text{(б)} \\ N/\log^{(l+1)(1-\frac{1}{q})} N, & q > 2,\ r_1 = \frac{1}{q};\ \text{(в)} \\ N^{\frac{qr_1+1}{2}}/\log^{l(q-1)r_1} N, & q > 2,\ r_1 < \frac{1}{q}.\ \text{(г)} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $r_1 < 0$. Для оценки сверху положим $K = \{k = (k, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d \mid k = M+1, \ldots, M+N\}$, $M = N, N+1, \ldots$, $T(t) = \sum\limits_{k \in K} e^{i\langle k,t\rangle}$. Тогда $|K| = N$ и

$$L_N(r,q) \le \inf_M \|T^{(r)}\|_q \asymp \inf_M M^{r_1} N^{1-\frac{1}{q}} = 0.$$

Оценка снизу в силу неравенства $L_N(r,q) \ge 0$ очевидна.

Перейдем к основному случаю $r_1 \ge 0$. Оценки сверху. а–б') Пусть $r_1 > \frac{1}{q}$, $q \ge 2$ или $q \le 2$, $r_1 + 1 - \frac{2}{q} > 0$. При этих условиях $r_1 > 0$. Положим $K = \bigcup\limits_{\langle s,r\rangle \le \mu} \square_s$, $T(t) = \sum\limits_{k\in K} e^{i\langle k,t\rangle}$, где величина μ выбирается из условия $N = \mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}}$. Тогда $|K| = \sum\limits_{\langle s,r\rangle\le\mu} |\square_s| = \sum\limits_{\langle s,r\rangle\le\mu} 2^{\langle s,1\rangle} \overset{(4.1.3)}{\asymp} \mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}} = N$. Поскольку у нас $r_1 + 1 - \frac{1}{q} > 0$, то по теореме 4.1.3

$$L_N(r,q) \le \|T^{(r)}\|_q \asymp \mu^{\frac{l}{q}} 2^{\frac{\mu}{r_1}(r_1+1-\frac{1}{q})} \asymp N^{r_1+1-\frac{1}{q}}/\log^{l(r_1+1-\frac{2}{q})} N.$$

б') Пусть $q \le 2$, $0 \le r_1 \le \frac{2}{q} - 1$. Обозначим $K = \{k = (k_1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d \mid k_1 = 1, \ldots, N\}$, $T(t) = \sum\limits_{k\in K} e^{i\langle k,t\rangle}$. Тогда $|K| = N$ и по теореме 4.1.1

$$L_N(r,q) \le \|T^{(r)}\|_q \asymp N^{r_1+1-\frac{1}{q}}.$$

Для доказательства пунктов в) и г) нам понадобится следующая

Лемма 4.2.1. *Пусть* $2 \le q < \infty$, $K \subset \mathbb{Z}^d$, $T(K,t) = \sum\limits_{k\in K} e^{i\langle k,t\rangle}$. *Тогда для любого* $N \le |K|$ *найдется тригонометрический полином* $T(K',t) = a \sum\limits_{k\in K'} e^{i\langle k,t\rangle}$, $K' \subset K$, $|K'| \le N$, $|a| \le \frac{|K|}{N}$, *такой, что*

$$\|T(K,\cdot) - T(K',\cdot)\|_q \ll |K| N^{-\frac{1}{2}}.$$

Для простоты записи в пунктах в) и г) будем считать, что вектор $r = (r,\dots,r)$ имеет равные координаты, т. е. $l = d-1$.

в) Пусть $q > 2$, $r = \frac{1}{q}$. Положим $\mu = \frac{q}{2}\log_2 N - q\log_2 C$ $\left(\Leftrightarrow 2^\mu = N^{\frac{q}{2}}/C^q\right)$, константа C будет выбрана ниже. Для каждого $s \in S := \{s \in \mathbb{N}^d \mid \log_2 N \le \langle s,1\rangle \le \mu\}$ по лемме 4.2.1 построим тригонометрический полином $T_s(t) = T(\triangle_s, t) = a_s \sum\limits_{k\in\triangle_s} e^{i\langle k,t\rangle}$, $\triangle_s \subset \square_s$, $|\triangle_s| \le N$, $|a_s| \le \frac{2^{\langle s,1\rangle}}{N}$, такой, что

$$\|\delta_s - T_s\|_q \ll 2^{\langle s,1\rangle} N^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.2.1}$$

Покажем, что $|\triangle_s| \asymp N$ и $|a_s| \asymp \frac{2^{\langle s,1\rangle}}{N}$.

По неравенству Бернштейна–Никольского

$$\|\delta_s - T_s\|_\infty \le C_1 2^{\langle s,\frac{1}{q}\rangle} \|\delta_s - T_s\|_q \overset{(4.2.1)}{\le} C_2 2^{\langle s,\frac{1}{q}\rangle} 2^{\langle s,1\rangle} N^{-\frac{1}{2}} \le$$
$$\le C_2 2^{\frac{\mu}{q}} 2^{\langle s,1\rangle} N^{-\frac{1}{2}} \le C_2 N^{-\frac{1}{2}} C^{-1} 2^{\langle s,1\rangle} N^{-\frac{1}{2}} = \frac{C_2 2^{\langle s,1\rangle}}{C} = \frac{2^{\langle s,1\rangle}}{2}$$

при $C = 2C_2$. Откуда

$$\|T_s\|_\infty \ge \|\delta_s\|_\infty - \|\delta_s - T_s\|_\infty \ge 2^{\langle s,1\rangle} - \frac{2^{\langle s,1\rangle}}{2} = \frac{2^{\langle s,1\rangle}}{2}. \tag{4.2.2}$$

Поэтому $N \ge |\triangle_s| = \left|\frac{T_s(0)}{a_s}\right| = \frac{\|T_s\|_\infty}{|a_s|} \ge \|T_s\|_\infty \cdot \frac{N}{2^{\langle s,1\rangle}} \overset{(4.2.8)}{\ge} \frac{N}{2}$, $|a_s| \ge \frac{\|T_s\|_\infty}{N} \ge \frac{2^{\langle s,1\rangle}}{2N}$.

Полином $T(t) = \sum\limits_{s\in S} \frac{T_s(t)}{a_s} = \sum\limits_{s\in S}\sum\limits_{k\in\triangle_s} e^{i\langle k,t\rangle}$ имеет число гармоник $M = \sum\limits_{s\in S} |\triangle_s| \asymp N|S| \asymp N\log_2^d N$. Поэтому

$$L_M(r,q) \le \|T^{(r)}\|_q \asymp \left\|\sum_{s\in S} T_s^{(r)} N 2^{-\langle s,1\rangle}\right\|_q \le$$

$$\le \left\|\sum_{s\in S} \delta_s^{(r)} N 2^{-\langle s,1\rangle}\right\|_q + \left\|\sum_{s\in S} (\delta_s - T_s)^{(r)} N 2^{-\langle s,1\rangle}\right\|_q = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Величина Σ_1 оценивается по теореме 4.1.3 при $\gamma = 0$:

$$\Sigma_1 \overset{(1.1.3)}{\asymp} N\left\|\sum_{s\in S} \delta_s^{(r-1)}\right\|_q \overset{(1.1.3)}{\ll} N\left\|\sum_{\langle s,1\rangle\le\mu} \delta_s^{(r-1)}\right\|_q \asymp N\mu^{\frac{d}{q}} \asymp N\log_2^{\frac{d}{q}} N.$$

Для оценки Σ_2 применяем неравенство треугольника и неравенство Бернштейна:

$$\Sigma_2 \le \sum_{s\in S}\left\|(\delta_s - T_s)^{(r)} N 2^{-\langle s,1\rangle}\right\|_q \ll |S| 2^{\langle s,r\rangle} N 2^{-\langle s,1\rangle} \|\delta_s - T_s\|_q \overset{(4.2.1)}{\ll}$$

$$\ll |S| 2^{\langle s,r\rangle}\sqrt{N} = |S| 2^{\frac{\langle s,1\rangle}{q}}\sqrt{N} \le |S| 2^{\frac{\mu}{q}}\sqrt{N} \asymp |S|N \asymp N\log_2^{\frac{d}{q}} N.$$

Подставляя оценки для Σ_1 и Σ_2, получаем нужную оценку сверху

$$L_M(r,q) \ll N\log_2^{\frac{d}{q}} N \asymp \frac{M}{\log_2^d M}\log_2^{\frac{d}{q}} N = \frac{M}{\log_2^{d(1-\frac{1}{q})} M}.$$

г) Пусть $q > 2$, $r < \frac{1}{q}$. Положим $S = \{s \in \mathbb{N}^d \mid \log_2 N \le \langle s,1\rangle \le \mu\}$, $K = \bigcup\limits_{s\in S} \square_s$, $T(t) = T(K,t) = \sum\limits_{s\in S} \delta_s(t) = \sum\limits_{k\in K} e^{i\langle k,t\rangle}$, где

$$\mu = \frac{q}{2}\log_2 N - l(q-1)\log_2\log_2 N - q\log_2 C,$$

константа C будет выбрана ниже. Тогда $2^\mu = N^{\frac{q}{2}} C^{-q}\log_2^{l(1-q)} N$, $\mu \asymp \log_2 N$,

$$|K| = \sum_{s\in S} 2^{\langle s,1\rangle} \overset{(4.1.3)}{\asymp} \mu^l 2^\mu \asymp N^{\frac{q}{2}} \log_2^{l(2-q)} N. \qquad (4.2.3)$$

По лемме 4.2.1 построим тригонометрический полином $T_N = T(K',t) = a\sum\limits_{k\in K'} e^{i\langle k,t\rangle}$, $K'\subset K$, $|K'|\le N$, $|a|\le\frac{|K|}{N}$, такой, что

$$\|T-T_N\|_q \ll |K|N^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.2.4}$$

Покажем, что $|K'|\asymp N$ и $|a|\asymp\frac{|K|}{N}$.

По неравенству Бернштейна–Никольского (2.1.4)

$$\|T-T_N\|_\infty \le C_1\mu^{l-\frac{l}{q}}2^{\frac{\mu}{q}}\|T-T_N\|_q \overset{(4.2.4)}{\le} C_2\mu^{l-\frac{l}{q}}2^{\frac{\mu}{q}}|K|N^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= C_2\mu^{l-\frac{l}{q}}\left(N^{\frac{q}{2}}C^{-q}\log_2^{l(1-q)}N\right)^{\frac{1}{q}}\cdot|K|N^{-\frac{1}{2}} \le \frac{C_3|K|}{C} = \frac{|K|}{2}$$

при $C=2C_3$. Откуда по неравенству треугольника для норм

$$\|T_N\|_\infty \ge \|T\|_\infty - \|T-T_N\|_\infty \ge |K| - \frac{|K|}{2} = \frac{|K|}{2}. \tag{4.2.5}$$

Поэтому $N\ge|K'| = \left|\frac{T_N(0)}{a}\right| = \frac{\|T_N\|_\infty}{|a|} \ge \frac{N}{|K|}\|T_N\|_\infty \overset{(4.2.5)}{\ge} \frac{N}{2}$, причем $|a|\ge\frac{\|T_N\|_\infty}{N}\ge\frac{|K|}{2N}$. Значит, $a\asymp\frac{|K|}{N}$.

В силу неравенства Бернштейна (2.1.5)

$$L_N(r,q) \ll \left\|\tfrac{1}{a}T_N^{(r)}\right\|_q \asymp \frac{N}{|K|}\left\|T_N^{(r)}\right\|_q \ll N|K|^{-1}2^{\mu r}\|T_N\|_q. \tag{4.2.6}$$

Далее, используя оценку нормы многомерного ядра Дирихле по теореме 4.1.3 и неравенство (4.2.4), имеем

$$\|T_N\|_q \le \|T\|_q + \|T-T_N\|_q \ll \mu^{\frac{l}{q}}2^{\mu(1-\frac{1}{q})} + N^{-\frac{1}{2}}|K| \asymp$$
$$\asymp \mu^{\frac{l}{q}}\left(N^{\frac{q}{2}}\mu^{l(1-q)}\right)^{1-\frac{1}{q}} + N^{-\frac{1}{2}}|K| = N^{\frac{q-1}{2}}\mu^{\frac{l}{q}(1-1+2q-q^2)} +$$
$$+ N^{-\frac{1}{2}}|K| \asymp N^{-\frac{1}{2}}N^{\frac{q}{2}}\log_2^{l(2-q)}N + N^{-\frac{1}{2}}|K| \overset{(4.2.3)}{\asymp} N^{-\frac{1}{2}}|K|.$$

Подставляя в (4.2.6) полученную оценку оценку $\|T_N\|_q$ и переходя от величин μ, $|K|$ к N, получим нужную оценку сверху при $r_1<\frac{1}{q}$:

$$L_N(r,q) \ll N|K|^{-1}2^{\mu r}N^{-\frac{1}{2}}|K| = N^{\frac{1}{2}}2^{\mu r} \asymp$$
$$\asymp N^{\frac{1}{2}}\left(N^{\frac{q}{2}}\log^{l(1-q)}N\right)^r \asymp N^{\frac{qr+1}{2}}\log^{l(1-q)r}N.$$

Оценка снизу. Для произвольного множества $K \subset \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d$, $|K| = N$, обозначим $N_s = |\square_s \cap K|$, $x(t) = \sum\limits_{k \in K} e^{i\langle k,t\rangle}$.

а) Пусть $q > 2$, $r_1 > \frac{1}{q}$. Тогда по лемме 4.1.3 с $\theta = q > 1$ и $r_1 > \frac{1}{q}$

$$\|x^{(r)}\|_q \overset{(1.1.3)}{\asymp} \left\|\sum_s 2^{\langle s,r\rangle}\delta_s x\right\|_q \overset{(2.1.3)}{\gg} \left(\sum_s \left\|2^{\langle s,r-\frac{1}{q}\rangle}\delta_s x\right\|_\infty^q\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_s 2^{\langle s,rq-1\rangle} N_s^q\right)^{\frac{1}{q}} \gg$$

$$\gg \left(N^{r_1 q-1+q}\log^{-l(r_1 q-1+q-1)_+} N\right)^{\frac{1}{q}} = N^{r_1+1-\frac{1}{q}}\log^{-l(r_1+1-\frac{2}{q})} N.$$

Из-за произвольности выбора K отсюда вытекает искомая оценка снизу для $L_N(r,q)$.

б) Пусть $q \le 2$. При $r_1 > 0$ возьмем p такое, что $q < p < 2$ при $q < 2$, $r_1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{p} > 0$ и $p = 2$ при $q = 2$. Тогда по лемме 4.1.3 с $\theta = \frac{q}{p'} \le 1$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) получаем нужную оценку

$$\|x^{(r)}\|_q \overset{(1.1.3)}{\asymp} \left\|\sum_s 2^{\langle s,r\rangle}\delta_s x\right\|_q \overset{(2.1.3)}{\gg} \left(\sum_s \left\|2^{\langle s,r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\rangle}\delta_s x\right\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} \ge$$

$$\overset{(1.4.6)}{\ge} \left(\sum_s 2^{\langle s,rq-1+\frac{q}{p}\rangle} N_s^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}} \gg$$

$$\gg \left(N^{r_1 q-1+\frac{q}{p}+\frac{q}{p'}}\log^{-l(r_1 q-1+\frac{q}{p}+\frac{q}{p'}-1)_+} N\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= N^{r_1+1-\frac{1}{q}}\log^{-l(r_1+1-\frac{2}{q})_+} N.$$

Если $r_1 = 0$, то $\|x^{(r)}\|_q \overset{(1.3.3)}{\gg} \|x\|_q \overset{(1.4.6)}{\ge} N^{1-\frac{1}{q}}$.

в-г) Пусть $q > 2$, $0 \le r_1 \le \frac{1}{q}$. В силу теоремы 1.1.2 (Литтльвуда–

Пэли)

$$\|x^{(r)}\|_q \asymp \Big\|\sum_{s\in\mathbb{N}^d} 2^{\langle s,r\rangle}\delta_s x\Big\|_q \asymp \Big\|\sum_{\langle s,1\rangle\le\mu} 2^{\langle s,r\rangle}\delta_s x\Big\|_q + \Big\|\sum_{\langle s,1\rangle>\mu} 2^{\langle s,r\rangle}\delta_s x\Big\|_q \gg$$

$$\overset{(2.1.3),(1.3.2)}{\gg} \Big(\sum_{\langle s,1\rangle\le\mu} \|2^{\langle s,r-\frac{1}{q}\rangle}\delta_s x\|_\infty^q\Big)^{1/q} + \Big\|\sum_{\langle s,1\rangle>\mu} 2^{\langle s,r\rangle}\delta_s x\Big\|_2 \ge$$

$$\ge \Big(\sum_{\langle s,1\rangle\le\mu} N_s^q 2^{\langle s,rq-1\rangle}\Big)^{1/q} + 2^{\mu r_1} N_2^{\frac{1}{2}}, \quad (4.2.7)$$

$N_1 = \sum_{\langle s,1\rangle\le\mu} N_s$, $N_2 = \sum_{\langle s,1\rangle>\mu} N_s$. Оценивая в (4.2.7) сумму по лемме 4.1.4 и выбирая μ из соответствующих равенств, получим при $r_1 = \frac{1}{q}$, $N^{\frac{1}{2}} = \mu^{\frac{l+1}{q'}} 2^{\frac{\mu}{q}}$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$:

$$\|x^{(r)}\|_q \gg \Big(N_1^q \mu^{(l+1)(1-q)}\Big)^{\frac{1}{q}} + 2^{\frac{\mu}{q}} N_2^{\frac{1}{2}} = N_1\mu^{(l+1)(\frac{1}{q}-1)} + 2^{\frac{\mu}{q}} N_2^{\frac{1}{2}} =$$

$$= N_1\mu^{-\frac{l+1}{q'}} + N^{\frac{1}{2}}\mu^{-\frac{l+1}{q'}} N_2^{\frac{1}{2}} = (N_1 + N_2^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}})\log^{-\frac{l+1}{q'}} N \asymp$$

$$\overset{N_1+N_2=N}{\asymp} N\log^{(l+1)(\frac{1}{q}-1)} N;$$

при $r_1 < \frac{1}{q}$, $N^{\frac{1}{2}} = \mu^{\frac{l}{q'}} 2^{\frac{\mu}{q}}$:

$$\|x^{(r)}\|_q \gg \Big(N_1^q 2^{(r_1q-1)\mu}\mu^{l(1-q)}\Big)^{\frac{1}{q}} + 2^{\frac{\mu}{q}\cdot r_1 q} N_2^{\frac{1}{2}} =$$

$$= N_1 2^{\frac{\mu}{q}(r_1q-1)}\mu^{l(\frac{1}{q}-1)} + \Big(N^{\frac{1}{2}}\mu^{-\frac{l}{q'}}\Big)^{r_1 q} N_2^{\frac{1}{2}} =$$

$$= N_1\Big(N^{\frac{1}{2}}\mu^{-\frac{l}{q'}}\Big)^{r_1q-1}\mu^{-\frac{l}{q'}} + N^{\frac{r_1q}{2}} N_2^{\frac{1}{2}}\mu^{-\frac{lr_1q}{q'}} =$$

$$= N_1 N^{\frac{r_1q-1}{2}}\mu^{-\frac{lr_1q}{q'}} + N^{\frac{r_1q}{2}} N_2^{\frac{1}{2}}\mu^{-\frac{lr_1q}{q'}} =$$

$$= N^{\frac{r_1q}{2}}\Big(N_1 N^{-\frac{1}{2}} + N_2^{\frac{1}{2}}\Big)\mu^{-lr_1q(1-\frac{1}{q})} \asymp$$

$$\overset{N_1+N_2=N}{\asymp} N^{\frac{r_1q+1}{2}} \log^{l(1-q)r_1} N. \qquad \square$$

Теорема 4.2.2 (о норме производной многомерного ядра Фавара, минимальной по выбору гармоник [1987c], [1991b])**.** *Пусть* $r \in \mathbb{R}^d$, $r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \leq \ldots \leq r_d$, $1 < q < \infty$. *Тогда величина* $F_N(r,q)$ *конечна в том и только в том случае, когда* $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$ *и, если* $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$, *то*

$$F_N(r,q) \asymp \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{-r_1+1-\frac{1}{q}} \log^{\frac{l}{q}} N.$$

Доказательство. Оценка сверху. Положим $K = \{\square_s \mid \langle s, r\rangle \leq \mu\}$, где μ выбирается из равенства $N = \mu^l 2^{\frac{\mu}{r_1}}$, $F(t) = \sum\limits_{k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d \setminus K} e^{i\langle k,t\rangle}$. Тогда $|K| \asymp N$. Подставляя по теореме 4.1.4 порядок нормы производной функции $F(t)$ получаем искомую оценку сверху при $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$.

Оценка снизу. Пусть K — произвольное множество в $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d$, $|K| = N$. Обозначим $M_s = |\square_s \bigcap (\overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d \setminus K)|$, $x(t) = \sum\limits_{k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d \setminus K_N} e^{i\langle k,t\rangle}$. В силу теоремы 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли) и неравенства (2.1.3) имеем

$$\|x^{(-r)}(\cdot)\|_q \asymp \left\|\sum_s 2^{\langle s,-r\rangle} \delta_s x(\cdot)\right\|_q \gg$$
$$\gg \left(\sum_s \|2^{\langle s,-r-\frac{1}{q}\rangle} \delta_s x(\cdot)\|_\infty^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_s M_s^q 2^{\langle s,-rq-1\rangle}\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4.2.8)$$

Положим $S = \{s = (s_1, \ldots, s_{l+1}, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d \mid \langle s, 1\rangle = m\}$, где величина $m \in \mathbb{N}$ выбирается так, чтобы $\sum\limits_{s \in S} 2^{\langle s,1\rangle} \geq C m^l 2^m \geq 2\bar{N}$ $(\bar{N} \geq N)$ и $m^l 2^m \asymp N$. Тогда $\sum\limits_{s\in S} M_s \geq \sum\limits_{s \in S} 2^{\langle s,1\rangle} - N \geq 2\bar{N} - N \geq \bar{N}$, $|S| \asymp m^l \asymp \log^l \bar{N}$ и, значит, по неравенству для средних

$$\left(\sum_{s\in S} M_s^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq |S|^{\frac{1}{q}-1} \sum_{s \in S} M_s \geq |S|^{\frac{1}{q}-1} \bar{N} \asymp \bar{N}(\log^l \bar{N})^{\frac{1}{q}-1}.$$

Поэтому из (4.2.8) по лемме 4.1.2

$$\|x^{(-r)}\|_q \gg \left(\sum_s M_s^q 2^{\langle s,-rq-1\rangle}\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\frac{\bar{N}}{\log^l \bar{N}}\right)^{-r_1+1-\frac{1}{q}} (\log^l \bar{N})^{\frac{1}{q}}.$$

Если $r_1 \leq 1 - \frac{1}{q}$, то последняя величина стремится к $+\infty$ при $\bar{N} \to +\infty$, а если $r_1 > 1 - \frac{1}{q}$, то полагая $\bar{N} = N$, получим искомую оценку снизу. □

Величины L_N и F_N обобщаются на случай аналогов ядер Дирихле и Фавара для пересечений классов функций. При доказательстве теорем 4.2.3 и 4.2.4 используются работы Динь Зунга [1983],[1984a], в которых находятся порядки норм ядер Дирихле с гармониками из логарифмически полиэдрального множества.

Теорема 4.2.3 (Динь Зунг [1984a]). *Пусть* $1 < p < \infty$, $S \subset \mathbb{R}^d_+$ *— полиэдральное множество с непустой внутренностью,* K *— его рецессивный конус,* K° *— поляра конуса* K, $r \in \mathbb{R}^d$, $r + 1 - \frac{1}{p} \in \operatorname{int} K^\circ$. *Тогда*

$$\left\|\left(\sum_{s\in\mu S}\sum_{k\in\square_s} e^{i\langle k,\cdot\rangle}\right)^{(r)}\right\|_p \asymp \mu^{\frac{l}{p}} 2^{\mu M}, \quad \mu \to +\infty,$$

где M *— значение, а* l *— размерность множества значений задачи:* $\left\langle s, r+1-\frac{1}{p}\right\rangle \to \sup;\ s \in S$.

Теорема 4.2.4 (Э. М. Галеев [1991b]). *Пусть* $1 < q < \infty$, $A = \{r^i \subset \mathbb{R}^d \mid i = 1, \ldots, m\}$, $\operatorname{co} A \cap \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^d_+ \neq \emptyset$. *Тогда при* $q \leq 2$ *или* $q > 2$, $\frac{1}{M} > \frac{1}{q}$

$$L_N(A,q) \asymp N^{\frac{1}{M}+1-\frac{1}{q}} / \log^{l(\frac{1}{M}+1-\frac{2}{q})_+} N,$$

где M *— значение, а* l *— размерность множества значений задачи:* $\langle s, 1\rangle \to \sup;\ \langle s, r\rangle \leq 1\ \forall\ r \in A,\ s \geq 0$.

Для ядра Фавара теорема типа теоремы 4.2.4 формулируется в следующем виде. Для множества $A = \{r^i \subset \mathbb{R}^d \mid i = 1, \ldots, m\}$ и функции $x(t) = \sum\limits_s \delta_s x(t)$ положим $D^A x(t) = \sum\limits_s 2^{-\max\limits_{r\in A}\langle s,r\rangle} \delta_s x(t)$.

При $A = \{r\}$ по теореме 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли) $\|D^A x\|_q \asymp \|x^{(-r)}\|_q$, $1 < q < \infty$. Таким образом, оператор D^A в некотором смысле является аналогом интегрального оператора. Для величины

$$F_N(A,q) := \inf_{K_N} \left\| D^A \left(\sum_{k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d \setminus K_N} e^{i\langle k,\cdot\rangle} \right) \right\|_q$$

будет иметь место следующая теорема.

Теорема 4.2.5 (Э. М. Галеев [1991b]). *Пусть* $1 < q < \infty$, $A = \{r^i \subset \mathbb{R}^d \mid i = 1, \ldots, m\}$, $\operatorname{co} A \cap \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^d_+ \neq \emptyset$. *Тогда величина* $F_N(A,q)$ *конечна в том и только в том случае, когда* $\frac{1}{M} > 1 - \frac{1}{q}$, *и если* $\frac{1}{M} > 1 - \frac{1}{q}$, *то*

$$F_N(A,q) \asymp \left(\frac{N}{\log^l N} \right)^{-\frac{1}{M}+1-\frac{1}{q}} \log^{\frac{l}{q}} N,$$

где M *— значение, а* l *— размерность множества значений задачи:* $\langle s,1\rangle \to \sup$; $\langle s,r\rangle \le 1 \ \forall\, r \in A$, $s \ge 0$.

4.3 Неравенства Бернштейна–Никольского наилучшие по выбору гармоник

В этом пункте для периодических функций нескольких переменных рассматривается порядок величины

$$T_N(W_p^r(\mathbb{T}^d), L_q(\mathbb{T}^d)) = \inf_{K_N} \sup_{\substack{x(\cdot) \in \mathcal{T}(K_N) \\ x(\cdot) \neq 0}} \frac{\|x^{(r)}(\cdot)\|_p}{\|x(\cdot)\|_q},$$

где $K_N \subset \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d$ — произвольное множество, состоящее из N гармоник, $\mathcal{T}(K_N) = \operatorname{lin}\{e^{i\langle k,t\rangle} \mid k \in K_N\}$. Величина $T_N(W_p^r, L_q)$ является множителем в неравенстве Бернштейна–Никольского для полиномов из пространства $\mathcal{T}(K_N)$ размерности N, причем гармоники выбираются таким образом, чтобы эта константа являлась наименьшей. Для функций одной переменной эта величина изучалась В. Е. Майоровым [1981], [1986], [1990]. У нас определяется порядок $T_N(W_p^r(\mathbb{T}^d), L_q(\mathbb{T}^d))$ для функций нескольких переменных для ряда значений r, p, q. В частности будет показано, что минимум константы при определенных соотношениях между p, q и "больших"гладкостях r достигается на пространстве полиномов с гармониками из ступенчатого гиперболического креста. Неравенство Бернштейна–Никольского для таких полиномов (см. (2.1.4), (2.1.5)) рассматривалось в работах К. И. Бабенко, С. А. Теляковского, Н.С.Никольской, автора, В.Н.Темлякова.

Сформулируем три теоремы о порядке величин T_N для классов периодических функций нескольких переменных из работ автора [1992b], [1992c], первую из них приведем с доказательством.

Теорема 4.3.1 (о множителе в неравенстве Бернштейна–Никольского, минимальном по выбору гармоник)**.** *Пусть* $r \in \mathbb{R}^d$, $r_1 = \ldots = r_{l+1} < r_{l+2} \le \ldots \le r_d$, $W_p^r = W_p^r(\mathbb{T}^d)$. *Тогда*

$$T_N(W_p^r, L_q) \asymp \begin{cases} \left(\dfrac{N}{\log^l N}\right)^{r_1}, & 1 < p \le q < \infty,\ r_1 > 0; \quad \text{(a)} \\ \left(\dfrac{N}{\log^l N}\right)^{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}, & 2 \le q \le p < \infty,\ r_1 > \frac{1}{p}; \quad \text{(b)} \\ \left(\dfrac{N}{\log^l N}\right)^{r_1 + \frac{1}{q}} \log^{l - \frac{l}{q}} N, & 2 \le q < p = \infty, r_1 > 1 - \frac{2}{q}; \quad \text{(c)} \\ \left(\dfrac{N}{\log^l N}\right)^{r_1} N^{\frac{1}{2}}, & p = \infty,\ 1 < q \le 2,\ r_1 > 0; \quad \text{(d)} \\ 1, & 1 < p, q < \infty,\ r_1 = 0; \quad \text{(e)} \end{cases}$$

Доказательство. Положим $\alpha := r + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+$, $K = \bigcup\limits_{\langle s, \alpha \rangle \le \mu} \square_s$, где величина μ выбирается из условия $|K| = \sum\limits_{\langle s, \alpha \rangle \le \mu} 2^{\langle s, 1 \rangle} \asymp \mu^l 2^{\frac{\mu}{\alpha_1}} \asymp N$ при $\alpha_1 > 0$.

Оценка сверху. В случаях (a),(b) нужная оценка следует из неравенства Бернштейна–Никольского (2.1.5)

$$\frac{\|x^{(r)}\|_p}{\|x\|_q} \ll \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{\alpha_1} = \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{r_1 + (\frac{1}{q} - \frac{1}{p})_+},$$

а в случае (c) из неравенства (2.1.4)

$$\frac{\|x^{(r)}\|_\infty}{\|x\|_q} \ll \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{\alpha_1} \log^{l-\frac{l}{q}} N = \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{r_1+\frac{1}{q}} \log^{l-\frac{l}{q}} N$$

для функций $x = \sum\limits_{\langle s,\alpha\rangle \le \mu} \delta_s x$.

d) Наложим (только в п. d)) на множество K дополнительные условия: 1) если $k \in K$, то $k_i = 1,\ i = l+2,\dots,d$; 2) $|K| \ge 2N$. Поскольку согласно неравенству Хинчина (см. теорема 3.1.8)

$$\frac{1}{2^{|K|}} \sum_{\varepsilon=\pm1} \left\| \sum_{k\in K} \varepsilon_k e^{i\langle k,\cdot\rangle} \right\|_{q'}^{q'} \asymp \frac{1}{2^{|K|}} \sum_{\varepsilon=\pm1} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \left| \sum_{k\in K} \varepsilon_k e^{i\langle k,t\rangle} \right|^{q'} dt \asymp$$

$$\asymp \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{2^{|K|}} \sum_{\varepsilon=\pm1} \left| \sum_{k\in K} \varepsilon_k e^{i\langle k,t\rangle} \right|^{q'} dt \asymp \int\limits_{\mathbb{T}^d} \left(\sum_{k\in K} |e^{i\langle k,t\rangle}|^2 \right)^{\frac{q'}{2}} dt \asymp |K|^{\frac{q'}{2}} \asymp N^{\frac{q'}{2}},$$

$\frac{1}{q} + \frac{1}{q}' = 1$, то найдется набор $\{\varepsilon_k = \pm1,\ k \in K\}$, для которого

$$\left\| \sum_{k\in K} \varepsilon_k e^{i\langle k,\cdot\rangle} \right\|_{q'} \ll N^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим $K_+ = \{k \in K \mid \varepsilon_k = 1\}$, $K_- = \{k \in K \mid \varepsilon_k = -1\}$. Так как $|K| = |K_+| + |K_-| \ge 2N$, то либо $|K_+| \ge N$, либо $|K_-| \ge N$. Предположим для определенности, что $|K_+| \ge N$. Тогда для $D(t) := \sum\limits_{k\in K_+} e^{i\langle k,t\rangle}$

$$\|D\|_{L_{q'}} \ll N^{\frac{1}{2}}.$$

Поскольку $x^{(r)} = x^{(r)} * D$ для функций $x(t) = \sum\limits_{k\in K_+} x_k e^{i\langle k,t\rangle}$, то по неравенству Гельдера

$$\|x^{(r)}\|_\infty \le \|x^{(r)}\|_q \|D\|_{q'} \ll \|x^{(r)}\|_q N^{\frac{1}{2}}. \tag{4.3.1}$$

По теореме 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли)

$$\|x^{(r)}\|_q \asymp \| \sum_{\langle s,\alpha\rangle\le\mu} 2^{:\langle s,r\rangle} \delta_s x\|_q \ll 2^{\frac{r_1\mu}{\alpha_1}} \|x\|_q \asymp \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{r_1} \|x\|_q.$$

Таким образом,

$$\frac{\|x^{(r)}\|_\infty}{\|x\|_q} \overset{(4.3.1)}{\ll} \frac{\|x^{(r)}\|_q N^{\frac{1}{2}}}{\|x\|_q} \ll \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{r_1} N^{\frac{1}{2}}.$$

e) Если $r_1 = 0$, то положим $K_1 = \{k = (k_1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d \mid k_1 = 1,\ 2^1, \ldots, 2^{N-1}\}$. Тогда $|K_1| = N$ и для любой функции $x(t) = \sum\limits_{k \in K_1} x_k e^{i\langle k,t\rangle}$ по теореме 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли) $\|x^{(r)}\|_p \asymp \left(\sum\limits_{k \in K_1} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \asymp \|x\|_q$, поэтому

$$T_N(W_p^r, L_q) \leq \sup_{\substack{x \in \mathcal{T}(K_1) \\ x \neq 0}} \frac{\|x^{(r)}\|_p}{\|x\|_q} \asymp 1.$$

Оценка снизу. Возьмем $K_N \subset \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d$ — произвольное множество, состоящее из N гармоник. Выберем величину μ таким образом, чтобы $|K| \leq \frac{N}{2}$. Обозначим $K'_N = K_N \setminus K$, $N_s = |K_N \cap \square_s|$. Так как $|K'_N| = \sum\limits_{\langle s,\alpha\rangle > \mu} N_s \geq \frac{N}{2}$, то $|K'_N| \asymp N$.

a) Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $r_1 > 0$. Тогда $\alpha = r$ и для $k \in K'_N$

$$T_N(W_p^r, L_q) \geq \sup_{\substack{x \in \mathcal{T}(K'_N) \\ x \neq 0}} \frac{\|x^{(r)}\|_p}{\|x\|_q} \geq \frac{\|(e^{i\langle k,\cdot\rangle})^{(r)}\|_p}{\|e^{i\langle k,\cdot\rangle}\|_q} \asymp 2^{\langle s,r\rangle} > 2^\mu \asymp \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{r_1}.$$

b) Пусть $2 \leq q \leq p < \infty$. Рассмотрим функции $x_s(t) = \sum\limits_{k \in K_N \cap \square_s} e^{i\langle k,t\rangle}$, $s \in \mathbb{N}^d$. Тогда по неравенству Бернштейна–Никольского

$$\|x_s^{(r)}\|_{L_p} \asymp 2^{\langle s,r\rangle} \|x_s\|_{L_p} \gg 2^{\langle s, r - \frac{1}{p}\rangle} \|x_s\|_{L_\infty} = N_s 2^{\langle s, r - \frac{1}{p}\rangle}.$$

С другой стороны, в силу неравенства Хаусдорфа–Юнга (1.4.5) при $2 \leq q \leq \infty$

$$\|x_s\|_{L_q} \leq \|x_s\|_{l_{q'}} = N_s^{\frac{1}{q'}} = N_s^{1-\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Поэтому

$$T_N(W^r_p, L_q) \geq \sup_{\substack{x\in\mathcal{T}(K_N)\\ x\neq 0}} \frac{\|x^{(r)}\|_{L_p}}{\|x\|_{L_q}} \geq \sup_{s\in\mathbb{N}^d} \frac{\|x_s^{(r)}\|_{L_p}}{\|x_s\|_{L_q}} \gg \sup_{s\in\mathbb{N}^d} N_s^{\frac{1}{q}} 2^{\langle s, r-\frac{1}{p}\rangle} =: I.$$

Поскольку $I \geq N_s^{\frac{1}{q}} 2^{\langle s, r-\frac{1}{p}\rangle}$, то $N_s \leq I^q 2^{-q\langle s, r-\frac{1}{p}\rangle}$ и, следовательно,

$$\frac{N}{2} \leq \sum_{\langle s,\alpha\rangle > \mu} N_s \leq I^q \sum_{\langle s,\alpha\rangle>\mu} 2^{-q\langle s, r-\frac{1}{p}\rangle} \overset{(??)}{\ll} I^q \mu^l 2^{-q\mu(r_1-\frac{1}{p})/\alpha_1},$$

так как $\frac{r_1-\frac{1}{p}}{\alpha_1} = \ldots = \frac{r_{l+1}-\frac{1}{p}}{\alpha_{l+1}} < \frac{r_{l+2}-\frac{1}{p}}{\alpha_{l+2}} \leq \ldots \leq \frac{r_d-\frac{1}{p}}{\alpha_d}$. Отсюда получаем нужную оценку снизу

$$T_N(W^r_p, L_q) \gg I \gg N^{\frac{l}{q}} \mu^{-\frac{l}{q}} 2^{\mu(r-\frac{1}{p})/\alpha_1} \asymp \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}.$$

c) По определению величины T_N

$$T_N(W^r_\infty, L_q) \geq \inf_{K'_N} \sup_{\substack{x\in\mathcal{T}(K'_N)\\ x\neq 0}} \frac{\|x^{(r)}\|_\infty}{\|x\|_q} = \inf_{K'_N} \sup_{\substack{x\in\mathcal{T}(K'_N)\\ x\neq 0}} \frac{\|x\|_\infty}{\|x^{(-r)}\|_q}.$$

Полагая $x(t) = \sum_{k\in K'_N} e^{i\langle k,t\rangle}$, получим

$$T_N(W^r_\infty, L_q) \geq \inf_{K'_N} \frac{N}{\left\|\left(\sum_{k\in K'_N} e^{i\langle k,t\rangle}\right)^{(-r)}\right\|_q} = \frac{N}{\sup_{K'_N}\left\|\left(\sum_{k\in K'_N} e^{i\langle k,t\rangle}\right)^{(-r)}\right\|_q}. \tag{4.3.2}$$

При $q \geq 2$ согласно неравенству (2.1.2)

$$\left\|\sum_{\langle s,\alpha\rangle>\mu} \delta_s x^{(-r)}\right\|_q^q \ll \sum_{\langle s,\alpha\rangle>\mu} \|2^{\langle s, -r+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\rangle} \delta_s x\|_2^q =$$

$$= \sum_{\langle s,\alpha\rangle>\mu} N_s^{\frac{q}{2}} 2^{q\langle s,-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\rangle} = \sum_{\langle s,\alpha\rangle>\mu} N_s 2^{q\langle s,-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\rangle} N_s^{\frac{q}{2}-1}.$$

Поскольку $N_s \le 2^{\langle s,1\rangle}$, то при $r_1 - 1 + \frac{2}{q} > 0$

$$\Big\| \sum_{\langle s,\alpha\rangle>\mu} \delta_s x^{(-r)} \Big\|_q^q \ll \sum_{\langle s,\alpha\rangle>\mu} N_s 2^{q\langle s,-r+1-\frac{2}{q}\rangle} \ll$$

$$\ll 2^{q(-r_1+1-\frac{2}{q})\frac{\mu}{\alpha_1}} \sum_{\langle s,\alpha\rangle>\mu} N_s \le N 2^{q(-r_1+1-\frac{2}{q})\frac{\mu}{\alpha_1}}.$$

Подставляя эту оценку в (4.3.2), получим оценку снизу в случае (в):

$$T_N(W^r_\infty, L_q) \gg N^{1-\frac{1}{q}} 2^{(-r_1+1-\frac{2}{q})\frac{\mu}{\alpha_1}} \asymp \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{r_1+\frac{1}{q}} \log^{l-\frac{l}{q}} N.$$

d) В силу неравенства $\|\cdot\|_q \le \|\cdot\|_2$ при $q \le 2$ имеем, что $T_N(W^r_\infty, L_q) \ge T_N(W^r_\infty, L_2)$ и оценка снизу свелась к уже доказанной в пункте c) оценке снизу величины $T_N(W^r_\infty, L_2)$.

e) Пусть $r_1 = 0$, тогда для $k \in K_N$ имеем

$$T_N(W^r_p, L_q) \ge \sup_{\substack{x\in\mathcal{T}(K_N)\\ x\ne 0}} \frac{\|x^{(r)}\|_p}{\|x\|_q} \ge \frac{\|(e^{i\langle k,\cdot\rangle})^{(r)}\|_p}{\|e^{i\langle k,\cdot\rangle}\|_q} = \prod_{j=1}^d |k_j|^{r_j} \ge 1. \qquad \square$$

Теорема 4.3.2. *Пусть* $W^A_p(\mathbb{T}^d) = \bigcap\limits_{r\in A} W^r_p(\mathbb{T}^d)$, $A = \{r^i \subset \mathbb{R}^d \mid i = 1,\dots,m\}$, $\mathrm{co}\, A \cap \overset{\circ}{\mathbb{R}}{}^d_+ \ne \emptyset$. *Тогда*

$$T_N(W^A_p, L_q) \asymp \begin{cases} \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{\frac{1}{M}}, & 1 < p \le q < \infty; \\ \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{\frac{1}{M}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}, & 2 \le q \le p < \infty,\ \frac{1}{M} > \frac{1}{p}; \\ \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{\frac{1}{M}+\frac{1}{q}} (\log^l N)^{1-\frac{1}{q}}, & 2 \le q < p = \infty,\ \frac{1}{M} > 1 - \frac{2}{q}; \\ \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{\frac{1}{M}} N^{\frac{1}{2}}, & p = \infty,\ 1 < q \le 2; \end{cases}$$

где M — решение, а l — размерность аффинной оболочки множества решений задачи:

$$\langle s, 1\rangle \to \sup;\ \left\langle s, r + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+ \right\rangle \le 1 \quad \forall\ r \in A,\ s \ge 0.$$

Теорема 4.3.3. *Пусть* $\Omega = \bigl\{\bigl(\frac{1}{p^i}, r^i\bigr) \subset (0,\,1)^d \times \mathbb{R}^d \mid i = 1, \ldots, m\bigr\}$, $\mathrm{co}\{r + (\frac{1}{q} - \frac{1}{p})_+ \mid \bigl(\frac{1}{p}, r\bigr) \in \Omega\} \cap \mathring{\mathbb{R}}^d_+ \ne \emptyset$. *Тогда*

$$T_N(W^\Omega, L_q) \ll \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{\frac{1}{M}}, \quad 1 < q < \infty,$$

где M — решение, а l — размерность аффинной оболочки множества решений задачи:

$$\langle s, 1\rangle \to \sup;\ \left\langle s, r + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+ \right\rangle \le 1 \quad \forall\ \bigl(\frac{1}{p}, r\bigr) \in \Omega,\ s \ge 0.$$

Аналогичные теоремы могут быть доказаны для $T_N(W^A_p, L_q)$ и $T_N(W^\Omega, L_q)$ (см. Э. М. Галеев [1992b],[1992c]).

4.4 Поперечники по Бернштейну бесконечномерных эллипсоидов

В этом пункте определяются точные значения поперечников по Бернштейну $b_N(B_p(r), l_q)$ бесконечномерных эллипсоидов $B_p(r)$ в пространстве l_q при $p = \infty$, $q = 2$ и при $1 \le p \le q \le \infty$.

Напомним определение поперечника по Бернштейну, введенное Тихомировым [1976, с. 17]. Пусть W — центрально-симметричное множество в линейном нормированном пространстве X с единичным шаром B. *Поперечником по Бернштейну* называется величина

$$b_N(W, X) = \sup_{\varepsilon, L_N} \{\varepsilon \mid \varepsilon \cap L_N \subset W\},$$

где L_N — подпространство размерности N в X. Бернштейновский поперечник означает радиус шара размерности N, который можно вписать во множество W. При $N = \dim X$ это будет радиус вписанного в W шара.

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства с единичными шарами BX и BY топологически вложены друг в друга, X^*, Y^* — сопряженные соответственно к X и Y пространства, в которых единичными шарами будут BX°, BY° — поляры шаров BX, BY соответственно. Непосредственно из определения поперечника по Бернштейну нетрудно вывести, что

$$b_N(BX, Y) := \sup_{\varepsilon, L_N} \{\varepsilon \mid \varepsilon Y \cap L_N \subset BX\} = \sup_{L_N} \inf_{x \in L_N} \frac{\|x\|_Y}{\|x\|_X}. \quad (4.4.1)$$

Заменяя в последнем выражении вначале внутренний inf по формуле $\inf f = \frac{1}{\sup \frac{1}{f}}$, а потом внешний sup по формуле $\sup \frac{1}{g} = \frac{1}{\inf g}$ $(f, g > 0)$, получим

$$b_N(BX, Y) = \sup_{L_N} \frac{1}{\sup\limits_{x \in L_N} \frac{\|x\|_X}{\|x\|_Y}} = \frac{1}{\inf\limits_{L_N} \sup\limits_{x \in L_N} \frac{\|x\|_X}{\|x\|_Y}} = \frac{1}{h_N(BX, Y)}, \quad (4.4.2)$$

где $h_N(BX, Y) := \inf\limits_{L_N} \sup\limits_{x \in L_N} \frac{\|x\|_X}{\|x\|_Y}$. Эта величина рассматривалась для $BX = W_p^r(\mathbb{T}^1)$ и $Y = L_q(\mathbb{T}^1)$ В. Е. Майоровым. Она является наилучшей по выбору N-мерного подпространства константой в неравенстве Бернштейна–Никольского.

С бернштейновскими поперечниками тесно связаны (это будет показано ниже поперечники по Колмогорову $d_N(W, X)$ и поперечники по Гельфанду

$$d^N(W, X) = \inf_{\varepsilon, L_{-N}} \{\varepsilon \mid W \cap L_{-N} \subset \varepsilon\}$$

(L_{-N} — подпространство коразмерности N в X). Поперечник по Гельфанду был введен В. М. Тихомировым [1976]. Там же им рассматриваются вместе с d_N и d^N величины

$$d_{-N}(W, X) = \inf_{L_{-N}} \sup_{x \in W} \inf_{y \in L_{-N}} \|x - y\|_X,$$

$$d^{-N}(W, X) = \inf_{\varepsilon, L_N} \{\varepsilon \mid W \cap L_{-N} \subset \varepsilon\}.$$

Между колмогоровскими и гельфандовскими поперечниками имеется следующее соотношение двойственности (см. Тихомиров [1976, с. 147]):

$$d_{\theta N}(BX^{\circ}, Y^{*}) = d^{\theta N}(BY, X), \quad \theta = \pm 1. \tag{4.4.3}$$

Непосредственно из определений следует, что

$$d^{-N}(BY, X) = \inf_{\varepsilon, L_N}\{\varepsilon \mid BY \cap L_N \subset \varepsilon BX\} = \inf_{\varepsilon, L_N}\{\varepsilon \mid \varepsilon^{-1}BY \cap L_N \subset BX\} =$$

$$= 1/\sup_{\varepsilon, L_N}\{\varepsilon^{-1} \mid \varepsilon^{-1}BY \cap L_N \subset BX\} = 1/b_N(BX, Y).$$

Поэтому в силу соотношения двойственности (4.4.3)

$$b_N(B_1, Y) = \frac{1}{d_{-N}(B_1^{\circ}, Y^{*})}. \tag{4.4.4}$$

Эта формула является обобщением на бесконечномерные пространства аналогичной формулы С. В. Пухова [1980] для конечномерных пространств. Таким образом, задача о вычислении бернштейновских поперечников сводится к задаче о вычислении колмогоровских копоперечников поляры в сопряженной метрике.

Пусть $r = (r_1, \dots, r_n, \dots)$ — вектор с упорядоченными положительными компонентами: $r_1 \le r_2 \dots \le r_n \le \dots$. Через $B_p(r)$, $1 \le p < \infty$, обозначим бесконечномерный эллипсоид $B_p(r) = \Big\{x = (x_1, \dots, x^n, \dots) \mid \Big(\sum_{k \in \mathbb{N}} \big|\frac{x_k}{r_k}\big|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le 1\Big\}$; при $p = \infty$ $B_\infty(r) = \{x = (x_1, \dots, x^n, \dots) \mid |x_k| \le r_k \ \forall\ k \in \mathbb{N}\}$ — бесконечномерный параллелепипед.

Теорема 4.4.1 (о точном значении поперечника по Бернштейну бесконечномерного параллелепипеда в l_2)**.** *Величина* $b_N(B_\infty(r), l_2) < \infty$ *тогда и только тогда, когда* $r \in l_2$*, и если* $r \in l_2$*, то*

$$b_N(B_\infty(r), l_2) = \min_{0 \le m < N}\left(\frac{1}{N - m}\sum_{k > m} r_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Пусть $L_N \subset l_2$ — произвольное пространство размерности N, натянутое на систему ортонормированных векторов $f_l = (f_{l1}, \dots, f_{ln}, \dots)$, $l = 1, \dots, N$. По определению поперечника по Бернштейну

$$b := b_N(B_\infty(r), l_2) = \sup_{\varepsilon, L_N}\{\varepsilon \mid \varepsilon \cap L_N \subset B_\infty(r)\} =$$

$$= \sup_{\varepsilon, L_N}\left\{\varepsilon \mid \sum_{l=1}^N \lambda_l f_l \in B_\infty(r) \,\forall\, \lambda : \left\|\sum_{l=1}^N \lambda_l f_l\right\|_{l_2} = \left(\sum_{l=1}^N \lambda_l^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \le \varepsilon\right\} =$$

$$= \sup_{\varepsilon, L_N}\left\{\varepsilon \,\middle|\, \left|\sum_{l=1}^N \lambda_l f_{lk}\right| \le r_k,\ k \in \mathbb{N},\ \forall\, |\lambda| \le \varepsilon\right\}.$$

В силу неравенства Коши–Буняковского $\left|\sum\limits_{l=1}^N \lambda_l f_{lk}\right| \le |\lambda| a_k$, где $a_k := \left(\sum\limits_{l=1}^N f_{lk}^2\right)^{1/2}$ (отметим, что $0 \le a_k \le 1$). Отсюда $\left|\sum\limits_{l=1}^N \lambda_l f_{lk}\right| \le r_k \;\forall\, |\lambda| \le \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon \le \dfrac{r_k}{a_k}$ $(a_k \ne 0)$.

Значит $b = \sup\limits_{L_N} \inf\limits_{k \in \mathbb{N}} \dfrac{r_k}{a_k}$. Поскольку для любого вектора $a \in A := \left\{a = (a_1, \dots, a_n, \dots) \mid 0 \le a_k \le 1 \;\forall\, k \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} a_k^2 = N\right\}$ можно построить ортонормированную систему векторов $f_l = (f_{l1}, \dots, f_{ln}, \dots)$, $l = 1, \dots, N$, такую, что $a_k = \left(\sum\limits_{l=1}^N \lambda_l f_{lk}^2\right)^{1/2}$, $k \in \mathbb{N}$ (построение таких систем конечномерных векторов описано, например, в работах А. И. Мальцева [1947], Л. Б. Софмана [1969], в бесконечномерном случае построение проводится аналогично), то $b = \sup\limits_{a \in A} b(a)$, где $b(a) = \inf\limits_{k \in \mathbb{N}} \dfrac{r_k}{a_k}$.

Если $r \notin l_2$, т. е. $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} r_k^2 = \infty$, то существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\sum\limits_{i=1}^n r_1^2 \ge N r_i^2$ при $n \ge n_0$. Положим $a_k^2 = \frac{N r_k^2}{\sum\limits_{i=1}^n r_i^2}$, $k = 1, \dots, n$ $(n > n_0)$, $a_k = 0$ при $k > n$. Тогда $a = a(n) \in A$ и $b^2(a(n)) = \frac{\sum\limits_{i=1}^n r_i^2}{N} \to \infty$

при $n \to \infty$.

Пусть $r \in l_2$, т. е. $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} r_k^2 < \infty$. Покажем, что если для вектора $a \in A$ $\frac{r_i}{a_i} > b(a)$ при некотором $i \in \mathbb{N}$ и $a_i < 1$, то найдется вектор $a' \in A$, для которого $b(a') > b(a)$. Обозначим через K множество индексов k, для которых $\frac{r_k}{a_k} < \frac{r_i}{a_i}$. Положим ${a'}_i^2 = a_i^2 + \varepsilon$, ${a'}_k^2 = a_k^2 - \frac{r_k^2\varepsilon}{\sum\limits_{j\in K} r_j^2}$ при $k \in K$, $a'_k = a_k$ при $k \neq i$, $k \notin K$, где величина $\varepsilon > 0$ определяется ниже. Тогда $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} {a'}_k^2 = N$. Возьмем $\varepsilon \le \min\left\{1 - a_i^2, \frac{a_i^2}{r_i^2}\sum\limits_{k\in K} r_k^2\right\}$. Отсюда ${a'}_i^2 \le 1$, ${a'}_k^2 = a_k^2 - \frac{r_k^2\varepsilon}{\sum\limits_{j\in K} r_j^2} \ge a_k^2 - \dfrac{r_k^2 a_i^2}{r_i^2} = r_k^2\left(\dfrac{a_k^2}{r_k^2} - \dfrac{a_i^2}{r_i^2}\right) > 0$ при $k \in K$, т. е. вектор $a' \in A$, при этом

$$b^2(a') \ge \inf\left\{\frac{r_i^2}{{a'}_i^2} = \frac{r_i^2}{a_i^2+\varepsilon};\ \frac{r_k^2}{{a'}_k^2} = \frac{r_k^2}{a_k^2 - \frac{r_k^2\varepsilon}{\sum\limits_{j\in K} r_j^2}} = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{\frac{a_k^2}{r_k^2} - \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{j\in K} r_j^2}} \ge \frac{1}{\frac{1}{b^2(a)} - \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{j\in K} r_j^2}},\ k \in K\right\} > b^2(a)$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Таким образом, максимальное значение функционала $b(a)$ может достигаться только, если $a_i = 1$ при $\dfrac{r_i}{a_i} > b(a)$. Таких a_i может быть конечное число $m \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Пусть

$$r_{i_1} \ge r_{i_2} \ge \ldots \ge r_{i_m} > \frac{r_{i_{m+1}}}{a_{i_{m+1}}} = \ldots = b(a) \ge \sup\{r_{i_{m+1}}, r_{i_{m+2}}, \ldots\},$$

что в силу упорядоченности компонент вектора r можно переписать в виде неравенств

$$r_1 \ge \ldots \ge r_m > \frac{r_{m+1}}{a_{m+1}} = \ldots = b(a) \ge r_{m+1}.$$

Отсюда $a_k = 1$, $k \le m$, $a_k = \frac{r_k}{b(a)}$, $k > m$. Поскольку $N = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k^2 = m + \sum\limits_{k>m} \frac{r_k^2}{b^2(a)}$, то $b^2(a) = \frac{1}{N-m}\sum\limits_{k>m} r_k^2$, причем $b_m = b(a)$ зависит только от m. Условия $r_m > b_m \geq r_{m+1}$ можно переписать следующим образом:

$$r_m > b_m \iff r_m^2 > \frac{1}{N-m}\sum_{k=m+1}^{\infty} r_k^2 \iff (N-m)r_m^2 > \sum_{k=m+1}^{\infty} r_k^2$$

$$\iff (N-m)\sum_{k=m}^{\infty} r_k^2 > (N-m-1)\sum_{k=m+1}^{\infty} r_k^2$$

$$\iff b_{m-1} > b_m,\ 1 \leq m < N; \quad (4.4.5)$$

$$b_m \geq r_{m+1} \iff \frac{1}{N-m}\sum_{k=m+1}^{\infty} r_k^2 \geq r_{m+1}^2 \iff$$

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} r_k^2 \geq (N-m)r_{m+1}^2 \iff \sum_{k=m+2}^{\infty} r_k^2 \geq (N-m-1)r_{m+1}^2$$

$$\iff (N-m)\sum_{k=m+2}^{\infty} r_k^2 \geq (N-m-1)\sum_{k=m+1}^{\infty} r_k^2$$

$$\iff b_{m+1} \geq b_m, \quad 0 \leq m < N-1. \quad (4.4.6)$$

Обозначим через $\widehat{m}$ то значение величины m, для которого достигается $\min\limits_{0\leq m<N} \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \dfrac{r_k^2}{N-m}$. Тогда $\widehat{m}$ определяется единственным образом (нетрудно понять, что функция $f(x) = \frac{1}{N-x}\int\limits_x^{\infty} r^2(t)\,dt$, где $r(t)$ — монотонно убывает, имеет только одну точку локального минимума на $[0,\ N]$) и удовлетворяет соотношениям (4.4.5),(4.4.6). Таким образом, $b = b_{\widehat{m}}$. □

Если в теореме 4.4.1 положить $m = \left[\frac{N}{2}\right]$, то получим следующую оценку сверху поперечника по Бернштейну, которая в дальнейшем будет использована при вычислении поперечников по Бернштейну функциональных классов.

Следствие 1. *Имеет место неравенство*

$$b_N(B_\infty(r), l_2) \leq \left(\frac{2}{N}\sum_{k>\frac{N}{2}} r_k^2\right)^{1/2}.$$

Теорема 4.4.2 (о точном значении поперечника по Бернштейну бесконечномерного эллипсоида в l_q). *Пусть* $1 \le p \le q \le \infty$, $r_1 \ge r_2 \ge \ldots \ge r_n \ge \ldots > 0$. *Тогда*

$$b_N(B_p(r), l_q) = \begin{cases} r_N, & p = q, \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{N} r_k^{-\frac{pq}{q-p}}\right)^{-\frac{q-p}{qp}}, & p < q < \infty, \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{N} r_k^{-p}\right)^{-\frac{1}{p}}, & p < q = \infty. \end{cases}$$

Доказательство. Оценка снизу. Из неравенства 1.1.5 (Гельдера для сумм) легко вывести, что при $1 \le p, q, z \le \infty$

$$\|\{x_k y_k\}\|_p \le \|x\|_q \|y\|_z, \quad \tfrac{1}{p} = \tfrac{1}{q} + \tfrac{1}{z}.$$

Положим $L_N = \operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_N\}$, $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, $k \le N$, — векторы из канонического базиса в l_q. Тогда для $x \in L_N$ имеем

$$\left\|\left\{\frac{x_k}{r_k}\right\}\right\|_p \le \|x\|_q \cdot \left\|\left\{\frac{1}{r_k}\right\}_{k=1,\ldots,N}\right\|_z \le 1$$

при $\|x\|_q \le \dfrac{1}{\left\|\left\{\frac{1}{r_k}\right\}_{k=1,\ldots,N}\right\|_z}$. Отсюда по определению поперечника по Бернштейну получаем нужную оценку снизу

$$b_N(B_p(r), l_q) =: \sup_{\varepsilon, L_N}\{\varepsilon \mid \varepsilon_q \cap L_N \subset B_p(r)\} \ge \frac{1}{\left\|\left\{\frac{1}{r_k}\right\}_{k=1,\ldots,N}\right\|_z}.$$

Оценка сверху. а) Пусть $1 \le p = q \le \infty$. Обозначим через a последовательность $\{a_k,\ k \le N\}$, где $a_k = r_k$, $k = 1, \ldots, N$, $a_k = r_N$, $k > N$. Тогда $B_p(r) \subset B_p(a)$ и, следовательно,

$$b := b_N(B_p(r), l_p) \le b_N(B_p(a), l_p).$$

Обозначим через L подпространство в l_p последовательностей $\{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, у которых $x_k = 0$, $k = 1, \ldots, N-1$. Тогда $\operatorname{codim} L = N - 1$ и по определению поперечника по Бернштейну

$$b \le b_N(B_p(a), l_p) := \sup_{\varepsilon, L_N}\{\varepsilon \mid \varepsilon_p \cap L_N \subset B_p(a)\} \le$$
$$\le \sup_{\varepsilon, L_N}\{\varepsilon \mid \varepsilon_p \cap L_N \cap L \subset B_p(a)\} \le \sup_{\varepsilon, L_N}\{\varepsilon \mid \varepsilon_p \cap L_N \cap L \subset B_p(a) \cap L\}. \tag{4.4.7}$$

Заметим, что $B_p(a) \cap L = r_N B_p \cap L$, а $1 \le \dim(L_N \cap L) \le N$. Поэтому

$$b \le r_N \sup_{\varepsilon, L_k, k=1,\dots N} \{\varepsilon \mid \varepsilon_p \cap L_k \subset B_p\} = r_N \max_{k=1,\dots N} b_k(B_p, l_p) = r_N,$$

так как легко видеть, что $b_k(B_p, l_p) = 1$.

б) Пусть $1 \le p < q < \infty$. Из определения b_N нетрудно понять, что

$$b = b_N(B_p(r), l_q) = \sup_{L_N} \inf_{x \in L_N} \frac{\left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{x_k}{r_k}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}} = \sup_{L_N} \inf_{x \in L_N} \frac{\left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^q \mu_k\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^p \mu_k\right)^{\frac{1}{p}}}, \tag{4.4.8}$$

$\mu_k := r_k^{\frac{pq}{p-q}}$, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим через A_N множество векторов $x \in B_\infty = B_\infty(1)$, у которых не менее N координат равны по модулю 1 (остальные, естественно, по модулю меньше 1). Тогда для любого подпространства L_N размерности N из l_∞ найдется элемент $x \in L_N \cap A$. Такие и только такие точки x являются крайними точками единичного шара для любого N-мерного подпространства. (Об этом утверждении см. А. Пич, [1982, с. 176] и П. А. Чалов [1981]). Поэтому из (4.4.8)

$$b \le \sup_{L_N} \inf_{x \in L_N \cap A} \frac{\left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^q \mu_k\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^p \mu_k\right)^{\frac{1}{p}}}. \tag{4.4.9}$$

Применяя неравенство $\frac{(a+|x|^q\mu)^{\frac{1}{q}}}{(a+|x|^p\mu)^{\frac{1}{p}}} \le a^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$ при $a > 0$, $\mu > 0$, $|x| \le 1$, $1 \le p \le q < \infty$, получим из (4.4.9)

$$b \le \sup_{i_1,\dots,i_N} \left(\sum_{j=1}^N \mu_{i_j}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^N \mu_i\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^N r_i^{-\frac{pq}{q-p}}\right)^{-\frac{q-p}{qp}}.$$

В этом пункте мы использовали методику близкую к использованной А. Пичем ([1982], с. 176), для вычисления оценки снизу поперечников по Колмогорову конечномерных множеств.

в) В случае $1 \le p < q = \infty$ доказательство оценки сверху проводится как и в случае (б). Имеем

$$b \le b_N(B_p(r), l_\infty) = \sup_{L_N} \inf_{x \in L_N} \frac{\|x\|_\infty}{\|\{\frac{x_k}{r_k}\}\|_p}.$$

Подставляя в последний инфимум элемент $x \in L_N \cap A_N$, получим

$$b \le \sup_{L_N} 1 \Big/ \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k/r_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \sup_{L_N} 1 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{N} r_{k_i}^{-p} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поскольку $r_1 \ge r_2 \ge \ldots$, то $\sum\limits_{i=1}^{N} r_{k_i}^{-p} \ge \sum\limits_{i=1}^{N} r_i^{-p}$ и, следовательно,

$$b \le 1 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{N} r_i^{-p} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{N} r_i^{-p} \right)^{-\frac{1}{p}}. \qquad \square$$

Поскольку бернштейновский поперечник измеряется копоперечником по Колмогорову, то теоремы 4.4.1 и 4.4.2 определяют точные значения колмогоровского копоперечника $d_{-N}(B_1(r), l_2)$ и $d_{-N}(B_p(r), l_q)$ при $p \le q$. Вычисление колмогоровских поперечников конечномерных аналогов этих множеств осуществлялось в работах А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова, Ю. М. Смирнова [1946], А. И. Мальцева [1947], С. Б. Стечкина [1954], А. Пича [1982], М. И. Стесина [1975], Л. Б. Софмана [1969], [1973], С. А. Смоляка [1965].

4.5 Поперечники по Бернштейну классов функций

В этом пункте определяются порядки поперечников по Бернштейну классов периодических функций нескольких переменных $b_N(W_p^r(\mathbb{T}^d), L_q)$ в смешанных нормах при всех $1 < p, q < \infty$ и $b_N(H_p^r(\mathbb{T}^d), L_q)$ при $1 < q \le p < \infty$ и $1 < p, q \le 2$.

При нахождении бернштейновских поперечников функциональных классов используются найденные в п. 4.5 значения бернштейновских поперечников бесконечномерных эллипсоидов. Определение поперечников по Бернштейну эквивалентно вычислению наилучшего приближения подпространствами коразмерности N

поляр в сопряженной метрике. Поэтому методика оценок b_N использует и развивает методику оценок колмогоровских поперечников d_N функциональных классов. В ряде случаев нахождение поперечников по Бернштейну сводится к оценкам величины

$$h_N(W^r_p, L_q) := \inf_{L_N} \sup_{x\in L_N} \frac{\|x^{(r)}\|_{L_p}}{\|x\|_{L_q}} \overset{(4.4.2)}{=} b_N^{-1}(W^r_p, L_q).$$

Величина h_N для классов периодических функций одной переменной $W^r_p(\mathbb{T}^1)$ введена В. Е. Майоровым, названа им величиной Бернштейна–Никольского и подсчитана при $1 < q \le p < \infty$ [1990]. При $p < q$ величина $h_N(W^r_p(\mathbb{T}^1), L_q)$ найдена И. Г. Царьковым.

Содержание пункта 4.5 имеется в работе автора [1992a].

Теорема 4.5.1 (о поперечнике по Бернштейну класса Соболева)**.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $p, r \in \mathbb{R}^d$, $0 < r_{i_1} = \ldots = r_{i_{l+1}} < r_{i_{l+2}} \le \ldots \le r_{i_d}$. *Тогда*

$$h_N(W^r_p(\mathbb{T}^d), L_p) = b_N^{-1}(W^r_p(\mathbb{T}^d), L_p) \asymp \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{r_{i_1}}.$$

Доказательство. Оценка сверху. Возьмем $\hat{L}_N = \mathrm{lin}\,\{e^{i\langle k,t\rangle},\ k \in \square_s,\ \langle s, r\rangle \le m\}$, где величина m выбирается из условия $N = m^l 2^{\frac{m}{r_{i_1}}}$. Тогда $\dim \hat{L}_N = \sum\limits_{\langle s,r\rangle\le m} 2^{\langle s,1\rangle} \asymp m^l 2^{\frac{m}{r_{i_1}}} = N$. По неравенству (2.1.5) Бернштейна для функций нескольких переменных получаем нужную оценку сверху:

$$h_N(W^r_p, L_p) \le \sup_{x\in\hat{L}_N} \frac{\|x^{(r)}(\cdot)\|_p}{\|x(\cdot)\|_p} \ll \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{r_{i_1}}.$$

Оценка снизу. Возьмем произвольное подпространство $L_N \subset L_p$ размерности N. Обозначим $L'_N = L_N \cap \mathcal{T}^\perp$, где $\mathcal{T} = \mathrm{lin}\,\{e^{i\langle k,t\rangle}$, $k \in \square_s$, $\langle s, r\rangle \le m\}$, а величина m выбрана таким образом, чтобы $\dim \mathcal{T} \asymp N$, $\dim \mathcal{T} \le \frac{N}{2}$. Тогда $N \asymp m^l 2^{\frac{m}{r_{i_1}}}$, $\mathrm{codim}\, \mathcal{T}^\perp \le \frac{N}{2}$ и, следовательно, $\dim L'_N \ge \frac{N}{2}$. Возьмем произвольную функцию

$x(\cdot) \in L'_N$. Поскольку $x(\cdot) = \sum\limits_{\langle s,r\rangle > m} \delta_s x(\cdot)$, то

$$\|x^{(r)}(\cdot)\|_p \overset{(1.1.2)}{\asymp} \left\| \left(\sum_{\langle s,r\rangle > m} |2^{\langle s,r\rangle} \delta_s x(\cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \geq$$

$$\geq 2^m \left\| \left(\sum_{\langle s,r\rangle > m} |\delta_s x(\cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \overset{(1.1.2)}{\asymp} 2^{\mu} \|x(\cdot)\|_p \asymp \left(\frac{N}{\log^l N} \right)^{r_{i_1}} \|x(\cdot)\|_p.$$

Отсюда вытекает нужная оценка снизу:

$$h_N(W_p^r, L_p) \gg \left(\frac{N}{\log^l N} \right)^{r_{i_1}}. \qquad \square$$

Теорема 4.5.2 (о поперечнике по Бернштейну класса Соболева и класса Гельдера–Никольского)**.** *Пусть* $2 \leq q \leq p < \infty$, $p, q, r \in \mathbb{R}^d$, $\alpha = r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $\frac{1}{2} < \alpha_{i_1} = \ldots = \alpha_{i_{l+1}} < \alpha_{i_{l+2}} \leq \ldots \leq \alpha_{i_d}$, $W = W_p^r(\mathbb{T}^d)$ *или* $H_p^r(\mathbb{T}^d)$. *Тогда*

$$h_N(W, L_q) = b_N^{-1}(W, L_q) \asymp \left(\frac{N}{\log^l N} \right)^{\alpha_{i_1}}.$$

Доказательство. Оценка сверху в силу неравенства $\|\cdot\|_{H_p^r} \ll \|\cdot\|_{W_p^r}$ сводится к оценке сверху величины $h_N(W_p^r, L_q)$. Возьмем $\hat{L}_N = \operatorname{lin}\{e^{i\langle k,t\rangle}, k \in \square_s, \langle s,\alpha\rangle \leq m\}$, где величина m выбирается из условия $N = m^l 2^{\frac{m}{\alpha_{i_1}}}$. Тогда $\dim \hat{L}_N = \sum\limits_{\langle s,\alpha\rangle \leq m} 2^{\langle s,1\rangle} \asymp m^l 2^{\frac{m}{\alpha_{i_1}}} = N$.

По неравенству (2.1.5) Бернштейна–Никольского получаем нужную оценку сверху:

$$h_N(W_p^r, L_q) \leq \sup_{x \in \hat{L}_N} \frac{\|x^{(r)}(\cdot)\|_p}{\|x(\cdot)\|_q} \ll \left(\frac{N}{\log^l N} \right)^{r_{i_1}}.$$

Оценка снизу величины h_N, эквивалентна оценке сверху поперечника b_N, которая в силу вложения $W_p^r \subset\subset H_p^r$ сводится к оценке сверху $b_N(H^r_p, L_q)$. Докажем ее вначале для $q = 2$ и вектора $p = (p, \dots, p)$ с равными компонентами. Используя дискретизацию, согласно теореме 3.2.1 имеем, с одной стороны,

$$\|x(\cdot)\|_{H^r_p} \asymp \sup_s \|2^{\langle s,r\rangle}\delta_s x(\cdot)\|_{L_p} \overset{(3.2.1)}{\asymp} \sup_s \|2^{\langle s,r-\frac{1}{p}\rangle} x_s\|_{l_p(\square_s)} = \|x\|_{l_{p,\infty}(\lambda)},$$

$\lambda = \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$, $\lambda_k = 2^{\langle s,r-\frac{1}{p}\rangle}$ при $k \in \square_s$, $\|x\|_{l_{p,\infty}(\lambda)} = \sup\limits_s \|x_s\|_{l_p(\lambda,\square_s)}$, с другой стороны,

$$\|x(\cdot)\|_{L_2} = \Big(\sum_s \|\delta_s x(\cdot)\|_2^2\Big)^{\frac{1}{2}} \asymp \Big(\sum_s \|2^{\langle s,-\frac{1}{2}\rangle} x_s\|^2_{l_2(\square_s)}\Big)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{l_2(\mu,\mathbb{Z}^d)},$$

$\mu = \{\mu_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$, $\mu_k = 2^{\langle s,-\frac{1}{2}\rangle}$ при $k \in \square_s$. Отсюда

$$b_N(H^\alpha_p, L_2) \ll b_N(B_{p,\infty}(\lambda), l_2(\mu)) = b_N(B_{p,\infty}(\lambda\mu^{-1}), l_2) \ll \overset{(1.1.9)}{\ll} b_N(B_\infty(\lambda\mu^{-1}), l_2)).$$

Оценивая сверху поперечник по Бернштейну бесконечномерного куба в пространстве l_2 по следствию 1, выводим искомую оценку сверху для $h_N(H^r_p, L_2)$ и вектора p с равными координатами и $\alpha > \frac{1}{2}$ $\left(\Leftrightarrow r \geq \frac{1}{p}\right)$

$$b_N(H^\alpha_p, L_2) \ll \Bigg(\sum_{\langle s,\alpha\rangle > m} \Big(2^{\langle s,\frac{1}{2}\rangle} 2^{\langle s,-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\rangle}\Big)^2 \frac{1}{N}\Bigg)^{1/2} =$$

$$= \Bigg(\sum_{\langle s,\alpha\rangle > m} 2^{2\langle s,-r+\frac{1}{p}\rangle} N^{-1}\Bigg)^{1/2} \asymp \left(m^l 2^{\frac{2m(-r_{i_1}+\frac{1}{p})}{\alpha_{i_1}}} m^{-l} 2^{-\frac{m}{\alpha_{i_1}}}\right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp 2^{\frac{m(-r_{i_1}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}{\alpha_{i_1}}} = 2^{-m} \asymp \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{-\alpha_{i_1}},$$

где m выбирается из условий $\sum\limits_{\langle s,\alpha\rangle \leq m} 2^{\langle s,1\rangle} \leq Cm^l 2^{\frac{m}{\alpha_{i_1}}} \leq \frac{N}{2}$, $m^l 2^{\frac{m}{\alpha_{i_1}}} \asymp N$.

Пусть теперь $q \geq 2$ и вектор $p = (p_1, \dots, p_d)$ может иметь не равные компоненты. Тогда в силу неравенства (1.3.2) $\|x(\cdot)\|_q \ll \|x^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}(\cdot)\|_2$ и вложения $H_p^r \subset\subset H_p^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{\hat{p}}}$, где $\hat{p} = (\hat{p}, \dots, \hat{p})$, $\hat{p} := \max\{p_1, \dots, p_d\}$, оценка сверху для b_N сводится к уже доказанному случаю:

$$b_N(H_p^r, L_q) \ll b_N(H_p^r, W_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}) = b_N(H_p^{r-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}}, L_2) \ll$$
$$\ll b_N(H_{\hat{p}}^{r-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\frac{1}{\hat{p}}}, L_2) \ll \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{-\alpha_{i_1}}$$

при $r - \frac{1}{2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\hat{p}} > \frac{1}{\hat{p}}$, т. е. $r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$. $\square$

Теорема 4.5.3. *Пусть* $1 < q \leq 2 \leq p < \infty$, $p, q, r \in \mathbb{R}^d$, $\alpha = r - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \alpha_{i_1} = \ldots = \alpha_{i_{l+1}} < \alpha_{i_{l+2}} \leq \ldots \leq \alpha_{i_d}$, $W = W_p^r(\mathbb{T}^d)$ *или* $H_p^r(\mathbb{T}^d)$. *Тогда*

$$h_N(W, L_q) = b_N^{-1}(W, L_q) \asymp \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{\alpha_{i_1}}.$$

Доказательство. Оценка сверху в силу неравенства $\|\cdot\|_{H_p^r} \ll \|\cdot\|_{W_p^r}$ сводится к оценке сверху величины $h_N(W_p^r, L_q)$. Возьмем $S = \{s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}^d \mid s_j = 1$ при $j \notin \{i_1, \dots, i_{l+1}\}$, $\langle s, 1\rangle = m\}$, $\mathcal{T} = \operatorname{lin}\{e^{i\langle k,t\rangle},\ k \in \square_s,\ s \in S\}$, где величина $m \in \mathbb{N}$ определяется из условия $N \asymp m^l 2^m$, т. е. $\bar{N} := \dim \mathcal{T} \asymp N$, так, чтобы $\bar{N} \geq 2N$. Поскольку $h_N(W_p^r, L_q) \leq h_N(W_p^r, L_{\hat{q}})$ по неравенству (1.3.1) $\|\cdot\|_q \geq \|\cdot\|_{\hat{q}}$, $\hat{q} = \min\{q_1, \dots, q_d\}$, и так как требуемая оценка сверху не зависит от q, то будем в дальнейшем считать, что вектор q имеет равные координаты. Тогда по соотношению (4.4.2), двойственности (4.4.4) и определению поперечника по Колмогорову

$$h_N(W_p^r, L_q) = d_{-N}(W_{p'}^{-r}, L_{q'}) \leq d_{\bar{N}-N}(W_{p'}^{-r} \cap \mathcal{T}, L_{q'}) \leq$$
$$\leq d_N(W_{p'}^{-r} \cap \mathcal{T}, L_{q'}), \quad (4.5.1)$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Оценку сверху последнего поперечника проводим методом, изложенным в параграфе 3.

Используя вложение $W_{p'}^{-r} \subset\subset W_2^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}} = W_2^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} = W_2^{-\alpha}$ при $p' \le 2$ по теореме 1.3.2 и теорему 1.1.2 (Литтльвуда–Пэли), имеем из (4.5.1)

$$h_N(W_p^r, L_q) \le d_N(W_{p'}^{-r} \cap \mathcal{T}, L_{q'}) \ll d_N(W_2^{-\alpha} \cap \mathcal{T}, L_{q'}) \ll \\ \ll d_N(W_2^{-\alpha} \cap \mathcal{T}, L_{q'} \cap \mathcal{T}). \quad (4.5.2)$$

Если $x(\cdot) = \sum\limits_{s \in S} \delta_s x(\cdot) \in W_2^{-r}$, то по теореме 3.2.1, с одной стороны,

$$1 \ge \|x^{(-\alpha)}(\cdot)\|_2 \overset{(1.1.3)}{\asymp} 2^{-m\alpha_{i_1}} \left(\sum_{s \in S} \|\delta_s x(\cdot)\|_2^2 \right)^{1/2} \asymp \\ \asymp 2^{-m\alpha_{i_1} - \frac{m}{2}} \left(\sum_{s \in S} \|x_s\|_{l_2(\square_s)}^2 \right)^{1/2},$$

значит, если $x(\cdot) = \sum\limits_{s \in S} \delta_s x(\cdot) \in W_2^{-r}$, то $\left(\sum\limits_{s \in S} \|x_s\|_{l_2(\square_s)}^2 \right)^{1/2} \ll 2^{m\alpha_{i_1} + \frac{m}{2}}$, а с другой стороны,

$$\left\| \sum_{s \in S} \delta_s y(\cdot) \right\|_{q'} \overset{(2.1.7)}{\ll} |S|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q'}} \left(\sum_{s \in S} \|\delta_s y(\cdot)\|_{q'}^{q'} \right)^{1/q'} \asymp \\ \asymp m^{\frac{l}{2} - \frac{l}{q'}} 2^{-\frac{m}{q'}} \left(\sum_{s \in S} \|y_s\|_{l_{q'}(\square_s)}^{q'} \right)^{1/q'}.$$

Проводя дискретизацию согласно теореме 3.2.1 и подставляя оценки поперечников конечномерных множеств, получим из (4.5.2)

$$h_N(W_p^r, L_q) \ll m^{\frac{l}{2} - \frac{l}{q'}} 2^{m\alpha_{i_1} + \frac{m}{2} - \frac{m}{q'}} d_N(B_2^{\bar{N}}, l_{q'}^{\bar{N}}) \asymp m^{\frac{l}{2} - \frac{l}{q'}} 2^{m\alpha_{i_1} + \frac{m}{2} - \frac{m}{q'}} \times \\ \times \bar{N}^{\frac{1}{q}'} N^{-\frac{1}{2}} \asymp m^{\frac{l}{2} - \frac{l}{q'}} 2^{m\alpha_{i_1} + \frac{m}{2} - \frac{m}{q'}} (m^l 2^m)^{\frac{1}{q'} - \frac{1}{2}} = 2^{m\alpha_{i_1}} \asymp \left(\frac{N}{\log^l N} \right)^{\alpha_{i_1}}.$$

Оценка снизу в силу неравенств $\|\cdot\|_{W_p^r} \gg \|\cdot\|_{H_p^r}$ и (1.3.1) $\|\cdot\|_q \le \|\cdot\|_2$ сводится к величине $h_N(W_p^r, L_2)$, порядок которой вычислен в теореме 4.5.2:

$$h_N(W^r_p, L_q) \gg h_N(H^r_p, L_q) \geq h_N(H^r_p, L_2) \asymp \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{\alpha_{i_1}}. \qquad \square$$

Теорема 4.5.4. *Пусть* $1 < p, q \leq 2$, $p, q, r \in \mathbb{R}^d$, $\frac{1}{2} < r_{i_1} = \ldots = r_{i_{l+1}} < r_{i_{l+2}} \leq \ldots \leq r_{i_d}$, $W = W^r_p(\mathbb{T}^d)$ *или* $H^r_p(\mathbb{T}^d)$. *Тогда*

$$h_N(W, L_q) = b_N^{-1}(W, L_q) \asymp \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{r_{i_1}}.$$

Доказательство. Оценка сверху в силу неравенств $\|\cdot\|_{H^r_p} \ll \|\cdot\|_{W^r_p} \ll \|\cdot\|_{W^r_2}$ сводится к оценке сверху величины $h_N(W^r_2, L_q)$, порядок которой был вычислен в теореме 4.5.3 (отметим, что оценка сверху в теореме 4.5.3 выводилась без ограничения на гладкость r):

$$h_N(H^r_p, L_q) \ll h_N(W^r_p, L_q) \leq h_N(W^r_2, L_q) \ll \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{r_{i_1}}.$$

Оценка снизу величины h_N эквивалентна оценке сверху поперечника b_N, которая в силу вложения $W^r_p \subset\subset H^r_p$ и неравенства (1.3.1) $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_2$ при $q \leq 2$ сводится к оценке сверху поперечника $b_N(H^r_p, L_2)$:

$$b_N(W^r_p, L_q) \ll b_N(H^r_p, L_q) \leq b_N(H^r_p, L_2).$$

По неравенству Хаусдорфа–Юнга для смешанных норм (1.4.6) $\|\delta_s x(\cdot)\|_p \geq \|\{x_k,\ k \in \square_s\}\|_{l^{2\langle s,1\rangle}_{p'}}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, вложению $B_{p'} \subset B_\infty$ и равенству Парсиваля $\Big\|\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^d} x_k e^{i\langle k, \cdot\rangle}\Big\|_2 = \Big(\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^d} x_k^2\Big)^{1/2}$ получим, что

$$b_N(H^r_p, L_2) \ll b_N(B_{p',\infty}(\lambda), l_2(\overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d)) \leq b_N(B_\infty(\lambda), l_2(\overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d)),$$

где $\lambda = \{\lambda_k,\ k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}{}^d\}$, $\lambda_k = 2^{\langle s,r\rangle}$ при $k \in \square_s$. Оценивая сверху поперечник по Бернштейну бесконечномерного куба в пространстве l_2 по следствию из теоремы 4.4.1, выводим требуемую оценку сверху для $b_N(H^r_p, L_2)$

$$b_N(H^r_p, L_2) \ll \left(\sum_{\langle s,r\rangle > m} \frac{2^{\langle s,1\rangle} 2^{-2\langle s,r\rangle}}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \asymp \left(\frac{m^l 2^{\frac{m(1-2r_{i_1})}{r_{i_1}}}}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp 2^{-m} \asymp \left(\frac{\log^l N}{N}\right)^{r_{i_1}},$$

где величина m выбирается из условий

$$\sum_{\langle s,r\rangle \le m} 2^{\langle s,1\rangle} \le C m^l 2^{\frac{m}{r_{i_1}}} \le \frac{N}{2}, \quad m^l 2^{\frac{m}{r_{i_1}}} \asymp N. \qquad \square$$

Если $1 < q \le p \le 2$, то для класса W^r_p можем понизить требование гладкости. При этом оценка снизу величины $h_N(W^r_p, L_q)$ сводится к уже найденному в теореме 4.5.1 порядку $h_N(W^r_p, L_p)$ с помощью неравенства (1.3.1) $\|\cdot\|_q \le \|\cdot\|_p$:

$$h_N(W^r_p, L_q) \gg h_N(W^r_p, L_p) \asymp \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{r_{i_1}}.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 4.5.5. *Пусть* $1 < q \le p \le 2$, $p, q, r \in \mathbb{R}^d$, $0 < r_{i_1} = \ldots = r_{i_{l+1}} < r_{i_{l+2}} \le \ldots \le r_{i_d}$. *Тогда*

$$h_N(W^r_p(\mathbb{T}^d), L_q) = b_N^{-1}(W^r_p(\mathbb{T}^d), L_q) \asymp \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{r_{i_1}}.$$

Теорема 4.5.6. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $p, q \in \mathbb{R}^d$, $p_0 = \min\{p_1, ..., p_d, 2\}$, $q_0 = \max\{q_1, \ldots, q_d, 2\}$, $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} < r_{i_1} = \ldots = r_{i_{l+1}} < r_{i_{l+2}} \le \ldots \le r_{i_d}$. *Тогда*

$$h_N(W^r_p(\mathbb{T}^d), L_q) = b_N^{-1}(W^r_p(\mathbb{T}^d), L_q) \asymp \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{r_{i_1}}.$$

Теорема 4.5.7. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $r, p, q \in \mathbb{R}^d$, $p_0 := \min\{p_1, \dots, p_d, 2\}$, $q_0 := \max\{q_1, \dots, q_d, 2\}$, $\frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0} < r_{i_1} = \dots = r_{i_{l+1}} < r_{i_{l+2}} \le \dots \le r_{i_d}$. *Тогда*

$$h_N(W_p^r(\mathbb{T}^d), L_q) = b_N^{-1}(W_p^r(\mathbb{T}^d), L_q) \asymp \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{r_{i_1}}.$$

Доказательство. Оценка сверху. Возьмем $\hat{L}_N = \operatorname{lin}\{e^{i\langle k,t\rangle},\ k \in \square_s,\ \langle s, r\rangle \le m\}$, где величина m выбирается из условия $N = m^l 2^{\frac{m}{r_{i_1}}}$. Тогда $\dim \hat{L}_N = \sum\limits_{\langle s,r\rangle \le m} 2^{\langle s,1\rangle} \asymp m^l 2^{\frac{m}{r_{i_1}}} = N$. По неравенству (2.1.5) Бернштейна–Никольского для функций нескольких переменных получаем нужную оценку сверху:

$$h_N(W_p^r, L_q) \le \sup_{x \in \hat{L}_N} \frac{\|x^{(r)}(\cdot)\|_p}{\|x(\cdot)\|_q} \ll \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{r_{i_1}}.$$

Оценка снизу величины $h_N(W_p^r, L_q)$ в силу неравенств $\|\cdot\|_p \ge \|\cdot\|_{p_0}$, $\|\cdot\|_q \le \|\cdot\|_{q_0}$ по теореме 1.3.1 сводится к оценке снизу величины $h_N(W_{p_0}^r, L_{q_0})$ при $1 < p_0 \le 2 \le q_0 < \infty$ в скалярных нормах. Поэтому в дальнейшем проводим оценку снизу $h_N(W_p^r, L_q)$ при скалярных p и q, $1 < p \le 2 \le q < \infty$; для простоты записи считаем, что $r_1 = \dots = r_{l+1} < r_{l+2} \le \dots \le r_d$.

В силу оценки снизу для $\|x^{(r)}(\cdot)\|_p$ и оценки сверху $\|x(\cdot)\|_q$ имеем

$$h_N := h_N(W_p^r, L_q) =$$

$$= \inf_{L_N} \sup_{x \in L_N} \frac{\|x^{(r)}(\cdot)\|_p}{\|x(\cdot)\|_q} \overset{(2.1.6)}{\gg} \inf_{L_N} \sup_{x \in L_N} \frac{\left(\sum\limits_{s \in \mathbb{N}^d} \|2^{\langle s,r\rangle} \delta_s x(\cdot)\|_p^2\right)^{1/2}}{\left(\sum\limits_{s \in \mathbb{N}^d} \|\delta_s x(\cdot)\|_q^2\right)^{1/2}}.$$

Как и при доказательстве теоремы 4.5.1 можно показать, что при оценке снизу порядка величины h_N можно считать, что $x(\cdot) = \sum\limits_{\langle s,r\rangle > m} \delta_s x(\cdot)$, где величина m определяется из равенства $N =$

$m^l 2^{\frac{m}{r_{i_1}}}$. Используя дискретизацию согласно теореме 3.2.1, получим далее

$$h_N^2 \gg \inf_{L_N} \sup_{x \in L_N} \frac{\sum\limits_{\langle s,r\rangle > m} \|2^{\langle s, r-\frac{1}{p}\rangle} x_s\|^2_{l_p(\square_s)}}{\sum\limits_{\langle s,r\rangle > m} \|2^{-\langle s, \frac{1}{q}\rangle} x_s\|^2_{l_q(\square_s)}} =$$

$$= \inf_{L_N} \sup_{x \in L_N} \frac{\sum\limits_{\langle s,r\rangle > m} \|2^{\langle s, \alpha - \varepsilon\rangle} x_s\|^2_{l_p(\square_s)}}{\sum\limits_{\langle s,r\rangle > m} \|2^{-\langle s, \varepsilon\rangle} x_s\|^2_{l_q(\square_s)}},$$

где $\alpha = r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d) \in \mathbb{R}^d$ — вектор с координатами $\varepsilon_i = \varepsilon$, $i = 1, \ldots, l+1$, $\varepsilon_i = \frac{3\varepsilon r_i}{2r_1}$, $i = l+2, \ldots, n$, $\varepsilon > 0$ — достаточно малая величина.

Обозначим через ${}_N$ множество векторов $x \in B_\infty(\mathbb{Z}^d)$, у которых не менее N координат равны по модулю 1 (остальные, естественно, по модулю меньше 1). Тогда легко показать (аналогичное рассуждение использовано А. Пичем [1982, с. 177] при оценке снизу $d_N(B_p^n, l_q^n)$, $q \le p$), что для любого подпространства L_N размерности N из $l_\infty(\mathbb{Z}^d)$ найдется элемент $x \in L_N \cap A_N$. Поэтому

$$h_N^2 \gg \inf_{L_N,\ x \in L_N \cap A_N} \frac{\sum\limits_{\langle s,r\rangle > m} 2^{2\langle s, \alpha - \varepsilon\rangle} \|x_s\|^2_{l_p(\square_s)}}{\sum\limits_{\langle s,r\rangle > m} 2^{-2\langle s, \varepsilon\rangle} \|x_s\|^2_{l_q(\square_s)}}.$$

Поскольку $\|x_s\|_{l_p(\square_s)} = \Big(\sum\limits_{k \in \square_s} |x_{ks}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \ge \Big(\sum\limits_{k \in \square_s} |x_{ks}|^q\Big)^{\frac{1}{p}} = \|x_s\|^{\frac{q}{p}}_{l_q(\square_s)}$ при $x \in A_N$, то

$$h_N^2 \gg \inf_{L_N,\ x \in L_N \cap A_N} \frac{\sum\limits_{\langle s,r\rangle > m} 2^{2\langle s, \alpha - \varepsilon\rangle} \|x_s\|^{\frac{2q}{p}}_{l_q(\square_s)}}{\sum\limits_{\langle s,r\rangle > m} 2^{-2\langle s, \varepsilon\rangle} \|x_s\|^2_{l_q(\square_s)}}.$$

Если $x \in A_N$, то для $n_s := \|x_s\|^q_{l_q(\square_s)}$ получим ограничения: $0 \le$

$n_s \le 2^{\langle s,1\rangle}$, $\sum\limits_{\langle s,r\rangle>m} n_s \ge N$. Таким образом,

$$h_N \gg \inf\left\{\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}\;\Big|\; 0 \le n_s \le 2^{\langle s,1\rangle},\ \sum_{\langle s,r\rangle>m} n_s \ge N\right\}, \tag{4.5.3}$$

где $\Sigma_1 := \sum\limits_{\langle s,r\rangle>m} 2^{2\langle s,\alpha-\varepsilon\rangle} n_s^{\frac{2}{p}}$, $\Sigma_2 := \sum\limits_{\langle s,r\rangle>m} 2^{-2\langle s,\varepsilon\rangle} n_s^{\frac{2}{q}}$.

Оценим величину Σ_2 сверху. По неравенству 1.1.2 (Гельдера для сумм) при $t = \frac{q}{2} \ge 1$, $\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} = 1$ $\left(\frac{1}{t'} = 1 - \frac{2}{q}\right)$

$$\Sigma_2 = \sum_{\langle s,r\rangle>m} 2^{-2\langle s,\varepsilon\rangle} n_s^{\frac{2}{q}} \le \left(\sum_{\langle s,r\rangle>m} n_s^{\frac{2t}{q}}\right)^{\frac{1}{t}} \left(\sum_{\langle s,r\rangle>m} 2^{-2\langle s,\varepsilon\rangle t'}\right)^{\frac{1}{t'}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{\langle s,r\rangle>m} n_s\right)^{\frac{2}{q}} m^{\frac{l}{t'}} 2^{-\frac{2\varepsilon m}{r_1}} = \left(\sum_{\langle s,r\rangle>m} n_s\right)^{\frac{2}{q}} m^{l(1-\frac{2}{q})} 2^{-\frac{2\varepsilon m}{r_1}}$$

(поскольку $\frac{\varepsilon}{r_1} = \frac{\varepsilon_1}{r_1} = \ldots = \frac{\varepsilon_{l+1}}{r_{l+1}} < \frac{\varepsilon_{l+2}}{r_{l+2}} = \ldots = \frac{\varepsilon_d}{r_d} = \frac{3\varepsilon}{2r_1}$ в силу выбора вектора ε).

Оценим величину Σ_1 снизу. По неравенству 1.1.2 (Гельдера для сумм) при $z = \frac{2}{p} \ge 1$, $\frac{1}{z} + \frac{1}{z'} = 1$ $\left(\frac{1}{z'} = 1 - \frac{p}{2}\right)$

$$\sum_{\langle s,r\rangle>m} n_s = \sum_{\langle s,r\rangle>m} n_s 2^{\langle s,\alpha-\varepsilon\rangle p} 2^{-\langle s,\alpha-\varepsilon\rangle p} \le$$

$$\le \left(\sum_{\langle s,r\rangle>m} n_s^z 2^{\langle s,\alpha-\varepsilon\rangle pz}\right)^{\frac{1}{z}} \left(\sum_{\langle s,r\rangle>m} 2^{-\langle s,\alpha-\varepsilon\rangle pz'}\right)^{\frac{1}{z'}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{\langle s,r\rangle>m} n_s^{\frac{2}{p}} 2^{\langle s,\alpha-\varepsilon\rangle 2}\right)^{\frac{p}{2}} m^{\frac{l}{z'}} 2^{-\frac{m(\alpha_1-\varepsilon)p}{r_1}} =$$

$$= \Sigma_1^{\frac{p}{2}} m^{l(1-\frac{p}{2})} 2^{-\frac{m(\alpha_1-\varepsilon_1)p}{r_1}}, \tag{4.5.4}$$

поскольку $\frac{\alpha_i-\varepsilon_i}{r_i} = \frac{r_i - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{3\varepsilon r_i}{2r_1}}{r_i} = 1 - \frac{3\varepsilon}{2r_1} - \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{r_1} > 1 - \frac{\varepsilon}{r_1} - \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{r_1} = \frac{r_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \varepsilon}{r_1} = \frac{\alpha_1-\varepsilon}{r_1} > 0$ при $i > l+1$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$, а значит, $\frac{\alpha_1-\varepsilon_1}{r_1} = \ldots = \frac{\alpha_{l+1}-\varepsilon_{l+1}}{r_{l+1}} < \frac{\alpha_{l+2}-\varepsilon_{l+2})}{r_{l+2}} \leq \ldots \leq \frac{\alpha_d-\varepsilon_d}{r_d}$. Из неравенства (4.5.4) получаем оценку снизу для величины Σ_1:

$$\Sigma_1 \gg \left(\sum_{\langle s,r\rangle>m} n_s\right)^{\frac{2}{p}} m^{l(1-\frac{2}{p})} 2^{\frac{2m(\alpha_1-\varepsilon_1)}{r_1}}.$$

Подставляя оценки для Σ_1 и Σ_2 в неравенство (4.5.4) и извлекая квадратный корень, получим искомую оценку снизу для h_N

$$h_N \gg \left(\sum_{\langle s,r\rangle>m} n_s\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} m^{l(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} 2^{\frac{m\alpha_1}{r_1}} \geq N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} m^{l(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} 2^{\frac{m\alpha_1}{r_1}} \asymp$$

$$\asymp 2^{\frac{m(\alpha_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}{r_1}} = 2^m \asymp \left(\frac{N}{\log^l N}\right)^{r_1}. \qquad \square$$

Литература

[1] Бабаджанов С. Б., Тихомиров В. М. [1967] О поперечниках одного класса в пространствах L^p// Изв. АН Уз.ССР. Сер. физ.-мат., Т.2. С.24–30.

[2] Бабенко К. И. [1960a] О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами// ДАН СССР. Т.132, №2. С.247–250.

[3] Бабенко К. И. [1960b] О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами// ДАН СССР. Т.132, №5. С.982–985.

[4] Бахвалов Н. С. [1963] Теоремы вложения для классов функций с несколькими ограниченными производными// Вестник МГУ. Сер. матем., механ., №3. С.7–16.

[5] Белинский Э. С. [1977] Поведение констант Лебега некоторых методов суммирования кратных рядов Фурье// В кн. Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наукова думка. С.19–39.

[6] Белинский Э. С. [1989] Константы Лебега ступенчато-гиперболических частичных сумм кратных рядов Фурье// Сборник "Теория отображений и приближение функций". Киев: Наукова думка. С.23–27.

[7] Белинский Э. С. [1991] Две экстремальные задачи для тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник// Мат. заметки. Т.49, №1. С.12–18.

[8] Белинский Э. С., Галеев Э. М. [1991] О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник// Вестник МГУ. Сер. матем., механ., №2. С.3–7.

[9] Бенедек А., Панцоне Р. (Benedec A., Panzone R.) [1961] The spaces L^p with mixed norm// Duke Math. J., V.28, №3. P.301–324.

[10] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. [БИН] [1975] Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука.

[11] Бугров Я. С. [1964] Приближение класса функций с доминирующей смешанной производной// Мат. сб., Т.64, №106. С.410-418.

[12] Галеев Э. М. [1977] Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в $\tilde{L}_p$// Успехи мат наук. Т.32, №4. С.251–252.

[13] Галеев Э. М. [1978a] Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными// Мат. заметки. Т.23, №2. С.197–211.

[14] Галеев Э. М. [1978b] Приближение классов периодических функций с несколькими ограниченными производными// Канд. дисс. М.: МГУ.

[15] Галеев Э. М. [1981] Поперечники по Колмогорову пересечения классов периодических функций и конечномерных множеств// Мат. заметки. Т.29, №5. С.749–760.

[16] Галеев Э. М. [1982a] Некоторые оценки поперечников пересечения классов функций// Успехи мат наук. Т.37, №6. С.153–154.

[17] Галеев Э. М. [1982b] Порядковые оценки производных периодического многомерного α-ядра Дирихле в смешанной норме// Мат. сб. Т.117(159), №1. С.32–43.

[18] Галеев Э. М. [1984a] Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных W_p и H_p в пространстве L_q// Теория функций и приближений. Труды 2-ой Саратовской зимней школы. 24 января — 5 февраля 1984 г. Межвуз. науч. сб. Изд–во Сарат. ун–та. 1986. ч.2. С.70–72.

[19] Галеев Э. М. [1984b] Поперечники по Колмогорову некоторых классов периодических функций многих переменных// Тезисы докладов Межд. конф. по конструктивной теории функций. НРБ. Варна.

[20] Галеев Э. М. [1984c] Поперечники по Колмогорову некоторых классов периодических функций многих переменных// Конструктивная теория функций. Труды Международной конференции по конструктивной теории функций. НРБ. София. С.27–32.

[21] Галеев Э. М. [1984d] Поперечники по Колмогорову классов периодических функций с несколькими ограниченными производными// В сб. трудов конференции молодых ученых МГУ 1984 г. "Теория вероятностей, теория случайных процессов и функциональный анализ". Изд–во МГУ. С.95–98.

[22] Галеев Э. М. [1985a] Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $W_p^{\bar{r}}$ и $H_p^{\bar{r}}$ в пространстве L_q// Изв. АН СССР. Сер. мат., Т.49. С.916–934.

[23] Галеев Э. М. [1985b] Оценка колмогоровских поперечников классов H_p^r периодических функций многих переменных малой гладкости// Теория функций и ее приложения. Сб. трудов конф. молодых ученых МГУ 1985 г. Изд–во МГУ. 1986, С.17-24.

[24] Галеев Э. М. [1986a] Поперечники по Бернштейну классов периодических функций многих переменных// XI Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов. Челябинск. 26–30 мая 1986 г. ч.2. С.28.

[25] Галеев Э. М. [1986b] Бернштейновские поперечники классов периодических функций многих переменных// Дифф. уравнения, гармонич. анализ и их приложения. Сб. трудов конференции молодых ученых МГУ 1986 г. Изд–во МГУ. С.75–78.

[26] Галеев Э. М. [1987a] Оценки поперечников по Колмогорову классов периодических функций многих переменных малой гладкости// Вестник МГУ. Сер. матем. механ., №1. С.26–30.

[27] Галеев Э. М. [1987b] О линейных поперечниках классов периодических функций многих переменных// Вестник МГУ. Сер. матем. механ., №4. С.13–16.

[28] Галеев Э. М. [1987c] Approximation of periodic functions of one and several variables// Constructive theory of functions' 1987. Sofia. P.138–144.

[29] Галеев Э. М. [1988a] О проекционных поперечниках некоторых конечномерных множеств// Вестник МГУ. Сер. матем. механ., №1. С.64–67.

[30] Галеев Э. М. [1988b] Порядки ортопроекционных поперечников классов периодических функций одной и нескольких переменных// Мат. заметки. Т.43, №2. С.197–211.

[31] Галеев Э. М. [1988c] О спектральных поперечниках конечномерных множеств// Вестник МГУ. Сер. матем. механ., №5. С.41–44.

[32] Галеев Э. М. [1988d] Наилучшие приближения классов периодических функций// Теория функций и приближений. Труды 3-й Саратовской школы. 1986 г. Изд–во Саратов. ун–та. 1988, С.28–31.

[33] Галеев Э. М. [1988e] Приближение классов периодических функций многих переменных. Теория функций и приближений. Труды 3-й Саратовской школы. 1988 г. Изд–во Саратов. ун–та. 1990, С.65–67.

[34] Галеев Э. М. [1990a] Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами// Мат. заметки. Т.47, №3. С.32–41.

[35] Галеев Э. М. [1990b] Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных// Изв. АН СССР. Сер. Матем., Т.54, №2. с.418–430.

[36] Галеев Э. М. [1990c] Поперечники по Бернштейну бесконечномерных эллипсоидов// Комплексный анализ. Дифференциальные и интегральные уравнения. Сб. научных трудов. Элиста. С.14–20.

[37] Галеев Э. М. [1991a] Approximation for classes of periodic functions// Proceedings of the Meeting "Trends in functional analysis and approximation theory. Atti Sem. Univ. Di Modena. P.301–310.

[38] Галеев Э. М. [1991b] Порядковые оценки наименьших по выбору N гармоник норм производных ядер Дирихле и Фавара// Мат. сб., Т.182, №4. С.604–615.

[39] Галеев Э. М. [1992a] Bernstein Diameters for the Classes of Periodic Functions of Several Variables// Mathematica Balcanica. New Series. 1992, V.5. P.229–244.

[40] Галеев Э. М. [1992b] О неравенствах Бернштейна-Никольского наилучших по выбору N гармоник// ДАН СССР. Т.323, №2. С.211–215.

[41] Галеев Э. М. [1992c Неравенства Бернштейна–Никольского для функций нескольких переменных, наилучшие по выбору гармоник// Вестник МГУ. Сер. матем. механ. №6. С.3–6.

[42] Галеев Э. М. [1995] Поперечники по Колмогорову некоторых конечномерных множеств в смешанной норме// Мат. заметки. Т.58, №1. С.32–41.

[43] Галеев Э. М. [1996] Линейные поперечники классов Гельдера–Никольского периодических функций многих переменных// Мат. заметки. Т.59, №2, С.189–199.

[44] Галеев Э. М. [2013] Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. М.: Изд–во Книжный дом "ЛИБРОКОМ". 2013.

[45] Глазман И. М., Любич Ю. И. [1969] Конечномерный линейный анализ. М.: Наука.

[46] Глускин Е. Д. [1978] Об оценках норм некоторых p-абсолютно суммирующих операторов// Функц. анализ. Т.12, №2. С.23–31.

[47] Глускин Е. Д. [1981a] О некоторых конечномерных задачах теории поперечников// Вестник ЛГУ. №13. С.5–10.

[48] Gluskin-1981b Глускин Е. Д. [1981b] Геометрические характеристики операторов в симметричных пространствах// Канд. дисс. Л.

[49] Глускин Е. Д. [1983] Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств// Мат. сб., Т.120. С.120–189.

[50] Глускин Е. Д. [1987] Пересечения куба с октаэдром плохо аппроксимируются подпространствами малой размерности// Приближение функций специальными классами операторов. Вологда. Вологодский гос. пед. ин-т. Межвуз. сб. научн. трудов. С.35–41.

[51] Динь Зунг. [1983] О приближении периодических функций многих переменных// Успехи мат наук. Т.38, №6. С.111–112.

[52] Динь Зунг. [1984] Об одной задаче о поперечниках// ДАН СССР. Т.219, №3. С.527–530.

[53] Динь Зунг. [1984a] Приближение классов гладких функций многих переменных// Тр. семинара им. И. Г. Петровского. №10. С.207–226.

[54] Динь Зунг. [1984b] Приближение классов функций на торе, задаваемых смешанным модулем непрерывности// Труды Международной конференции по конструктивной теории функций. НРБ. С.43–48.

[55] Динь Зунг. [1986] Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами// Мат. сб. Т.131, №2. С.251–271.

[56] Зигмунд А. [1965] Тригонометрические ряды. Т.I, II. М.: Мир.

[57] Изаак А. Д. [1994] Поперечники по Колмогорову в конечномерных пространствах со смешанной нормой // Мат. заметки. Т.55, №5. С.43–52.

[58] Исмагилов Р. С. [1968] Об n-мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве// Функц. анализ и его прил. Т.2, №2. С.32–39.

[59] Исмагилов Р. С. [1974] Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими полиномами// Успехи мат наук. Т.29, №3. С.161–178.

[60] Кашин Б. С. [1977] Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций// Изв. АН СССР. Сер. мат., Т.41, №2. С.334–351.

[61] Кашин Б. С. О [1980] некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l_2^n в l_2^m// Изв. АН АрмССР. Матем., Т. XY, №5. С.379–394.

[62] Кашин Б. С. [1981] О поперечниках классов Соболева малой гладкости// Вестник МГУ. Сер. матем. механ. №5. С.50–54.

[63] Колмогоров А. Н. (Kolmogorof A. N.) [1936] Uber die beste Annaherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse// Ann. of Math., V.37, P.107–110.

[64] Колмогоров А. Н., Петров А. А., Смирнов Ю. М. [1946] Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов// Изв. АН СССР. Сер. матем., Т.11, №6. С.561–566.

[65] Корнейчук Н. П. [1976] Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука.

[66] Корнейчук Н. П. [1987] Точные константы в теории приближения. М.: Наука.

[67] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. [1984] О некоторых вопросах гармонического анализа на $\mathbb{T}^{n'} \times \mathbb{T}t^{n''}$. В сб. Некоторые вопросы современного анализа. М.: Изд–во МГУ. С.57–82.

[68] Куланин Е. Д. [1983] Оценки поперечников класса Соболева малой гладкости// Вестник МГУ. Сер. матем. механ., №2. С.24–30.

[69] Куланин Е. Д. [1985] Оценки поперечников класса Соболева малой гладкости. Канд. дисс. М.: МГУ.

[70] Майоров В. Е. [1978] О линейных поперечниках соболевских классов// ДАН СССР. Т.243, №5. С.1127–1130.

[71] Майоров В. Е. [1980] О линейных поперечниках соболевских классов и цепочках экстремальных подпространств// Мат. сб., Т.113(115), №3. С.437–463.

[72] Майоров В. Е. [1981] Об одной модификации неравенства Бернштейна–Никольского для тригонометрических полиномов// ДАН СССР. Т.258, №1. С.23–26.

[73] Майоров В. Е. [1984] Тригонометрические поперечники соболевских классов// Теория функций и приближений. Труды 2-ой Саратовской зимней школы. 24 января — 5 февряля 1984 г. Межвуз. науч. сб. Изд–во Сарат. ун-та. 1986, ч.3. С.20–22.

[74] Майоров В. Е. [1990] Неравенства Бернштейна–Никольского и оценки норм ядер Дирихле для тригонометрических полиномов по произвольным гармоникам// Мат. заметки. Т.47, №6. С.55–61.

[75] Маковоз Ю. И. [1972] Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховом пространстве// Мат. сборник., Т.87, №1. С.136–142.

[76] Маковоз Ю. И. (Makovoz Y. I.) [1984] On trigonometric n-widths and their generalization// J. Approx. Theory. V.41. P.361–366.

[77] Мальцев А. И. [1947] Замечание к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова, Ю. М. Смирнова "Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов"// Изв. АН СССР. Сер. Матем., Т.11. С.566–568.

[78] Мильман В. Д., Шехтман Г. (Milman V. D., Schechtman G.) [1986] Asymtotic theory of finite dimensional normed spaces// Lecture Notes Math. V.1200.

[79] Митягин Б. С. [1962] Приближение функций в пространствах L^p и на торе// Мат. сб., Т.58, №4. С.397–414.

[80] Никольская Н. С. [1973] Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p// ДАН СССР. Т.208, №6. С.1282–1285.

[81] Никольская Н. С. [1975a] Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p// Сиб. матем. ж., Т.15, №2. С.395–412.

[82] Никольская Н. С. [1975b] Приближение периодических функций класса SH_p^r* суммами Фурье// Сиб. матем. ж. Т.16, №4. С.761–780.

[83] Никольская Н. С. [1978] Приближение функций многих переменных классов SL_p^r* суммами Фурье// Сиб. матем. ж., Т.19, №2. С.360–369.

[84] Никольская Н. С. [1980] Еще о приближении периодических функций классов SH_p^r* суммами Фурье// Сиб. матем. ж., Т.21, №4. С.761–780.

[85] Пич А. (Pietch A.) [1974] s-numbers of operators in Banach spaces// Stud. Math., V51, №3. P201–223.

[86] Пич А. [1982] Операторные идеалы. М.

[87] Пухов С. В. [1980] Поперечники множеств в банаховых пространствах и классов функций в пространствах с весом// Автореферат канд. дисс. Изд–во МГУ.

[88] Рокафеллар Р. Т. [1973] Выпуклый анализ. М.: Мир.

[89] Смоляк С. А. [1965] Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс. М.: МГУ.

[90] Соломяк М. З., Тихомиров В. М. [1967] О геометрических характеристиках вложения классов W_p в // Изв. вузов. Сер. матем., №10. С.76–82.

[91] Софман Л. Б. [1969] Поперечники октаэдров// Мат. заметки. Т.5, №4. С.429–436.

[92] Софман Л. Б. [1973] Поперечники бесконечномерного октаэдра// Вестник МГУ. Сер. матем. механ., №5. С.54–56.

[93] Стесин М. И. [1975] Александровские поперечники конечномерных множеств и классов гладких функций// ДАН СССР. Т.220, №6. С.1278–1281.

[94] Стечкин С. Б. [1954] О наилучших приближениях заданных классов любыми полиномами// Успехи мат наук. Т.9, №1. С.133–134.

[95] Теляковский С. А. [1964] Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами// Мат. сб. Т.63, №105. С.426–444.

[96] Темляков В. Н. [1979] Приближение периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной производной// ДАН СССР. Т.248, №3. С.527–530.

[97] Темляков В. Н. [1980a] О приближении периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной разностью// ДАН СССР. Т.253, №3. С.544–548.

[98] Темляков В. Н. [1980b] Приближение периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной производной// Тр. Мат. ин-та АН СССР. Т.156. С.233–260.

[99] Темляков В. Н. [1980c] Приближение периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной разностью// Мат. сб., Т.113(155), №1. С.65–90.

[100] Темляков В. Н. [1982a] Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных// ДАН СССР. Т.267, №3. С.314–317.

[101] Темляков В. Н. [1982b] Приближение функций с ограниченной смешанной разностью тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций// Изв. АН СССР. Сер. матем., Т.46, №1. С.171–186.

[102] Темляков В. Н. [1985a] Приближение периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций// Изв. АН СССР. Сер. матем., Т.49, №5. С.986–1030.

[103] Темляков В. Н. [1985b] О линейных ограниченных методах приближения функций// Доклады расширенных заседаний семинара института прикладной математики им. И. Н. Векуа. Тбилиси. Т.1, №2. С.144–147.

[104] Темляков В. Н. [1986] Приближение функций о ограниченной смешанной производной// Тр. Мат. ин-та АН СССР. Т.178. С.3–112.

[105] Темляков В. Н. [1987] Об оценках ортопоперечников классов функций с ограниченной смешанной производной// Доклады по математике и ее приложениям. В сборнике "Вопросы чистой и прикладной математики". Москва — Тула. Т.1, №1. С.3–30.

[106] Темляков В. Н. [1988a] Об оценках ε-энтропии и поперечников классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью// ДАН СССР. Т.301, №2. С.288–291.

[107] Темляков В. Н. [1988b] Оценки наилучших билинейных приближений периодических функций// Тр. Мат. ин-та АН СССР. Т.181. С.250–267.

[108] Темляков В. Н. [1989] Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью// Тр. Мат. ин-та АН СССР. Т.198. С.138–168.

[109] Тихомиров В. М. [1960] Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений// Успехи мат. наук. Т.15, №3. С.81–120.

[110] Тихомиров В. М. [1976] Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ.

[111] Тихомиров В. М. [1987] Теория приближений. "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.14 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)". М.: ВИНИТИ. С.103–260.

[112] Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г. [1948] Неравенства. М.: ИЛ.

[113] Хеллиг К. (Hollig K.) [1979] Approximationszchalen von Sobolev// Einbettungen. Dissertation. Bonn.

[114] Эдвардс Р. [1985] Ряды Фурье в современном изложении. Т.1,2. М.: Мир.

[115] Чалов П. А. [1981] Поперечники по Бернштейну множеств в координатных пространствах Орлича// Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вища школа. Изд-во при Харьков. ун-те. С.119–123.

[116] Юдин А. А., Юдин В. А. [1977] Дискретные теоремы вложения и константы Лебега// Мат. заметки. Т.22, №3. С.381–394.