3 Избранные задачи оптимального управления

3.1 Простейшая задача о быстродействии

Рассмотрим задачу о наибыстрейшей остановке лифта в шахте, вошедшую во многие монографии по оптимальному управлению. Лифт управляется под воздействием внешней силы, которая может изменяться в заданных пределах, регулируемых человеком. Предположим, что возможности действующей силы, а следовательно, и ускорения, ограничены какой-то величиной. Например, ускорение может изменяться от -1 до $+1$. Требуется за кратчайшее время T остановить лифт ($\dot{x}(T) = 0$), для определенности в начале координат ($x(T) = 0$). Нетрудно видеть, что задача может быть формализована следующим образом:

$$T \to \min; \ |\ddot{x}| \le 1, \ x(0) = \xi_1, \ \dot{x}(0) = \xi_2, \ x(T) = \dot{x}(T) = 0.$$

Аналогично формализуется задача о машине, движущейся прямолинейно без трения по горизонтальной дороге. Машина может двигаться в любую сторону с ускорением, не превышающем единицу. Требуется остановить машину в определенном месте за кратчайшее время.

Решение. Приведем задачу к виду задач оптимального управления, вводя вместо функции x вектор-функцию (x_1, x_2), управление u и обозначения: $x_1 = x, \ x_2 = \dot{x}, \ u = \ddot{x}$,

$$T \to \min; \quad \dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = u, \ u \in [-1, 1],$$
$$x_1(0) = \xi_1, \ x_2(0) = \xi_2, \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$$

Функция Лагранжа: $\mathscr{L} = \int\limits_0^T \big(p_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 - u)\big)\, dt + \lambda_0 T + \lambda_1(x_1(0) - \xi_1) + \lambda_2(x_2(0) - \xi_2) + \lambda_3 x_1(T) + \lambda_4 x_2(T)$.

Необходимые условия:

a) система уравнений Эйлера для лагранжиана $L = p_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 - u)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}L_{\dot{x}_1} + L_{x_1} = 0, \\ -\dfrac{d}{dt}L_{\dot{x}_2} + L_{x_2} = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} -\dot{p}_1 = 0, \\ -\dot{p}_2 - p_1 = 0, \end{cases} \iff p_2 = C_1 t + C_2;$$

b) трансверсальность по x для терминанта $l = \lambda_0 T + \lambda_1(x_1(0) - \xi_1) + \lambda_2(x_2(0) - \xi_2) + \lambda_3 x_1(T) + \lambda_4 x_2(T)$:

$$L_{\dot{x}_1}(0) = l_{x_1(0)},\ L_{\dot{x}_1}(T) = -l_{x_1(T)} \iff p_1(0) = \lambda_1,\ p_1(T) = -\lambda_3,$$

$$L_{\dot{x}_2}(0) = l_{x_2(0)},\ L_{\dot{x}_2}(T) = -l_{x_2(T)} \iff p_2(0) = \lambda_2,\ p_2(T) = -\lambda_4;$$

c) оптимальность по u (не зависящие от u слагаемые не выписываем):

$$\min_{u \in [-1,\, 1]} \{-p_2(t)u\} = -p_2(t)\hat{u}(t) \Rightarrow$$

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} p_2(t), & p_2(t) \neq 0, \\ \text{любое из } [-1,\ 1], & p_2(t) = 0; \end{cases}$$

d) стационарность по T:

$$\mathscr{L}_T = 0 \iff \lambda_0 + \lambda_3 \dot{x}_1(T) + \lambda_4 \dot{x}_2(T) = 0;$$

e) неотрицательность: $\lambda_0 \geq 0$.

Учитывая, что из начального условия $\dot{x}_1(T) = 0$, а из b) $\lambda_4 = -p_2(T)$, и $\dot{x}_2(T) = u(T)$, получаем, что d) равносильно условию $\lambda_0 = p_2(T)\hat{u}(T)$.

Поэтому, если $\lambda_0 = 0$, то $p_2(T) = 0$ или $\hat{u}(T) = 0$, но тогда из c) вновь $p_2(T) = 0$. При этом p_2 не может быть тождественным нулем, ибо иначе все множители Лагранжа были бы нулями. Значит, из a) вытекает, что $p_2(t) = C(t - T)$, а тогда из c) следует, что $\hat{u}(t) \equiv 1$ или $\hat{u}(t) \equiv -1$.

Пусть $\hat{u}(t) \equiv 1 \Leftrightarrow \dot{\hat{x}}_2(t) \equiv 1 \overset{x_2(T)=0}{\Rightarrow} x_2(t) = t - T \leq 0 \overset{\dot{x}_1=x_2}{\Rightarrow}$ $\dot{x}_1(t) = t - T \overset{x_1(T)=0}{\Rightarrow} x_1(t) = \dfrac{(t-T)^2}{2} \Rightarrow x_1(t) = \dfrac{x_2^2(t)}{2}$. Следовательно, в этом случае начальные условия должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} x_1(0) = \dfrac{x_2^2(0)}{2}, \\ x_2(0) = -T < 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{\xi_2^2}{2}, \\ \xi_2 < 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \xi_2 = -\sqrt{2\xi_1}, \\ \xi_1 > 0. \end{cases}$$

При этом время движения $T = -\xi_2$.

Пусть $\hat{u}(t) \equiv -1 \Leftrightarrow \dot{\hat{x}}_2(t) \equiv -1 \overset{x_2(T)=0}{\Rightarrow} x_2(t) = T - t \geq 0 \overset{\dot{x}_1=x_2}{\Rightarrow}$ $\dot{x}_1(t) = t - T \overset{x_1(T)=0}{\Rightarrow} x_1(t) = -\dfrac{(t-T)^2}{2} \Rightarrow x_1(t) = -\dfrac{x_2^2(t)}{2}$. Следовательно, в этом случае начальные условия должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} x_1(0) = -\dfrac{x_2^2(0)}{2}, \\ x_2(0) = T > 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \xi_1 = -\dfrac{\xi_2^2}{2}, \\ \xi_2 > 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \xi_2 = \sqrt{-2\xi_1}, \\ \xi_1 < 0. \end{cases}$$

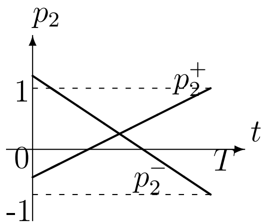
При этом время движения $T = \xi_2$.

Ниже покажем, что найденное время движения действительно доставляет минимум в задаче. Таким образом, в нашей задаче в этих случаях решение достигается при $\lambda_0 = 0$. Множество начальных условий, соответствующих таким управлениям, описывается общим уравнением

$$\xi_2 = \varphi(\xi_1) := \begin{cases} -\sqrt{2\xi_1}, \ \xi_1 \geq 0, \\ \sqrt{-2\xi_1}, \ \xi_1 \leq 0. \end{cases}$$

Если же $\xi_2 \neq \varphi(\xi_1)$, то $\lambda_0 \neq 0$, и мы полагаем $\lambda_0 = 1$. Тогда $p_2(T) \neq 0$, $\hat{u}(T) = \operatorname{sign} p_2(T)$ и из d) вытекает, что $|p_2(T)| = 1$ и функция p_2 меняет свой знак в интервале $(0, T)$ (случай, когда функция p_2 не меняет свой знак в интервале $(0, T)$ и $\hat{u}(t) \equiv \pm 1$ уже был рассмотрен при $\lambda_0 = 0$). Т. е. имеются две возможности:

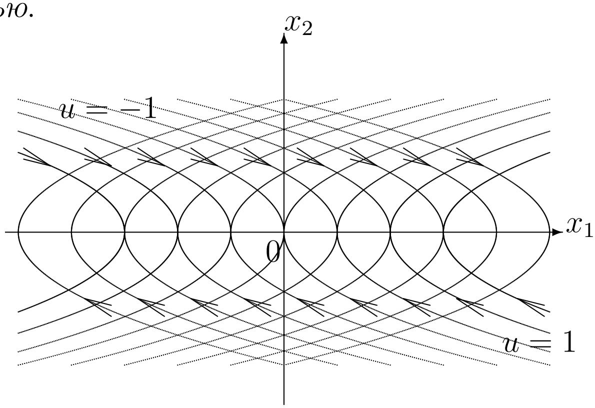
$$p_2^+(t) = C(t-T) + 1, \quad p_2^-(t) = C(t-T) - 1.$$



Этим возможностям в силу b) соответствуют такие управления:

$$u^+ = \begin{cases} -1, & 0 \le t < \tau, \\ 1, & \tau < t \le T, \end{cases} \qquad u^- = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \tau, \\ -1, & \tau < t \le T. \end{cases}$$

Рассмотрим траектории, соответствующие оптимальным управлениям u^+ и u^- на плоскости (x_1, x_2), называемой *фазовой плоскостью.*



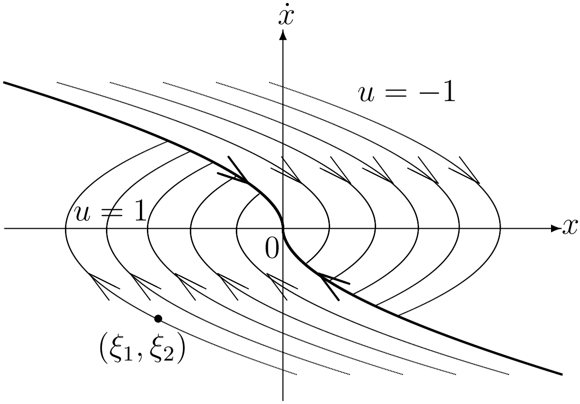
Для тех значений t, для которых $u(t) = 1$, имеем

$$\dot{x}_2 = 1 \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 = t + C' \Rightarrow x_1 = \frac{(t + C')^2}{2} + C = \frac{x_2^2}{2} + C.$$

Таким образом, фазовая траектория, соответствующая этим значениям t, является куском параболы $x_1 = \frac{x_2^2}{2} + C$. Направление движения по такой параболе определяется из условия возрастания x_2, так как в этом случае $\dot{x}_2 = 1$.

Аналогично получаем, что для тех значений t, для которых $u(t) = -1$, фазовая траектория — кусок параболы $x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + C$, а направление движения определяется из условия убывания x_2, так как $\dot{x}_2 = -1$.

Укажем теперь то место на фазовой плоскости (x_1, x_2), где должно совершаться переключение управления. В искомую точку (0,0) $(x_1(T) = x_2(T) = 0)$ мы должны попасть не более чем с одним переключением, двигаясь по фазовой траектории по разрешенному направлению. Совокупность начальных условий, соответствующих управлениям u^+ и u^-, описывается неравенствами $\xi_2 > \varphi(\xi_1)$ (для u^+) и $\xi_2 < \varphi(\xi_1)$ (для u^-). Переключения совершаются на кривой $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$. При этом, как нетрудно видеть, для каждого начального условия имеется единственная фазовая кривая, приводящая в точку $(0, 0)$.



Поскольку всегда $|\dot{x}_2| = 1$ на оптимальной траектории, то $x_2 = \pm t + C$ и, значит, время движения $\hat{T} = \operatorname{Var} x_2$ (вариация функции x_2). Однако проще находить оптимальное время $\hat{T}$, строя функцию $x(\cdot)$ класса $PC^2([t_0,\, t_1])$, удовлетворяющую необходимым условиям экстремума и начальным условиям. В примере 2 пункта 3.3 будет приведено решение одной из конкретных задач быстродействия.

Покажем, что построенная таким образом оптимальная траектория, начинающаяся в точке (ξ_1, ξ_2), доставляет решение задаче. Пусть этой траектории соответствует управление $\hat{u}$, для определенности $\hat{u}^- = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \tau, \\ -1, & \tau < t \le \hat{T}, \end{cases}$ функция $\hat{x}$ и время $\hat{T}$. Предположим, что имеется некоторый другой допустимый управляемый процесс (x, u, T), $T \le \hat{T}$. Доопределим функцию $x(\cdot)$ нулем на отрезке $[T, \hat{T}]$.

Воспользуемся следующей формулой восстановления функции по ее n-ой производной

$$x(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^t (t-s)^{n-1}x^{(n)}(s)ds + \sum_{k=0}^{n-1} x^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}.$$

По этой формуле при $n = 2$ в силу условий на левом конце функции $\hat{x}$ и x в точке $t = \tau$ можно представить в виде

$$x(\tau) = \int\limits_0^\tau (\tau - s)\ddot{x}(s)ds + \xi_2\tau + \xi_1.$$

Отсюда

$$\hat{x}(\tau) - x(\tau) = \int\limits_0^\tau (\tau - s)\big(\ddot{\hat{x}}(s) - \ddot{x}(s)\big)ds \ge 0,$$

поскольку $\ddot{\hat{x}}(s) - \ddot{x}(s) = 1 - \ddot{x}(s) \ge 0$ (напомним, что $|\ddot{x}(s)| \le 1$) и $\tau - s \ge 0$ при $s \in [0,\, \tau]$. Причем равенство здесь возможно только, если во всех точках непрерывности $\ddot{x}(s) = \ddot{\hat{x}}(s)$, а тогда $x(t) = \hat{x}(t)$ для любого $t \in [0,\, \tau]$.

Воспользуемся другой формулой восстановления функции по ее n-ой производной

$$x(t) = \frac{-1}{(n-1)!}\int\limits_t^{\hat{T}} (t-s)^{n-1}x^{(n)}(s)ds + \sum_{k=0}^{n-1} x^{(k)}(\hat{T})\frac{(t-\hat{T})^k}{k!}.$$

По этой формуле при $n = 2$ в силу условий на правом конце функции x и $\hat{x}$ в точке $t = \tau$ можно представить в виде

$$x(\tau) = -\int\limits_\tau^{\hat{T}} (\tau - s)\ddot{x}(s)ds.$$

Отсюда

$$\hat{x}(\tau) - x(\tau) = -\int\limits_{\tau}^{\hat{T}} (\tau - s)\big(\ddot{\hat{x}}(s) - \ddot{x}(s)\big) ds \le 0,$$

поскольку $\ddot{\hat{x}}(s) - \ddot{x}(s) = -1 - \ddot{x}(s) \le 0$ (напомним, что $|\ddot{x}(s)| \le 1$) и $\tau - s \le 0$ при $s \in [\tau, \hat{T}]$. Причем равенство здесь возможно только, если во всех точках непрерывности $\ddot{x}(s) = \ddot{\hat{x}}(s)$, а тогда $x(t) = \hat{x}(t)$ для любого $t \in [\tau, \hat{T}]$.

Таким образом, имеем, что $x(\tau) = \hat{x}(\tau)$ и, следовательно, $x(t) \equiv \hat{x}(t)$ для любого $t \in [0, \hat{T}]$. Отсюда $T = \hat{T}$.

3.2 Аэродинамическая задача Ньютона

Задача Ньютона — это задача о сопротивлении движению тела вращения в "редкой" среде. Необходимо выбрать форму тела вращения так, чтобы сопротивление движению было минимально. Сопротивление движущегося тела зависит от законов сопротивления среды. Ньютон представлял себе среду, состоящей из неподвижных частиц фиксированной массы m, являющихся абсолютно упругими шарами. Мы также будем придерживаться этого предположения. В соответствии с физическими законами задачу можно выписать следующим образом:

$$\int\limits_0^{T_0} \frac{t\,dt}{1+\dot{x}^2} \to \min;\ x(0)=0,\ x(T_0)=\xi.$$

Очевидно, что нижняя грань интеграла равна 0. Действительно, $\frac{t}{1+\dot{x}^2} \geq 0$ при $t \in [0, T_0]$, и выбрав ломаную $x(t)$ так, чтобы $|\dot{x}(t)|$ был очень большим, получим сколь угодно малый интеграл. Получается противоречие, т. е. чем более зазубрен профиль на теле, тем меньше сопротивление. Дело в том, что в формализации неявно использовалась монотонность профиля, так как только в этом случае частица сталкивается с телом один раз. Таким образом к условию задачи нужно добавить требование $\dot{x} \geq 0$. Форма тела вращения задается функцией $x(t)$ такой, что $x(0)=0$, $x(T_0)=\xi$ (ξ — заданное число). Для того, чтобы столкновение частицы среды учитывать только один раз, налагаем условие $u \geq 0$.

Формализованно задача оптимального управления выписывается следующим образом:

$$\int\limits_0^{T_0} \frac{t\,dt}{1+u^2} \to \min;\ \dot{x}=u,\ u \geq 0,\ x(0)=0,\ x(T_0)=\xi.$$

Функция Лагранжа

$$\mathscr{L} = \int\limits_0^{T_0} \Big(\frac{\lambda_0 t}{1+u^2} + p(\dot{x} - u) \Big) dt + \lambda_1 x(0) + \lambda_2 \big(x(T_0) - \xi \big).$$

Необходимые условия:

a) уравнение Эйлера: $\quad -\dot{p} = 0 \quad (\Leftrightarrow p = \text{const})$;

b) трансверсальность по x: $\quad p(0) = \lambda_1,\ p(T_0) = -\lambda_2$;

c) оптимальность по u:

$$\min_{u \geq 0} \Big\{ \frac{\lambda_0 t}{1+u^2} - pu \Big\} = \frac{\lambda_0 t}{1+\hat{u}^2} - p\hat{u};$$

d) неотрицательность: $\quad \lambda_0 \geq 0$.

Если $\lambda_0 = 0$, то $p \neq 0$ (если $p = 0$, то из b) следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ — все множители Лагранжа — нули). Минимум в соотношении c) конечен только, если $p < 0$, при этом $\hat{u} = 0$, т. е. $\dot{\hat{x}} = 0$. Из условия $x(0) = 0$ вытекает, что $\hat{x} \equiv 0$, тогда $\xi = 0$.

Пусть $\lambda_0 \neq 0$. Положим $\lambda_0 = 1$. Тогда для достижения минимума по $u \geq 0$ в c) необходимо, чтобы $p < 0$ (если $p \geq 0$, то функция $L(t,u) := \dfrac{t}{1+u^2} - pu$ монотонно убывает с возрастанием u и не достигает минимума). Если $\hat{u}(t) > 0$, то $L_u = 0$. И из c) управление $\hat{u}(t)$ должно находиться из уравнения

$$L_u(t,u) = -\frac{2ut}{(1+u^2)^2} - p = 0$$

$$\Longleftrightarrow \; p = -\frac{2ut}{(1+u^2)^2}. \qquad (1)$$

При малых значениях $t > 0$ производная $L_u(t,u) > 0$ для любого $u \geq 0$. Значит, $\min\limits_{u \geq 0} L(t,u) = L(t,0)$. Таким образом,

$$\hat{u} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau, \\ \hat{u}(t), & \tau \leq t \leq T_0. \end{cases}$$

$$L(t,u) = \frac{t}{1+u^2} - pu$$

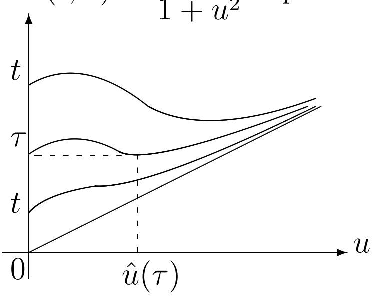


Рис. 9

Момент излома управления τ характеризуется уравнениями

$$p = -\frac{2\hat{u}(\tau)\tau}{(1+\hat{u}^2(\tau))^2}, \quad \tau = \frac{\tau}{1+\hat{u}^2(\tau)} - p\hat{u}(\tau) \qquad (2)$$

(второе уравнение в (2) $L(\tau-0,0)=L(\tau,\hat{u}(\tau))$ — условие совпадения минимумов в точке τ). Подставив p из первого уравнения соотношения (2) во второе, находим, что $\hat{u}(\tau)=1$:

$$\tau=\frac{\tau}{1+\hat{u}^2(\tau)}+\frac{2\hat{u}^2(\tau)\tau}{(1+\hat{u}^2(\tau))^2}\Leftrightarrow(1+\hat{u}^2(\tau))^2=1+\hat{u}^2(\tau)+2\hat{u}^2(\tau)$$

$$\Leftrightarrow u^4(\tau)=u^2(\tau)\overset{\hat{u}(\tau)>0}{\Rightarrow}\hat{u}^2(\tau)=1\overset{\hat{u}(\tau)>0}{\Rightarrow}\hat{u}(\tau)=1.$$

Подставляя $\hat{u}(\tau)=1$ в первое уравнение системы (2) получаем $p=-\dfrac{\tau}{2}\Leftrightarrow\tau=-2p$.

После излома оптимальное решение удовлетворяет соотношению (1), из которого следует, что

$$t=-\frac{p(1+u^2)^2}{2u}=-\frac{p}{2}\Big(\frac{1}{u}+2u+u^3\Big).$$

Поскольку $\dfrac{dx}{dt}=u$, то $\dfrac{dx}{du}=\dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{dt}{du}=u\dfrac{dt}{du}=u\Bigg(-\dfrac{p}{2}\Big(-\dfrac{1}{u^2}+u+3u^2\Big)\Bigg)=-\dfrac{p}{2}\Big(-\dfrac{1}{u}+2u+3u^3\Big)$. Интегрируя это соотношение с учетом равенства $\hat{x}(\tau)=0$, $\hat{u}(\tau)=1$, получаем параметрические уравнения искомой оптимальной кривой:

$$\hat{x}=-\frac{p}{2}\Big(\ln\frac{1}{u}+u^2+\frac{3}{4}u^4\Big)+\frac{7}{8}p,\quad t=-\frac{p}{2}\Big(\frac{1}{u}+2u+u^3\Big),\ p<0.$$

Константа p определяется из начального условия $x(T_0)=\xi$. Эту кривую называют *кривой Ньютона.*

Покажем, что $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум в задаче. В силу оптимальности по u для любой допустимой функции $x\in PC^1([0,\,T_0])$, $x(0)=0$, $x(T_0)=\xi$,

$$L(t,u)\geq L(t,\hat{u})\iff\frac{t}{1+\dot{x}^2(t)}-p\dot{x}(t)\geq\frac{t}{1+\dot{\hat{x}}^2(t)}-p\dot{\hat{x}}(t).$$

Интегрируя это соотношение и учитывая, что $p = \mathrm{const}$, а $\int\limits_0^{T_0} \dot{x}(t)\,dt = \int\limits_0^{T_0} \dot{\hat{x}}(t)\,dt = \xi$, получаем

$$\int\limits_0^{T_0} \frac{t\,dt}{1+\dot{x}^2} \geq \int\limits_0^{T_0} \frac{t\,dt}{1+\dot{\hat{x}}^2}.$$

Значит, $\hat{x} \in \mathrm{absmin}$.

3.3 Примеры задач оптимального управления

Пример 1. $\int\limits_0^2 x\,dt \to \operatorname{extr};\ |\ddot{x}| \le 2,\ x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0.$

Решение. Эту задачу можно свести к задаче оптимального управления, вводя вместо функции x вектор-функцию (x_1, x_2) и управление u и обозначения: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $u = \ddot{x}$. Тогда наша задача сведется к задаче оптимального управления:

$$\int\limits_0^2 x_1\,dt \to \operatorname{extr};\ \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ u \in [-2,\,2],\ x_1(0) = x_2(0) = x_2(2) = 0.$$

Функция Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \int\limits_0^2 (\lambda_0 x_1 + p_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 - u))\,dt + \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 x_2(2).$$

Необходимые условия:

a) система уравнений Эйлера для лагранжиана $L = \lambda_0 x_1 + p_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 - u)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}L_{\dot{x}_1} + L_{x_1} = 0, \\ -\dfrac{d}{dt}L_{\dot{x}_2} + L_{x_2} = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} -\dot{p}_1 + \lambda_0 = 0, \\ -\dot{p}_2 - p_1 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 = \lambda_0 t + C, \\ p_2 = -\dfrac{\lambda_0 t^2}{2} - Ct + D; \end{cases}$$

b) трансверсальность по x для терминанта $l = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 x_2(2)$:

$$L_{\dot{x}_1}(0) = l_{x_1(0)},\ L_{\dot{x}_1}(2) = -l_{x_1(2)} \iff p_1(0) = \lambda_1,\ p_1(2) = 0,$$

$$L_{\dot{x}_2}(0) = l_{x_2(0)},\ L_{\dot{x}_2}(2) = -l_{x_2(2)} \iff p_2(0) = \lambda_2,\ p_2(2) = -\lambda_3;$$

c) оптимальность по u: $\min\limits_{u\in[-2,\,2]}\{-p_2(t)u\} = -p_2(t)\hat{u}(t) \Rightarrow$

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 2\operatorname{sign} p_2(t), & p_2(t) \ne 0, \\ \text{любое из } [-2, 2], & p_2(t) = 0; \end{cases}$$

d) неотрицательность: $\lambda_0 \ge 0$ в задаче на минимум,
$\lambda_0 \le 0$ в задаче на максимум.

Если $\lambda_0 = 0$, то из a) следует, что $p_1 = C$ и из b) $p_1 = 0$. Поэтому из a) $p_2 = D \neq 0$, иначе все множители Лагранжа оказались бы нулями. Значит из c) $\hat{u} = 2$ или $\hat{u} = -2$, т.е. $\ddot{x} = 2$ или $\ddot{x} = -2$, откуда $x = t^2 + A_1 t + A_2$ или $x = -t^2 + B_1 t + B_2$. В обоих случаях не существует функции такого вида, удовлетворяющей условиям на концах $x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0$.

Полагаем $\lambda_0 = 1$ в задаче на минимум. Тогда из a) $p_1(t) = t + C$ и из b) $p_1(t) = t - 2$, далее из a) следует, что $p_2(t) = -\frac{(t-2)^2}{2} + C'$. Получили, что $p_2(t)$ — парабола с ветвями, направленными вниз и вершиной на оси $t = 2$, следовательно, $p_2(t)$ или не меняет свой знак на отрезке $[0,\ 2]$, или меняет его с минуса на плюс в некоторой точке $\tau \in (0,\ 2)$. И, значит, из c) оптимальное управление $\hat{u}$ на всем отрезке тождественно равняется двум или минус двум или меняет свое значение с минус двух на плюс два в некоторой точке τ. Но как мы уже выяснили в первых двух случаях функций, удовлетворяющих начальным условиям нет. Осталось рассмотреть случай

$$\hat{u} = \ddot{\hat{x}} = \begin{cases} -2, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 2, & \tau < t \leq 2. \end{cases}$$

Интегрируя это равенство, находим, что

$$\dot{\hat{x}} = \begin{cases} -2t + C_1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 2t + C_2, & \tau < t \leq 2, \end{cases} \overset{\substack{\dot{x}(0)=0 \\ \dot{x}(2)=0}}{=} \begin{cases} -2t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 2t - 4, & \tau < t \leq 2. \end{cases}$$

Поскольку функция должна быть непрерывной в точке τ, то $-2\tau = 2\tau - 4$, откуда $\tau = 1$. Интегрируя еще раз, получаем

$$\hat{x} = \begin{cases} -t^2 + C_1, & 0 \leq t \leq 1, \\ t^2 - 4t + C_2, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Из начального условия $x(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$ и условия непрерывности в точке $\tau = 1: \quad -1 = 1 - 4 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = 2$ находим допустимую экстремаль

$$\hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ t^2 - 4t + 2, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Докажем с помощью непосредственной проверки, что функция $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум в задаче. Возьмем функцию $h \in PC^2([0,2])$ такую, чтобы $\hat{x}+h$ была допустимой в задаче. Для этого надо взять функцию h, для которой $|\ddot{\hat{x}}+\ddot{h}| \le 2$, $h(0) = \dot{h}(0) = \dot{h}(2) = 0$. Так как $p_2 = -\frac{(t-2)^2}{2} + C'$, то $\dot{p}_2 = 2-t \Rightarrow \ddot{p}_2 = -1$. Тогда

$$B(x) - B(\hat{x}) = \int_0^2 (\hat{x}+h)\,dt - \int_0^2 \hat{x}\,dt = \int_0^2 h\,dt =$$

$$= -\int_0^2 \ddot{p}_2 h\,dt = -\int_0^2 h d\dot{p}_2 = -h\dot{p}_2\Big|_0^2 + \int_0^2 \dot{h}\dot{p}_2 dt =$$

$$\overset{\substack{\dot{p}_2(2)=0\\ h(0)=0}}{=} \int_0^2 \dot{h} dp_2 = \dot{h}p_2\Big|_0^2 - \int_0^2 \ddot{h}p_2 dt \overset{\substack{\dot{h}(2)=0\\ \dot{h}(0)=0}}{=} \int_0^2 \ddot{h}p_2\,dt \ge 0,$$

поскольку $\hat{u} = \ddot{\hat{x}} = 2\operatorname{sign} p_2$ при $p_2(t) \ne 0 \Rightarrow$ неравенство $|\ddot{\hat{x}}+\ddot{h}| \le 2$ равносильно неравенству $|2\operatorname{sign} p_2 + \ddot{h}| \le 2 \Leftrightarrow |2+\ddot{h}\operatorname{sign} p_2| \le 2$ $\Rightarrow \ddot{h}\operatorname{sign} p_2 \le 0 \Rightarrow \ddot{h}p_2 \le 0$. Таким образом, $\hat{x} \in \operatorname{absmin}$,

$$S_{\text{absmin}} = J(\hat{x}(\cdot)) = \int_0^2 \hat{x}\,dt = \int_0^1 (-t^2)\,dt + \int_1^2 (t^2-4t+2)\,dt =$$

$$= -\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + \left(\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 2t\right)\Big|_1^2 = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 8 + 4 - \frac{1}{3} + 2 - 2 = -2.$$

Так как функционал $J(x)$ является нечетной функцией относительно x, а множество допустимых функций вместе с функцией x содержит и $-x$, то при решении задачи на максимум $-\hat{x} \in \operatorname{absmax}$, $S_{\text{absmax}} = 2$.

Ответ. $\hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \le t \le 1, \\ t^2-4t+2, & 1 \le t \le 2, \end{cases} \in \operatorname{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = -2$; $-\hat{x} \in \operatorname{absmax}$, $S_{\text{absmax}} = 2$.

Пример 2.

$$T \to \min;\ -1 \le \ddot{x} \le 3,\ x(0) = 1,\ x(T) = -1,\ \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0.$$

Решение. Приведем задачу к виду задач оптимального управления, вводя вместо функции x вектор-функцию (x_1, x_2), управление u и обозначения: $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x},\ u = \ddot{x}$,

$$T \to \min;\ \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ u \in [-1,\, 3],$$
$$x_1(0) = 1,\ x_1(T) = -1,\ x_2(0) = x_2(T) = 0.$$

Функция Лагранжа: $\mathscr{L} = \int\limits_0^T \big(p_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 - u)\big)\, dt + \lambda_0 T + \lambda_1(x_1(0) - 1) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3(x_1(T) + 1) + \lambda_4 x_2(T)$.

Необходимые условия:

a) система уравнений Эйлера для лагранжиана $L = p_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 - u)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt} L_{\dot{x}_1} + L_{x_1} = 0, \\ -\dfrac{d}{dt} L_{\dot{x}_2} + L_{x_2} = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} -\dot{p}_1 = 0, \\ -\dot{p}_2 - p_1 = 0, \end{cases} \iff p_2 = C_1 t + C_2;$$

b) трансверсальность по x для терминанта $l = \lambda_0 T + \lambda_1(x_1(0) - 1) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3(x_1(T) + 1) + \lambda_4 x_2(T)$:

$$L_{\dot{x}_1}(0) = l_{x_1(0)},\ L_{\dot{x}_1}(T) = -l_{x_1(T)} \iff p_1(0) = \lambda_1,\ p_1(T) = -\lambda_3,$$

$$L_{\dot{x}_2}(0) = l_{x_2(0)},\ L_{\dot{x}_2}(T) = -l_{x_2(T)} \iff p_2(0) = \lambda_2,\ p_2(T) = -\lambda_4;$$

c) оптимальность по u: $\min\limits_{u \in [-1,\, 3]} \{-p_2(t) u\} = -p_2(t)\hat{u}(t) \Longrightarrow$

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1, & p_2(t) < 0, \\ 3, & p_2(t) > 0, \\ \text{любое из } [-1,\, 3], & p_2(t) = 0; \end{cases}$$

d) стационарность по T:

$$\mathscr{L}_T(T) = 0 \iff \lambda_0 + \lambda_3 \dot{x}_1(T) + \lambda_4 \dot{x}_2(T) = 0;$$

e) неотрицательность: $\lambda_0 \geq 0$.
Учитывая то, что из граничного условия следует $\dot{x}_1(T) = 0$, а из b) $\lambda_4 = -p_2(T)$, получаем, что d) равносильно условию $\lambda_0 = p_2(T)\hat{u}(T)$.

Поэтому если $\lambda_0 = 0$, то $p_2(T) = 0$ или $\hat{u}(T) = 0$, но отсюда из c) вновь $p_2(T) = 0$. При этом p_2 не может быть тождественным нулем, ибо иначе все множители Лагранжа были бы нулями. Значит, из a) $p_2(t) = C(t - T)$, $C \neq 0$, а тогда из c) следует, что $\hat{u}(t) \equiv -1$ или $\hat{u}(t) \equiv 3$, т. е. $\ddot{\hat{x}} = -1$ или $\ddot{\hat{x}} = 3$, откуда $x = -\frac{t^2}{2} + A_1 t + A_2$ или $x = \frac{3t^2}{2} + B_1 t + B_2$. В обоих случаях не существует функции такого вида, удовлетворяющей условиям на концах $x(0) = 1$, $x(T) = -1$, $\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0$. Таким образом, в случае $\lambda_0 = 0$ нет допустимых экстремалей.

Полагаем $\lambda_0 = 1$. В силу условий п. a) p_2 — линейная функция, не тождественно равная нулю. Значит p_2 может менять свой знак на отрезке $[0, T]$ не более одного раза. Причем, если функция p_2 не меняет свой знак на $[0, T]$, то $\hat{u}(t) \equiv -1$ или $\hat{u}(t) \equiv 3$. В обоих случаях мы уже проверили, что нет допустимых экстремалей.

Поэтому p_2 меняет знак на $[0, T]$ ровно один раз в некоторой точке $\tau \in (0, T)$. Получаем две возможности:

$$\hat{u} = \ddot{\hat{x}} = \begin{cases} 3, & 0 \leq t \leq \tau, \\ -1, & \tau < t \leq T, \end{cases} \qquad \text{или} \quad \hat{u} = \ddot{\hat{x}} = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 3, & \tau < t \leq T. \end{cases}$$

Первый случай невозможен, так как тогда параболы с заданными условиями на концах не пересекаются. Интегрируя второе равенство, находим, что

$$\dot{\hat{x}} = \begin{cases} -t + C_1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 3t + C_2, & \tau < t \leq T. \end{cases}$$

Из условий на концах $\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0$ имеем

$$\dot{\hat{x}} = \begin{cases} -t, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 3(t - T), & \tau < t \leq T. \end{cases}$$

Поскольку $\hat{x} \in PC^2([0, T])$, то функция $\dot{\hat{x}}$ должна быть непрерывной в точке τ, поэтому $-\tau = 3(\tau - T)$, откуда $\tau = 3T/4$. Интегрируя еще раз, получаем

$$\hat{x} = \begin{cases} -\dfrac{t^2}{2} + C, & 0 \le t \le \dfrac{3T}{4}, \\ \dfrac{3(t-T)^2}{2} + D, & \dfrac{3T}{4} \le t \le T, \end{cases} \underset{x(T)=-1}{\overset{x(0)=1}{=}} \begin{cases} -\dfrac{t^2}{2} + 1, & 0 \le t \le \dfrac{3T}{4}, \\ \dfrac{3}{2}\Big(t - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\Big)^2 - 1, & \dfrac{3T}{4} \le t \le T. \end{cases}$$

Из условия непрерывности в точке $\tau = \dfrac{3T}{4}$:
$-\dfrac{9T^2}{32} + 1 = \dfrac{3T^2}{32} - 1 \Leftrightarrow \dfrac{12T^2}{32} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{3T^2}{16} = 1 \Leftrightarrow T^2 = \dfrac{16}{3} \Rightarrow T = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.
Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль

$$\hat{x} = \begin{cases} -\dfrac{t^2}{2} + 1, & 0 \le t \le \sqrt{3}, \\ \dfrac{3}{2}\Big(t - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\Big)^2 - 1, & \sqrt{3} \le t \le \dfrac{4}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Аналогично тому, как это было сделано в простейшей задаче быстродействия, можно показать, что $\hat{x} \in \mathrm{absmin}$, т. е. найденное значение $\hat{T} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ доставляет абсолютный минимум в задаче.

Ответ. $\left(\begin{cases} -\dfrac{t^2}{2} + 1, & 0 \le t \le \sqrt{3}, \\ \dfrac{3}{2}\Big(t - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\Big)^2 - 1, & \sqrt{3} \le t \le \dfrac{4}{\sqrt{3}}, \end{cases}\right) \in \mathrm{absmin}$, $S_{\mathrm{absmin}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.