Рассмотрим задачу о наибыстрейшей остановке лифта в шахте. Лифт управляется под воздействием внешней силы, которая может изменяться в заданных пределах, регулируемых человеком. Предположим, что возможности действующей силы, а следовательно, и ускорения, ограничены какой-то величиной. Например, ускорение может изменяться от -1 до $+1$. Требуется за кратчайшее время T остановить лифт ($\dot{x}(T) = 0$), для определенности в начале координат ($x(T) = 0$). Формализация:

$$T \to \min;\ |\ddot{x}| \leq 1,\ x(0) = \xi_1,\ \dot{x}(0) = \xi_2,\ x(T) = \dot{x}(T) = 0.$$

Аналогичная задача о машине, движущейся прямолинейно по горизонтальной дороге. Машина может двигаться в любую сторону с ускорением, не превышающем единицу. Требуется остановить машину в определенном месте за кратчайшее время.

Сведем задачу к задаче оптимального управления, вводя вместо x вектор-функцию (x_1, x_2), управление u, обозначая $x_1 := x,\ x_2 := \dot{x},\ u := \ddot{x}$:

$$T \to \min;\ \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ u \in [-1, 1],$$

$$x_1(0) = \xi_1,\ x_2(0) = \xi_2,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$$

Функция Лагранжа $\mathscr{L} = \int\limits_0^T \underbrace{\left(p_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 - u)\right)}_{L} dt +$

$\underbrace{\lambda_0 T + \lambda_1(x_1(0) - \xi_1) + \lambda_2(x_2(0) - \xi_2) + \lambda_3 x_1(T) + \lambda_4 x_2(T)}_{l}.$

Необходимые условия: a) система уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_1} + L_{x_1} = 0, \\ -\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_2} + L_{x_2} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dot{p}_1 = 0, \\ -\dot{p}_2 - p_1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow p_2 = C_1 t + C_2;$$

b) трансверсальность по x:

$L_{\dot{x}_1}(0) = l_{x_1(0)},\ L_{\dot{x}_1}(T) = -l_{x_1(T)} \Leftrightarrow p_1(0) = \lambda_1,\ p_1(T) = -\lambda_3,$
$L_{\dot{x}_2}(0) = l_{x_2(0)},\ L_{\dot{x}_2}(T) = -l_{x_2(T)} \Leftrightarrow p_2(0) = \lambda_2,\ p_2(T) = -\lambda_4;$

$$\mathscr{L}=\int_0^T(p_1(\dot x_1-x_2)+p_2(\dot x_2-u))\,dt+\lambda_0T+\lambda_1(x_1(0)-\xi_1)+\lambda_2(x_2(0)-\xi_2)+\lambda_3x_1(T)+\lambda_4x_2(T).$$

c) оптимальность по u (не зависящие от u слагаемые не выписываем): $\min\limits_{u\in[-1,1]}\{-p_2(t)u\}=-p_2(t)\hat u(t)\Rightarrow$

$$\hat u(t)=\begin{cases}\operatorname{sign}p_2(t), & p_2(t)\neq0,\\ \text{любое из }[-1,1], & p_2(t)=0;\end{cases}$$

d) стационарность по T: $\mathscr{L}_T=0\Leftrightarrow\lambda_0+\lambda_3\dot x_1(T)+\lambda_4\dot x_2(T)=0$;

e) неотрицательность: $\lambda_0\geq0$.

Учитывая, что из начального условия $\dot x_1(T)=0$, а из b) $\lambda_4=-p_2(T)$, и $\dot x_2(T)=u(T)$, получаем, что d) равносильно условию $\lambda_0=p_2(T)\hat u(T)$.

Если $\lambda_0=0\Rightarrow p_2(T)=0$ или $\hat u(T)=0\overset{c}{\Rightarrow}p_2(T)=0$. При этом $p_2\not\equiv0$, ибо иначе все множители Лагранжа были бы нулями $\overset{a}{\Rightarrow}p_2(t)=C(t-T)$, значит, $p_2(t)$ на $(0,T)$ не меняет знак $\overset{c}{\Rightarrow}\hat u(t)\equiv1$ или $\hat u(t)\equiv-1$.

Пусть $\hat{u} \equiv 1 \Leftrightarrow \dot{\hat{x}}_2 \equiv 1 \overset{x_2(T)=0}{\Rightarrow} x_2 = t - T \leq 0 \overset{\dot{x}_1 = x_2}{\Rightarrow} \dot{x}_1 = t - T$ $\overset{x_1(T)=0}{\Rightarrow} x_1 = \frac{(t-T)^2}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{x_2^2}{2}$. Следовательно, в этом случае начальные условия должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} x_1(0) = \frac{x_2^2(0)}{2}, \\ x_2(0) = -T < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \frac{\xi_2^2}{2}, \\ \xi_2 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_2 = -\sqrt{2\xi_1}, \\ \xi_1 > 0. \end{cases}$$

При этом $T = -\xi_2$.

Пусть $\hat{u} \equiv -1 \Leftrightarrow \dot{\hat{x}}_2 \equiv -1 \overset{x_2(T)=0}{\Rightarrow} x_2 = T - t \geq 0 \overset{\dot{x}_1 = x_2}{\Rightarrow} \dot{x}_1 = T - t$ $\overset{x_1(T)=0}{\Rightarrow} x_1 = -\frac{(t-T)^2}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{x_2^2}{2}$. Следовательно, в этом случае начальные условия должны удовлетворять системе

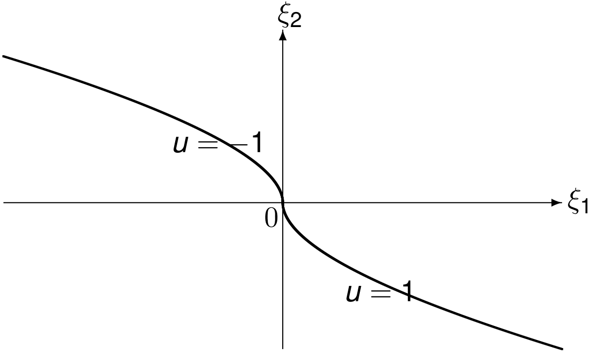
$$\begin{cases} x_1(0) = -\frac{x_2^2(0)}{2}, \\ x_2(0) = T > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\frac{\xi_2^2}{2}, \\ \xi_2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_2 = \sqrt{-2\xi_1}, \\ \xi_1 < 0. \end{cases}$$

При этом $T = \xi_2$. Ниже покажем, что найденное время движения действительно доставляет минимум в задаче.

Таким образом, в нашей задаче в этих случаях решение достигается при $\lambda_0 = 0$.

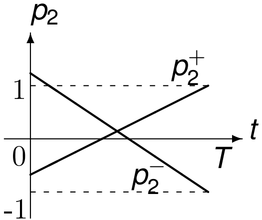
Множество начальных условий, соответствующих таким управлениям, описывается общим уравнением

$$\xi_2 = \varphi(\xi_1) := \begin{cases} -\sqrt{2\xi_1}, & \xi_1 \geq 0, \\ \sqrt{-2\xi_1}, & \xi_1 \leq 0. \end{cases}$$



Если же $\xi_2 \neq \varphi(\xi_1) \Rightarrow \lambda_0 \neq 0 \Rightarrow \lambda_0 = 1 \overset{\lambda_0 = p_2(T)\hat{u}(T)}{\Rightarrow} p_2(T) \neq 0$, $\hat{u}(T) = \operatorname{sign} p_2(T) \Rightarrow |p_2(T)| = 1$ и p_2 меняет свой знак в $(0, T)$ (случай, когда p_2 не меняет свой знак в $(0, T)$ и $\hat{u}(t) \equiv \pm 1$ рассмотрен при $\lambda_0 = 0$). Есть две возможности:

$$p_2^+(t) = C(t - T) + 1, \quad p_2^-(t) = C(t - T) - 1.$$

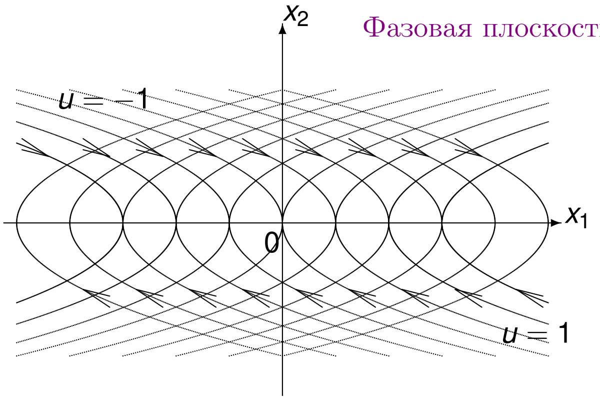


Этим возможностям в силу c) соответствуют управления:

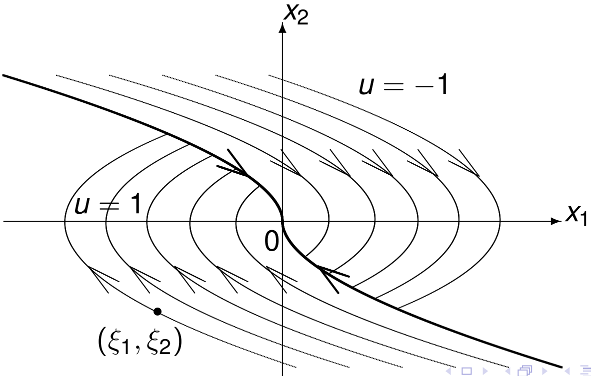
$$u^+ = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < \tau, \\ 1, & \tau < t \leq T, \end{cases} \quad u^- = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \tau, \\ -1, & \tau < t \leq T. \end{cases}$$

$u(t)=1 \Rightarrow \dot{x}_2=1 \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 = t+C' \Rightarrow x_1 = \frac{(t+C')^2}{2}+C = \frac{x_2^2}{2}+C$, направление движения по такой параболе определяется из условия возрастания x_2, так как $\dot{x}_2 = 1$.

Аналогично, $u(t) = -1 \Rightarrow \dot{x}_2 = -1 \Rightarrow x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + C,\ x_2 \downarrow$.



В искомую точку (0,0) ($x_1(T) = x_2(T) = 0$) мы должны попасть не более чем с одним переключением, двигаясь по фазовой траектории по разрешенному направлению. Переключения совершаются на кривой $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$. Для каждого начального условия имеется единственная фазовая кривая, приводящая в точку $(0, 0)$.



Поскольку всегда $|\dot{x}_2| = 1$ на оптимальной траектории, то $x_2 = \pm t + C \Rightarrow \hat{T} = \operatorname{Var} x_2$ (вариация x_2).

Покажем, что $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{T}) \in \mathrm{absmin}$. Для определенности $\hat{u} = \hat{u}^- = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \tau, \\ -1, & \tau < t \le \hat{T}. \end{cases}$ Предположим, что $\exists\ (x, u, T) \in D(P),\ \ T \le \hat{T}$. Доопределим x нулем на $[T, \hat{T}]$.
По формуле восстановления функции по ее n-ой производной

$$x(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1} x^{(n)}(s)ds + \sum_{k=0}^{n-1} x^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}$$

при $n=2$ $\quad x(\tau) = \int_0^\tau (\tau - s)\ddot{x}(s)ds + \xi_2\tau + \xi_1\ (x(0) = \xi_1, \dot{x}(0) = \xi_2)$

$$\Rightarrow \hat{x}(\tau) - x(\tau) = \int_0^\tau (\tau - s)\big(\ddot{\hat{x}}(s) - \ddot{x}(s)\big)ds \ge 0,$$

поскольку $\ddot{\hat{x}}(s) - \ddot{x}(s) = 1 - \ddot{x}(s) \ge 0$ (напомним, $|\ddot{x}(s)| \le 1$) и $\tau - s \ge 0$ при $s \in [0, \tau]$.
Причем равенство возможно только, если во всех точках непрерывности $\ddot{x}(s) = \ddot{\hat{x}}(s)$, а тогда $x(t) = \hat{x}(t)\ \forall\ t \in [0, \tau]$.

$$\hat{x}(\tau) - x(\tau) = \int_0^\tau (\tau - s)(\ddot{\hat{x}}(s) - \ddot{x}(s))ds \geq 0.$$

По другой формуле восстановления

$$x(t) = \frac{-1}{(n-1)!} \int_t^{\hat{T}} (t - s)^{n-1} x^{(n)}(s)ds + \sum_{k=0}^{n-1} x^{(k)}(\hat{T}) \frac{(t-\hat{T})^k}{k!}$$

при $n = 2 \quad x(\tau) = -\int_\tau^{\hat{T}} (\tau - s)\ddot{x}(s)ds \quad (x(\hat{T}) = \dot{x}(\hat{T}) = 0) \Rightarrow$

$$\hat{x}(\tau) - x(\tau) = -\int_\tau^{\hat{T}} (\tau - s)\big(\ddot{\hat{x}}(s) - \ddot{x}(s)\big)ds \leq 0,$$

поскольку $\ddot{\hat{x}}(s) - \ddot{x}(s) = -1 - \ddot{x}(s) \leq 0$ (напомним, $|\ddot{x}(s)| \leq 1$) и $\tau - s \leq 0$ при $s \in [\tau, \hat{T}]$.

Причем равенство возможно только, если во всех точках непрерывности $\ddot{x}(s) = \ddot{\hat{x}}(s)$, а тогда $x(t) = \hat{x}(t) \ \forall \ t \in [\tau, \hat{T}]$.

Таким образом, $x(\tau) = \hat{x}(\tau) \Rightarrow x(t) \equiv \hat{x}(t) \ \forall \ t \in [0, \hat{T}] \Rightarrow T = \hat{T}$.

Аэродинамическая задача Ньютона

Задача Ньютона — это задача о сопротивлении движению тела вращения в “редкой” среде. Необходимо выбрать форму тела вращения так, чтобы сопротивление движению было минимально.

Ньютон представлял себе среду, состоящей из неподвижных частиц фиксированной массы, являющихся абсолютно упругими шарами.

Формализованная экстремальная задача:

$$\int_0^{T_0} \frac{t\,dt}{1+\dot{x}^2} \to \min; \ x(0)=0, \ x(T_0)=\xi.$$

Очевидно, что $S_{\text{absmin}} = 0$. Зазубренность профиля.

Для того, чтобы столкновение частицы среды учитывать только один раз, налагаем условие $u := \dot{x} \geq 0$.

$$\int_0^{T_0} \frac{t\,dt}{1+u^2} \to \min;\ \ \dot{x}=u,\ \ u\ge 0,\ \ x(0)=0,\ \ x(T_0)=\xi.$$

Ф-я Лагранжа $\mathscr{L} = \int_0^{T_0}\Big(\frac{\lambda_0 t}{1+u^2}+p(\dot{x}-u)\Big)dt+\lambda_1 x(0)+\lambda_2\big(x(T_0)-\xi\big).$

Необходимые условия: a) уравнение Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}+\hat{L}_x=0 \Leftrightarrow -\dot{p}=0 \Leftrightarrow p=\text{const};$$

b) трансверсальность по x: $\quad p(0)=\lambda_1,\ \ p(T_0)=-\lambda_2;$

c) оптимальность по u:

$$\min_{u\ge 0}\left\{\frac{\lambda_0 t}{1+u^2}-pu\right\}=\frac{\lambda_0 t}{1+\hat{u}^2}-p\hat{u};$$

d) неотрицательность: $\quad \lambda_0\ge 0.$

$$\lambda_0=0 \Rightarrow p\ne 0 \quad (p=0 \overset{b}{\Rightarrow} \lambda_1=\lambda_2=0),$$

$\min\limits_{u\ge 0}\{-pu\}=-p\hat{u}$ конечен $\Rightarrow p<0 \quad (p>0 \Rightarrow \min=-\infty),$

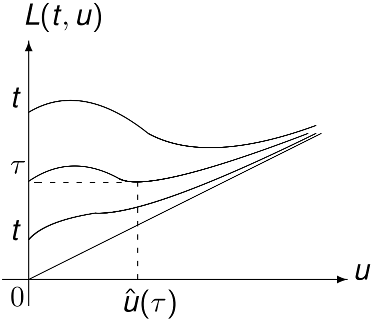
при этом $\hat{u}=0 \Rightarrow \dot{\hat{x}}=0 \Rightarrow \hat{x}=\text{const} \overset{x(0)=0}{\Rightarrow} \hat{x}\equiv 0 \Rightarrow \xi=0.$

$\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_0 = 1$. Обозначим $L(t,u) := \dfrac{t}{1+u^2} - pu$.

Тогда $\min\limits_{u \geq 0} L(t,u)$ может достигаться только при $p < 0$

($p \geq 0 \Rightarrow L(t,u) \downarrow$ и не достигает минимума).

Если $\hat{u}(t) > 0 \Rightarrow L_u = 0 \Rightarrow \hat{u}(t)$ удовлетворяет уравнению



$$L_u(t,u) = -\frac{2ut}{(1+u^2)^2} - p = 0$$

$$\Longleftrightarrow \; p = -\frac{2ut}{(1+u^2)^2}. \qquad (1)$$

При малых значениях $t > 0$ производная $L_u(t,u) > 0 \; \forall \; u \geq 0$. Значит, $\min\limits_{u \geq 0} L(t,u) = L(t,0)$.

Таким образом,

$$\hat{u} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau, \\ \hat{u}(t), & \tau \leq t \leq T_0. \end{cases}$$

Момент излома управления τ характеризуется уравнениями

$$p = -\frac{2\hat{u}(\tau)\tau}{(1+\hat{u}^2(\tau))^2}, \quad \tau = \frac{\tau}{1+\hat{u}^2(\tau)} - p\hat{u}(\tau) \qquad (2)$$

(первое уравнение — это соотношение (1) в точке τ, второе уравнение в (2) $L(\tau-0,0) = L(\tau,\hat{u}(\tau))$ — условие совпадения минимумов в точке τ).

Подставим p из 1-ого уравнения соотношения (2) во 2-е:

$$\tau = \frac{\tau}{1+\hat{u}^2(\tau)} + \frac{2\hat{u}^2(\tau)\tau}{(1+\hat{u}^2(\tau))^2} \Leftrightarrow (1+\hat{u}^2(\tau))^2 = 1+\hat{u}^2(\tau)+2\hat{u}^2(\tau)$$

$$\Leftrightarrow u^4(\tau) = u^2(\tau) \overset{\hat{u}(\tau)\neq 0}{\Rightarrow} \hat{u}^2(\tau) = 1 \overset{\hat{u}(\tau)>0}{\Rightarrow} \hat{u}(\tau) = 1.$$

Подставляя $\hat{u}(\tau) = 1$ в первое уравнение системы (2), получаем $p = -\dfrac{2\tau}{(1+1)^2} = -\dfrac{\tau}{2} \Rightarrow \tau = -2p.$

После излома оптимальное решение удовлетворяет соотношению (1):

$$p = -\frac{2ut}{(1+u^2)^2} \Rightarrow t = -\frac{p(1+u^2)^2}{2u} = -\frac{p}{2}\left(\frac{1}{u} + 2u + u^3\right).$$

Поскольку $\dfrac{dx}{dt} = u$, то $\dfrac{dx}{du} = \dfrac{dx}{dt} \cdot \dfrac{dt}{du} = u\dfrac{dt}{du} =$

$$= u\left(-\frac{p}{2}\left(-\frac{1}{u^2} + 2 + 3u^2\right)\right) = -\frac{p}{2}\left(-\frac{1}{u} + 2u + 3u^3\right).$$

Интегрируя это соотношение с учетом равенства $\hat{x}(\tau) = 0$, $\hat{u}(\tau) = 1$, получаем параметрические уравнения искомой оптимальной кривой:

$$\hat{x} = -\frac{p}{2}\left(\ln\frac{1}{u} + u^2 + \frac{3}{4}u^4\right) + \frac{7}{8}p, \quad t = -\frac{p}{2}\left(\frac{1}{u} + 2u + u^3\right), \ p < 0.$$

Константа p определяется из граничного условия $x(T_0) = \xi$. Эту кривую называют кривой Ньютона.

Покажем, что $\hat{x} \in \mathrm{absmin}$.

В силу оптимальности по u для любой допустимой функции $x \in PC^1[0, T_0]$, $x(0) = 0$, $x(T_0) = \xi$,

$$L(t, u) \geq L(t, \hat{u}) \Leftrightarrow \frac{t}{1 + \dot{x}^2} - p\dot{x} \geq \frac{t}{1 + \dot{\hat{x}}^2} - p\dot{\hat{x}}.$$

Интегрируем это неравенство

$$\int\limits_0^{T_0} \left(\frac{t}{1 + \dot{x}^2} - p\dot{x} \right) dt \geq \int\limits_0^{T_0} \left(\frac{t}{1 + \dot{\hat{x}}^2} - p\dot{\hat{x}} \right) dt,$$

с учетом того, что $p = \mathrm{const}$, а

$\int\limits_0^{T_0} \dot{x}(t)\, dt = x(T_0) - x(0) = \xi \overset{\text{аналогично}}{=} \int\limits_0^{T_0} \dot{\hat{x}}(t)\, dt$. Получаем

$$\int\limits_0^{T_0} \frac{t\, dt}{1 + \dot{x}^2} \geq \int\limits_0^{T_0} \frac{t\, dt}{1 + \dot{\hat{x}}^2} \Leftrightarrow J(x) \geq J(\hat{x}).$$

Значит, $\hat{x} \in \mathrm{absmin}$.

Пример 1. $\int\limits_0^2 x\,dt \to \mathrm{extr};\ |\ddot{x}| \le 2,\ x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0.$

Сведем к задаче оптимального управления, вводя вместо x вектор-функцию (x_1, x_2), обозначая $x_1 := x$, $x_2 := \dot{x}$, $u := \ddot{x}$:

$$\int\limits_0^2 x_1\,dt \to \mathrm{extr};\ \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ u \in [-2, 2],\ x_1(0) = x_2(0) = x_2(2) = 0.$$

Функция Лагранжа $\mathscr{L} = \int\limits_0^2 \big(\lambda_0 x_1 + p_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 - u)\big)\,dt$

$+\lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 x_2(2).$

Необходимые условия: a) система уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_1} + L_{x_1} = 0, \\ -\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_2} + L_{x_2} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dot{p}_1 + \lambda_0 = 0, \\ -\dot{p}_2 - p_1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{p}_1 = \lambda_0, \\ \dot{p}_2 = -p_1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = \lambda_0 t + C, \\ p_2 = -\frac{\lambda_0 t^2}{2} - Ct + C'; \end{cases}$$

b) трансверсальность по x:

$L_{\dot{x}_1}(0) = l_{x_1(0)},\ L_{\dot{x}_1}(2) = -l_{x_1(2)} \Leftrightarrow p_1(0) = \lambda_1,\ p_1(2) = 0,$

$L_{\dot{x}_2}(0) = l_{x_2(0)},\ L_{\dot{x}_2}(2) = -l_{x_2(2)} \Leftrightarrow p_2(0) = \lambda_2,\ p_2(2) = -\lambda_3;$

$$\mathscr{L}=\int_0^2\left(\lambda_0 x_1+p_1(\dot{x}_1-x_2)+p_2(\dot{x}_2-u)\right)dt+\lambda_1 x_1(0)+\lambda_2 x_2(0)+\lambda_3 x_2(2).$$

$a)\ \begin{cases} p_1=\lambda_0 t+C, \\ \dot{p}_2=-p_1; \end{cases}$ $\quad b)\ \begin{cases} p_1(0)=\lambda_1,\ p_1(2)=0, \\ p_2(0)=\lambda_2,\ p_2(1)=-\lambda_3; \end{cases}$

$c)$ оптимальность по u:

$$\min_{u\in[-2,2]}\{-p_2 u\}=-p_2\hat{u}\Rightarrow \hat{u}(t)=\begin{cases} 2\,\mathrm{sign}\,p_2(t), & p_2(t)\neq 0, \\ \text{любое из } [-2,2], & p_2(t)=0; \end{cases}$$

$d)$ неотрицательность: $\lambda_0\geq 0$ на min, $\lambda_0\leq 0$ на max.

$$\lambda_0=0 \overset{a}{\Rightarrow} p_1=C \overset{p_1(2)=0}{\Rightarrow} p_1=0 \overset{a}{\Rightarrow} \dot{p}_2=0\Rightarrow p_2=D\neq 0$$

(иначе все множители Лагранжа — нули) $\Rightarrow$ из c) $\hat{u}=2$ или $\hat{u}=-2$, т. е. $\ddot{x}=2$ или $\ddot{x}=-2\Rightarrow x=t^2+A_1t+A_2$ или $x=-t^2+B_1t+B_2$. В обоих случаях не удовлетворяются заданные условия на концах: $\dot{x}(0)=\dot{x}(2)=0$.

$a)$ $\begin{cases} p_1 = \lambda_0 t + C, \\ \dot p_2 = -p_1; \end{cases}$ $b)$ $\begin{cases} p_1(0) = \lambda_1, \ p_1(2) = 0, \\ p_2(0) = \lambda_2, \ p_2(1) = -\lambda_3; \end{cases}$

$c)$ $\hat u(t) = \begin{cases} 2 \operatorname{sign} p_2(t), & p_2(t) \neq 0, \\ \text{любое из } [-2, 2], & p_2(t) = 0; \end{cases}$

$d)$ неотрицательность: $\lambda_0 \geq 0$ на min, $\lambda_0 \leq 0$ на max.

В задаче на min положим $\lambda_0 = 1 \overset{a}{\Rightarrow} p_1 = t + C \overset{p_1(2)=0}{\Rightarrow}$ $p_1 = t - 2 \Rightarrow \dot p_2 = -p_1 = -t + 2 \Rightarrow p_2 = -\frac{(t-2)^2}{2} + C'$ — парабола с ветвями вниз и вершиной на оси $t = 2 \Rightarrow p_2$ не меняет свой знак на $[0, 2]$ или меняет его с минуса на плюс в некоторой точке $\tau \in (0, 2)$. Тогда из c) $\hat u = 2$ или $\hat u = -2$, или меняет свое значение с -2 на 2 в точке τ. В первых двух случаях функций, удовлетворяющих граничным условиям нет. Во втором

$$\hat{u} = \ddot{\hat{x}} = \begin{cases} -2, & 0 \le t \le \tau, \\ 2, & \tau < t \le 2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{cases} -2t + C_1, & 0 \le t \le \tau, \\ 2t + C_2, & \tau < t \le 2, \end{cases} \overset{\dot{x}(0)=\dot{x}(2)=0}{=} \begin{cases} -2t, & 0 \le t \le \tau, \\ 2t - 4, & \tau < t \le 2. \end{cases}$$

$$\hat{x} \in PC^2[0,2] \Rightarrow \dot{\hat{x}} \in C(\tau) \Rightarrow -2\tau = 2\tau - 4 \Leftrightarrow \tau = 1 \Rightarrow$$

$$\hat{x} = \begin{cases} -t^2 + C_1, & 0 \le t \le 1, \\ t^2 - 4t + C_2, & 1 \le t \le 2, \end{cases} \overset{x(0)=0}{=} \begin{cases} -t^2, & 0 \le t \le 1, \\ t^2 - 4t + 2, & 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

$$\left(\hat{x} \in C(1) \Rightarrow -1 = 1 - 4 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = 2\right).$$

Докажем, что $\hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \le t \le 1, \\ t^2 - 4t + 2, & 1 \le t \le 2, \end{cases} \in \text{absmin}.$

Возьмем $x \in D(P)$, обозначим $h := x - \hat{x}$ $(x = \hat{x} + h)$
$\Rightarrow h \in PC^2[0,2]$, $|\ddot{\hat{x}} + \ddot{h}| \le 2$, $h(0) = \dot{h}(0) = \dot{h}(2) = 0$. Так как
$p_2 = -\frac{(t-2)^2}{2} + C'$, то $\dot{p}_2 = 2 - t \Rightarrow \ddot{p}_2 = -1$. Тогда

$$B(x) - B(\hat{x}) = \int_0^2 (\hat{x} + h)\,dt - \int_0^2 \hat{x}\,dt = \int_0^2 h\,dt =$$

$$= -\int_0^2 \ddot{p}_2 h\,dt = -\int_0^2 h d\dot{p}_2 = -h\dot{p}_2\Big|_0^2 + \int_0^2 \dot{h}\dot{p}_2 dt =$$

$$\overset{\substack{\dot{p}_2(2)=0 \\ h(0)=0}}{=} \int_0^2 \dot{h} dp_2 = \dot{h}p_2\Big|_0^2 - \int_0^2 \ddot{h}p_2 dt \overset{\substack{\dot{h}(2)=0 \\ \dot{h}(0)=0}}{=} -\int_0^2 \ddot{h}p_2\,dt \ge 0,$$

поскольку $\hat{u} = \ddot{\hat{x}} = 2\,\text{sign}\,p_2$ при $p_2(t) \ne 0 \Rightarrow$
$|\ddot{\hat{x}} + \ddot{h}| \le 2 \Leftrightarrow |2\,\text{sign}\,p_2 + \ddot{h}| \le 2 \Leftrightarrow |2 + \ddot{h}\,\text{sign}\,p_2| \le 2$
$\Rightarrow -4 \le \ddot{h}\,\text{sign}\,p_2 \le 0 \Rightarrow \ddot{h}p_2 \le 0.$

$$S_{\text{absmin}} = J(\hat{x}) = \int_0^2 \hat{x}\,dt = \int_0^1 (-t^2)\,dt + \int_1^2 (t^2 - 4t + 2)\,dt =$$

$$= -\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + \left(\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 2t\right)\Big|_1^2 = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 8 + 4 - \frac{1}{3} + 2 - 2 = -2.$$

Ясно, что при решении задачи на максимум $-\hat{x} \in \text{absmax}$, $S_{\text{absmax}} = 2$, так как функционал $J(x)$ является нечетным относительно x, а множество допустимых функций симметрично относительно нуля $(x \in D(P) \Rightarrow -x \in D(P))$.

Ответ. $\hat{x} = \begin{cases} -t^2, & 0 \le t \le 1, \\ t^2 - 4t + 2, & 1 \le t \le 2, \end{cases} \in \text{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = -2$; $-\hat{x} \in \text{absmax}$, $S_{\text{absmax}} = 2$.

Пример 2.

$T \to \min;\ -1 \le \ddot{x} \le 3,\ x(0) = 1,\ x(T) = -1,\ \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0.$

Сведем к задаче оптимального управления, вводя вместо x вектор-функцию (x_1, x_2), обозначая $x_1 := x$, $x_2 := \dot{x}$, $u := \ddot{x}$:

$$T \to \min;\ \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ u \in [-1, 3],$$
$$x_1(0) = 1,\ x_1(T) = -1,\ x_2(0) = x_2(T) = 0.$$

Функция Лагранжа $\mathscr{L} = \int\limits_0^T \underbrace{\big(p_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(t)(\dot{x}_2 - u)\big)}_{L} dt +$

$$+ \overbrace{\lambda_0 T + \lambda_1(x_1(0) - 1) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3(x_1(T) + 1) + \lambda_4 x_2(T)}^{l}.$$

Необходимые условия: a) система уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_1} + L_{x_1} = 0, \\ -\frac{d}{dt}L_{\dot{x}_2} + L_{x_2} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dot{p}_1 = 0, \\ -\dot{p}_2 - p_1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = -C_1, \\ p_2 = C_1 t + C_2; \end{cases}$$

b) трансверсальность по x:

$$L_{\dot{x}_1}(0) = l_{x_1(0)},\ L_{\dot{x}_1}(T) = -l_{x_1(T)} \Leftrightarrow p_1(0) = \lambda_1,\ p_1(T) = -\lambda_3,$$
$$L_{\dot{x}_2}(0) = l_{x_2(0)},\ L_{\dot{x}_2}(T) = -l_{x_2(T)} \Leftrightarrow p_2(0) = \lambda_2,\ p_2(T) = -\lambda_4;$$

c) оптимальность по u: $\min\limits_{u\in[-1,3]}\{-p_2 u\} = -p_2\hat{u} \Rightarrow$

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} -1, & p_2(t) < 0, \\ 3, & p_2(t) > 0, \\ \text{любое из } [-1,3], & p_2(t) = 0; \end{cases}$$

d) стационарность по T:

$$\mathscr{L}_T = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_3\dot{x}_1(T) + \lambda_4\dot{x}_2(T) = 0;$$

e) неотрицательность: $\lambda_0 \geq 0$.

$\dot{x}_1(T) = 0$, $\lambda_4 = -p_2(T)$, $\dot{x}_2(T) = u(T) \Rightarrow$ d) равносильно условию $\lambda_0 = p_2(T)\hat{u}(T)$.

Если $\lambda_0 = 0 \Rightarrow p_2(T) = 0$ или $\hat{u}(T) = 0 \overset{c}{\Rightarrow} p_2(T) = 0$.

При этом $p_2 \not\equiv 0$ ($p_2 \equiv 0 \overset{a}{\Rightarrow} p_1 = 0 \overset{b}{\Rightarrow}$ все множители — нули).

$\overset{a}{\Rightarrow} p_2(t) = C(t-T) \Rightarrow p_2(t)$ на $(0, T)$ не меняет знак,
$\overset{c}{\Rightarrow} \hat{u}(t) \equiv -1$ или $\hat{u}(t) \equiv 3$, т. е. $\ddot{x} = -1$ или $\ddot{x} = 3$
$\Rightarrow x = -\frac{t^2}{2} + A_1 t + A_2$ или $x = \frac{3t^2}{2} + B_1 t + B_2$.
В обоих случаях не удовлетворяются заданные условия на концах: $\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0$.

$\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_0 = 1 \Rightarrow p_2(T) \neq 0$. p_2 — линейная функция $\Rightarrow p_2$ может менять свой знак на отрезке $[0, T]$ не более одного раза. Причем, если p_2 не меняет свой знак на $[0, T]$ $\Rightarrow \hat{u}(t) \equiv -1$ или $\hat{u}(t) \equiv 3$. В обоих случаях заданные условия на концах не удовлетворяются.
Поэтому p_2 меняет знак на $[0, T]$ ровно один раз в некоторой точке $\tau \in (0, T)$. Получаем две возможности:

$$\hat{u} = \ddot{\hat{x}} = \begin{cases} 3, & 0 \leq t \leq \tau, \\ -1, & \tau < t \leq T, \end{cases} \quad \text{или} \quad \hat{u} = \ddot{\hat{x}} = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 3, & \tau < t \leq T. \end{cases}$$

Первый случай невозможен, так как тогда параболы с заданными условиями на концах не пересекаются.

Интегрируя второе равенство, находим, что

$$\dot{\hat{x}} = \begin{cases} -t + C_1, & 0 \le t \le \tau, \\ 3t + C_2, & \tau < t \le T, \end{cases} \overset{\dot{x}(0)=\dot{x}(T)=0}{=} \begin{cases} -t, & 0 \le t \le \tau, \\ 3(t-T), & \tau < t \le T. \end{cases}$$

$$\hat{x} \in PC^2[0,T] \Rightarrow \dot{\hat{x}} \in C(\tau) \Rightarrow -\tau = 3(\tau - T) \Leftrightarrow \tau = \frac{3T}{4} \Rightarrow$$

$$\hat{x} = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + C, & 0 \le t \le \frac{3T}{4}, \\ \frac{3(t-T)^2}{2} + D, & \frac{3T}{4} \le t \le T, \end{cases} \overset{\substack{x(0)=1 \\ x(T)=-1}}{=} \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + 1, & 0 \le t \le \frac{3T}{4}, \\ \frac{3}{2}\left(t - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1, & \frac{3T}{4} \le t \le T. \end{cases}$$

$$\hat{x} \in C\left(\frac{3T}{4}\right) \Rightarrow -\frac{9T^2}{32} + 1 = \frac{3T^2}{32} - 1 \Leftrightarrow \frac{12T^2}{32} = 2 \Leftrightarrow \frac{3T^2}{16} = 1 \Leftrightarrow T = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\Longrightarrow \hat{x} = \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + 1, & 0 \le t \le \sqrt{3}, \\ \frac{3}{2}\left(t - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1, & \sqrt{3} \le t \le \frac{4}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Аналогично простейшей задаче быстродействия, можно доказать, что $\hat{x} \in \text{absmin}$, $S_{\text{absmin}} = \hat{T} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.